PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES CIENCIAS

Matemáticas Básicas
Material complementario N^o 2A
Sistema de ecuaciones lineales

Problema planteado

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

Esto quiere decir, que se deben encontrar todos los posibles valores que pueden tomar x, y y z tales que las tres ecuaciones se satisfagan simultáneamente al evaluarlas en dichos números.
Probablemente resolveríamos el problema ampliando el método estudiado para sistemas con sólo 2 ecuaciones lineales y en donde despejábamos una variable y la reemplazábamos en la otra ecuación:

Así por ejemplo, despejaríamos y en la tercera ecuación :$y = 4 - 3x + 2z$ y al reemplazar esta variable por la expresión equivalente en las otras dos ecuaciones, se obtendría:

$$2x + 4(4 + 2z - 3x) + 6z = 18$$

$$4x + 5(4 + 2z - 3x) + 6z = 24$$

De esta manera el problema se convierte en uno ya conocido donde se tienen dos ecuaciones y dos variables.

$$-10x + 14z = 2$$

$$-11x + 16z = 4$$

Justamente coincide con el sistema que se resolvió al iniciar esta sección y donde se obtuvo: $x = 4; z = 3$ y reemplazando en cualquiera de las ecuaciones dle sistema inicial se obtendrá el valor de $y = -2$.

Sin embargo, si se pidiera resolver un sistema de 5 ecuaciones lineales con 5 variables, este método podría resultar poco práctico. La resolución de un sistema de ecuaciones lineales puede abreviarse trabajando con los coeficientes de las variables y con los términos independientes que aparecen en las ecuaciones. A continuación se mostrará la solución del problema planteado, aplicando el método denominado *Método de eliminación gaussiana* y en el que el objetivo es trabajar con ecuaciones equivalentes a las dadas inicialmente, por lo que el conjunto solución del nuevo sistema será el mismo que el del sistema inicial, pero con las que el cálculo resultará más sencillo.

Descripción del método de eliminación gaussiana

Considerando el sistema anterior:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

El sistema (1) puede ser escrito en forma matricial omitiendo las variables:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

La matriz (2) se denomina matriz ampliada del sistema (1). Ahora, las operaciones que realizaremos sobre las ecuaciones del sistema (1) se realizarán con las filas de la matriz (2). El objetivo es obtener, a través de la suma de filas o la multiplicación de una fila por un número distinto de cero, nuevas filas pero que correspondan a un sistema equivalente al dado inicialmente.

La matriz (2) debe convertirse, en lo posible, en una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{bmatrix}$$

Para conseguirlo se sigue el siguiente procedimiento:

1º.Para conseguir un 1 en la primera posición, se multiplica la primera ecuación por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

2º.Luego, para obtener 0 en la primera columna de las filas 2 y 3, restamos a la segunda ecuación la primera ecuación multiplicada por 4; un proceso similar se realizará con la tercera fila o ecuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Los pasos realizados equivalen a eliminar la variable x en la segunda y tercera ecuación.

3º. Ahora se multiplica la segunda fila (o segunda ecuación) por $-\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

4º. Para obtener 0 en la segunda columna de la tercera fila (ecuación), se debe sumar la tercera fila con cinco veces la nueva segunda fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

5º. Finalmente, para obtener 1 en la tercera fila, tercera columna, se multiplica por (-1) la tercera ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6º. Si se expresa la matriz anterior en términos de las ecuaciones asociadas, se obtendrá:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ \quad y + 2z = 4 \\ \quad\quad z = 3 \end{cases}$$

Entonces, de la tercera fila se obtiene: z=3 y sustituyendo este valor en la segunda ecuación se obtiene: $y = -2$; y sustituyendo estos valores en la primera ecuación, se tendrá que $x = 4$.

Por lo tanto , este sistema de ecuaciones tiene sólo una solución:

C.S.= $\{(x;y;z) = (4;-2;3)\}$.

1. Resolver, cuando sea posible, los sistemas:

$$a)\begin{cases} 2x + y + 3z = -9 \\ 4x + 2y + 5z = -7 \\ -6x - 5y - z = -1 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 2x - y \qquad = 3 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 3x + y - 7z = 0 \\ x + 5y - z = 2 \end{cases}$$

2. Resolver el siguiente sistema:

a.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 10 \\ x + 5y - z - 2w = 3 \\ -x + 2y + 2z - 3w = -5 \\ 3x + y - z + w = 11 \end{cases}$$

b. Sustituir en el sistema anterior la cuarta ecuación por

$$3x + y - 3z + 4w = 16$$

y resolver el nuevo sistema.

3. Discutir, el sistema según los distintos valores del parámetro k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

4. Hallar los valores de a y b para que el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = -b \\ x + 4y + az = -10 \end{cases}$$

a. tenga infinitas soluciones

b. tenga solución única

c. no tenga solución.

a. Discutir, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

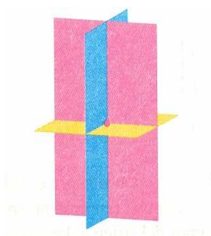
$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}.$$

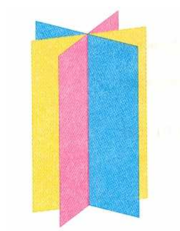
b. Resolver, si es posible, en el caso $m = 2$.

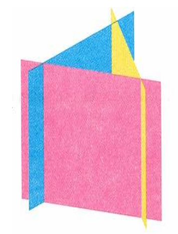
5. La ecuación lineal $ax + by + cz = d$ en las variables x, y y z corresponde a la ecuación de un plano en un sistema coordenado tridimensional.

Es posible que dados tres planos, estos:

Se corten solo en un punto: Se corten en infinitos puntos: No se corten







Considerando los planos :

$$\mathcal{P}_1 : 2x - 3y + 5z = 1$$

$$\mathcal{P}_2 : x - 4y + 3z = -4$$

$$\mathcal{P}_3 : x - 3y + cz = -6$$

a. Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos no se corten.

b. Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en un único punto.

c. Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en infinitos puntos.

6. Dado el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}.$$

Analizar el sistema según los valores de a y b.

Coordinador de teoría : Profesor Norberto Chau

Lima, 21 de marzo del 2011