

Capítulo 8 [I]

Análisis Estructural

Estática 2015-1

Profesor Herbert Yépez Castillo

Introducción

8.1 Tipos de Estructuras

- **Armaduras**
- **Marcos**
- **Máquinas**

8.2 Armadura

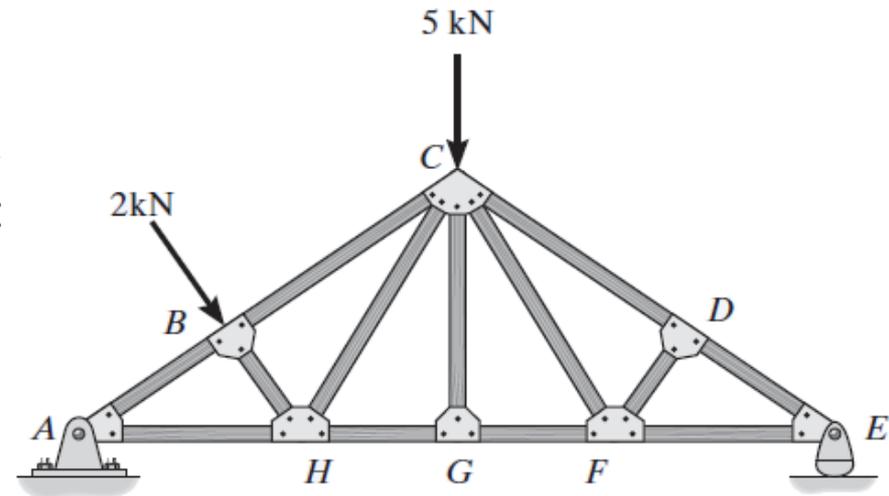
- **Estabilidad y determinación estática externas**
- **Estabilidad y determinación estática internas**
- **El método de los nudos**
- **Miembros de fuerza cero**
- **El método de las secciones**

8.3 Marcos y Máquinas

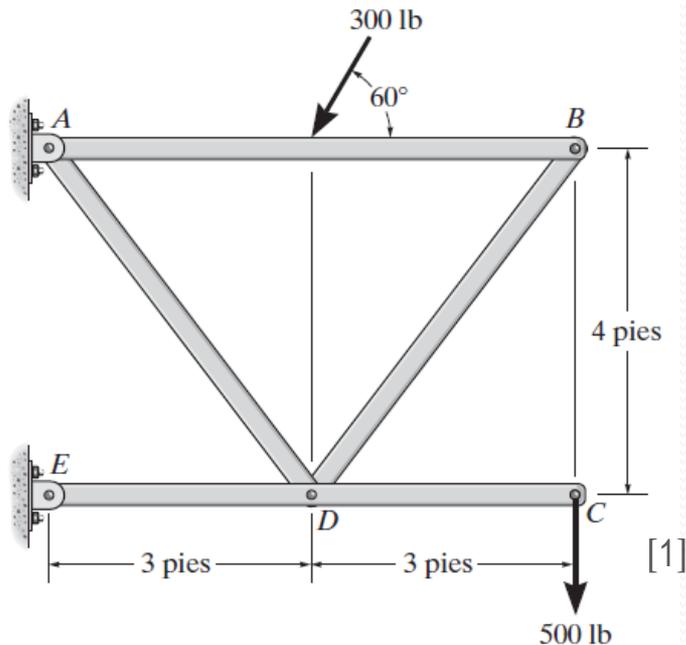
8.1 Tipos de Estructuras

Las estructuras se pueden agrupar en tres tipos principales para su estudio:

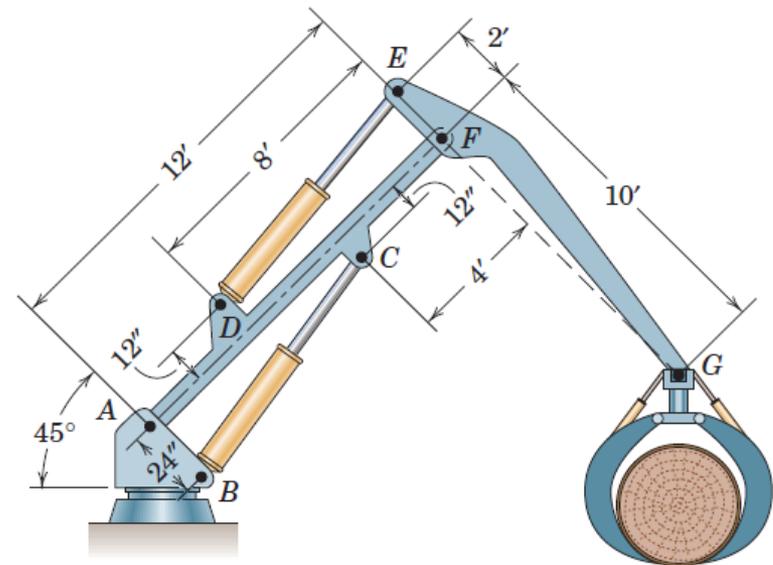
- Armaduras
- Marcos
- Máquinas



[1]



[1]

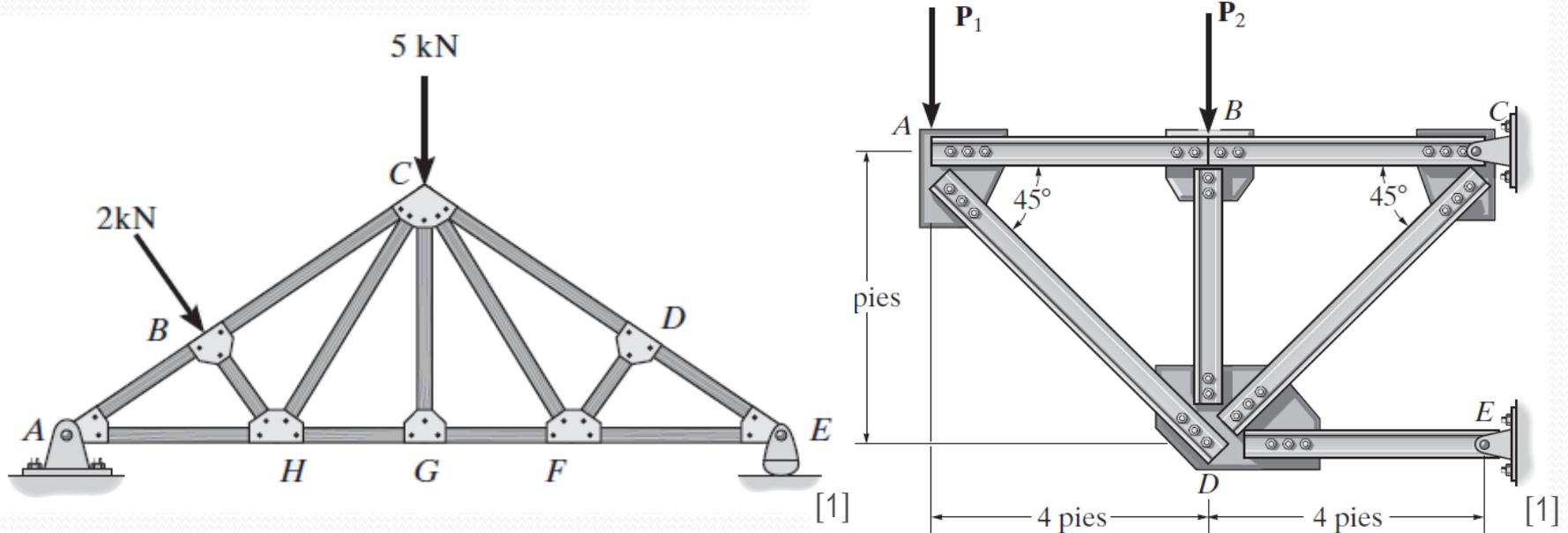


[2]

8.1 Tipos de Estructuras

Armadura

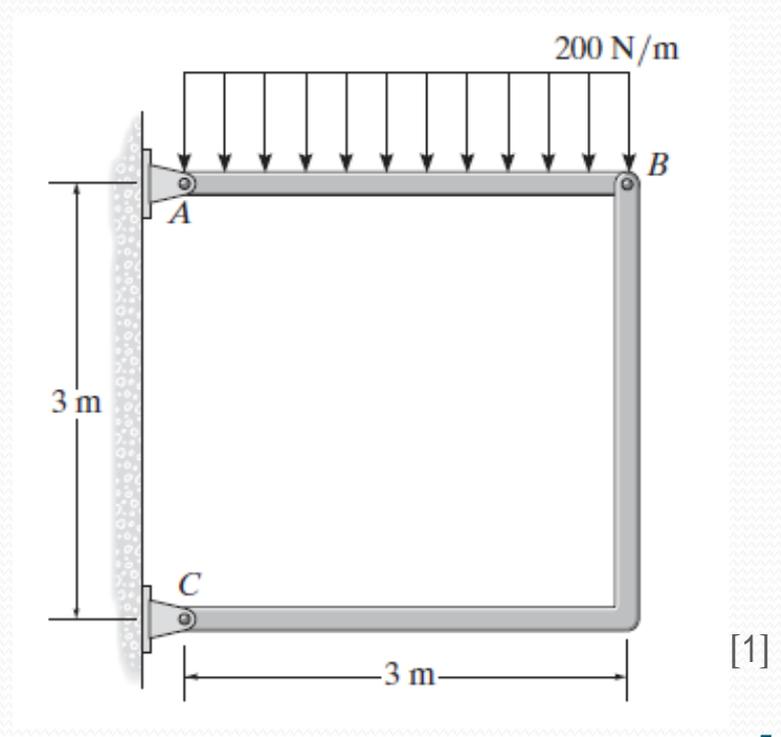
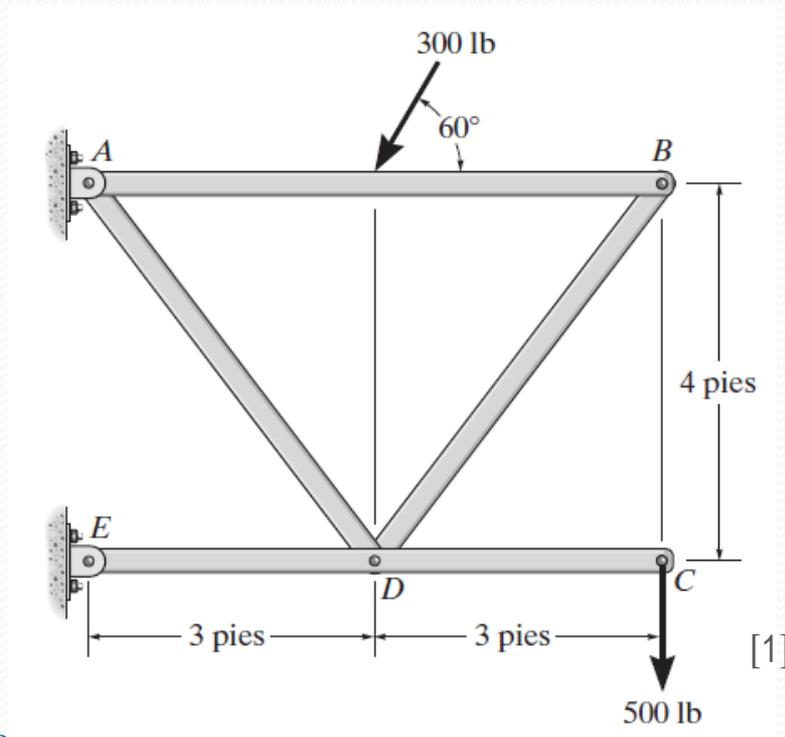
- **Estado:** Estructuras estacionarias, totalmente restringidas.
- **Finalidad:** Diseñada para soportar cargas.
- **Constituida:** Elementos rectos esbeltos conectados en los extremos (nudos), los cuales están sometidos a tracción o compresión.



8.1 Tipos de Estructuras

Marco (Bastidores)

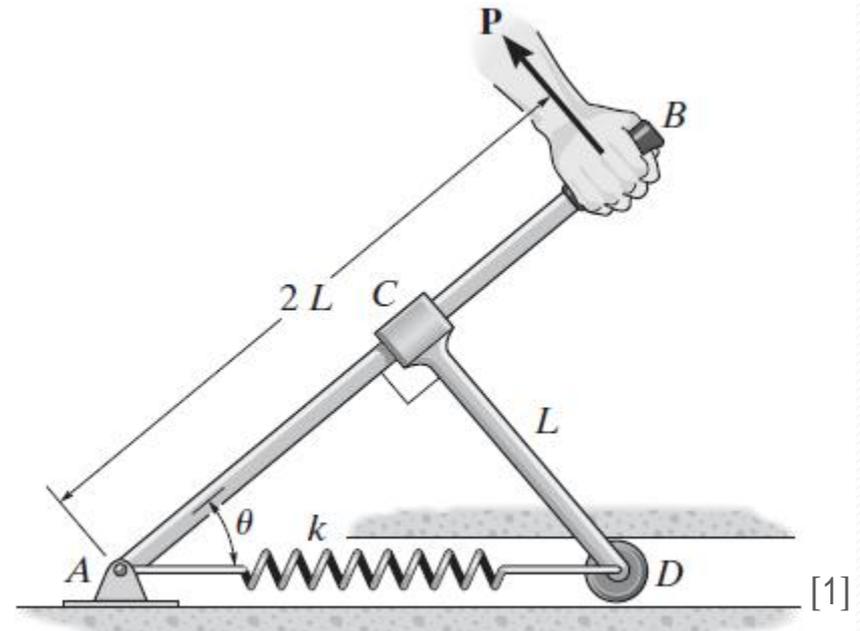
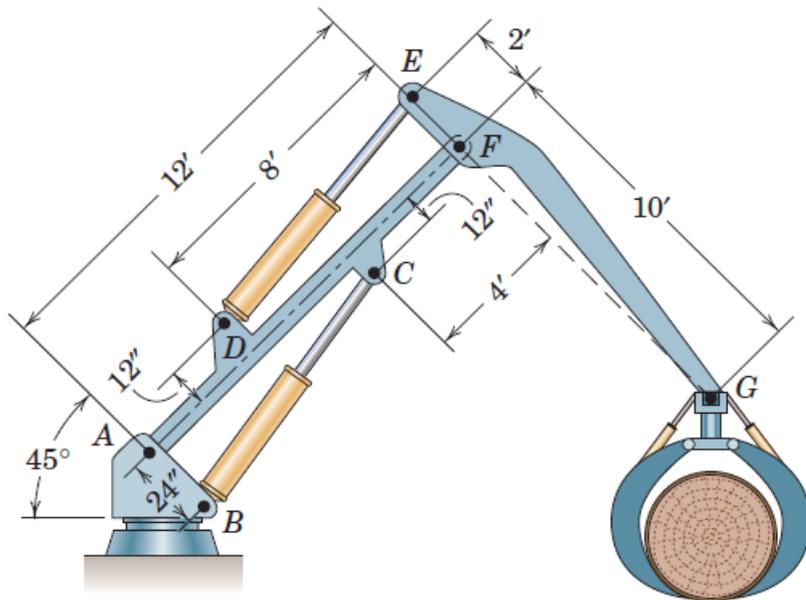
- **Estado:** Estructuras estacionarias, totalmente restringidas.
- **Finalidad:** Diseñado para soportar cargas.
- **Constituida:** Al menos un elemento no es miembro de dos fuerzas



8.1 Tipos de Estructuras

Máquinas

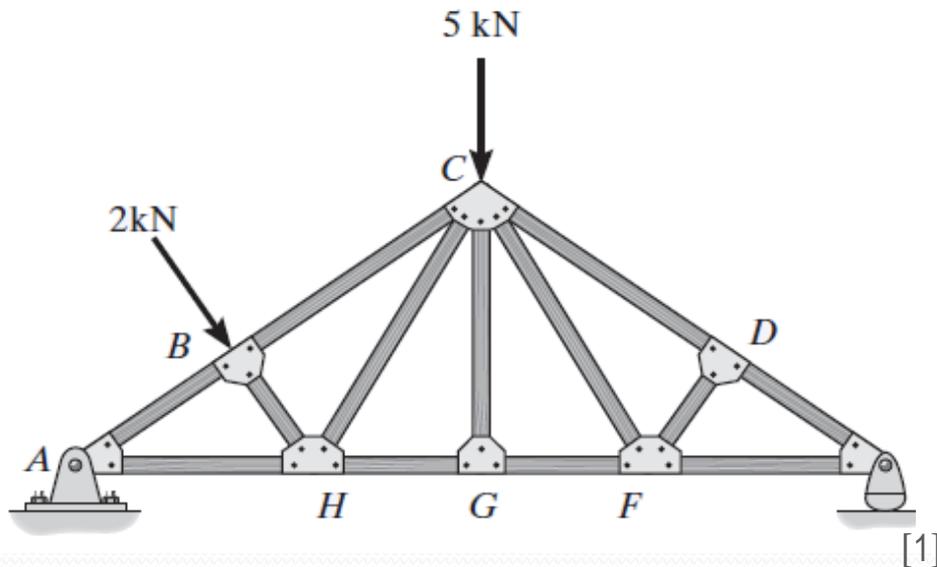
- **Estado:** Estructuras que contienen elementos en **movimiento**.
- **Finalidad:** Diseñado para transmitir y modificar fuerzas.
- **Constituida:** Al menos un elemento no es miembro de dos fuerzas



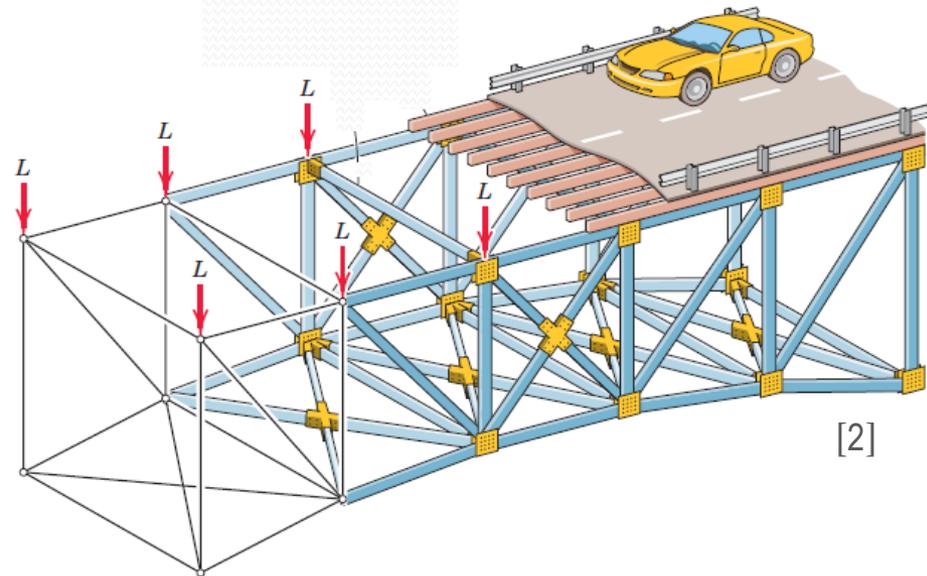
8.2 Armaduras

8.2 Armadura

- Una armadura está constituida elementos esbeltos armados triangularmente y **conectados entre sí por sus extremos (nudos)**.
- Los elementos están en **tensión o en compresión**, o, bajo ciertas condiciones, no soportan ninguna fuerza.



[1]

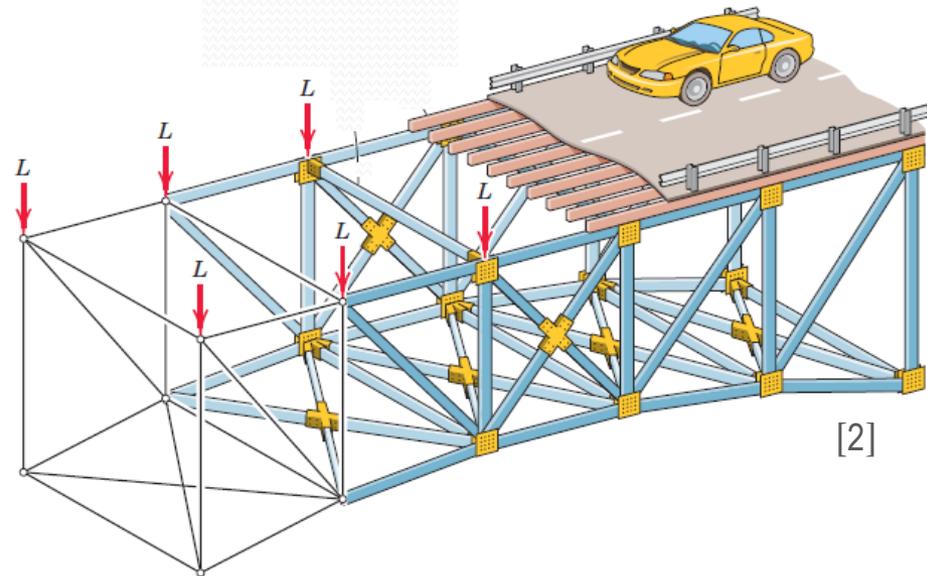
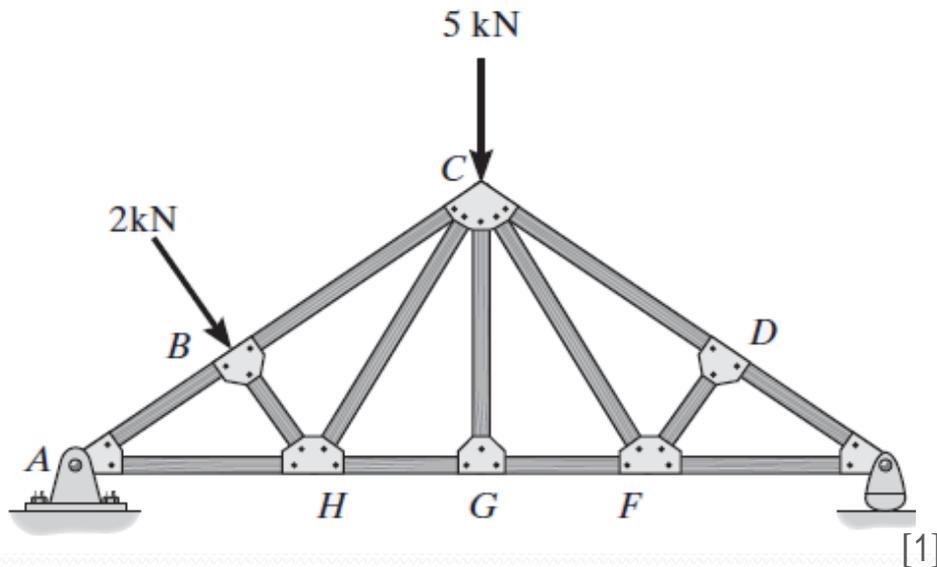


[2]

8.2 Armadura

Hipótesis

1. Todas la cargas actúan sobre los **nudos**
2. Los nudos están formados por **pasadores lisos**.
3. Todos los miembros actúan como un **miembro de dos fuerza**.



8.2 Armadura

Hipótesis

1. Todas la cargas actúan sobre los **nudos**
 2. Los nudos están formados por **pasadores lisos**.
 3. Todos los miembros actúan como **miembros de dos fuerzas**.
- Se considera que las **fuerzas externas y las reacciones** en los apoyos **actúan solamente sobre los nudos**.
 - El **peso** de los elemento es generalmente **despreciable** en comparación a las fuerzas externas.
 - De considerarse el **peso propio** de algún elemento, éste deberá ser **repartido** en partes iguales **entre sus extremos**.

8.2 Armadura

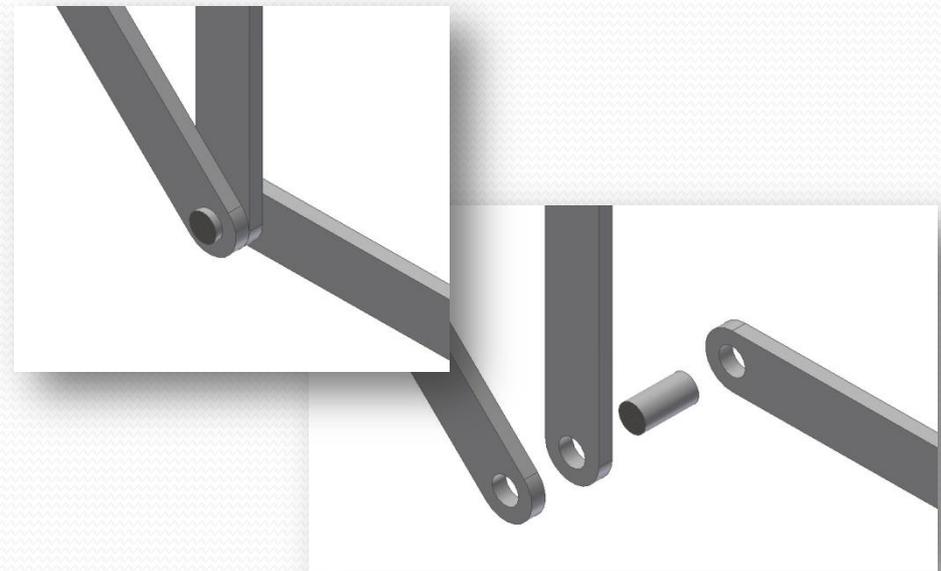
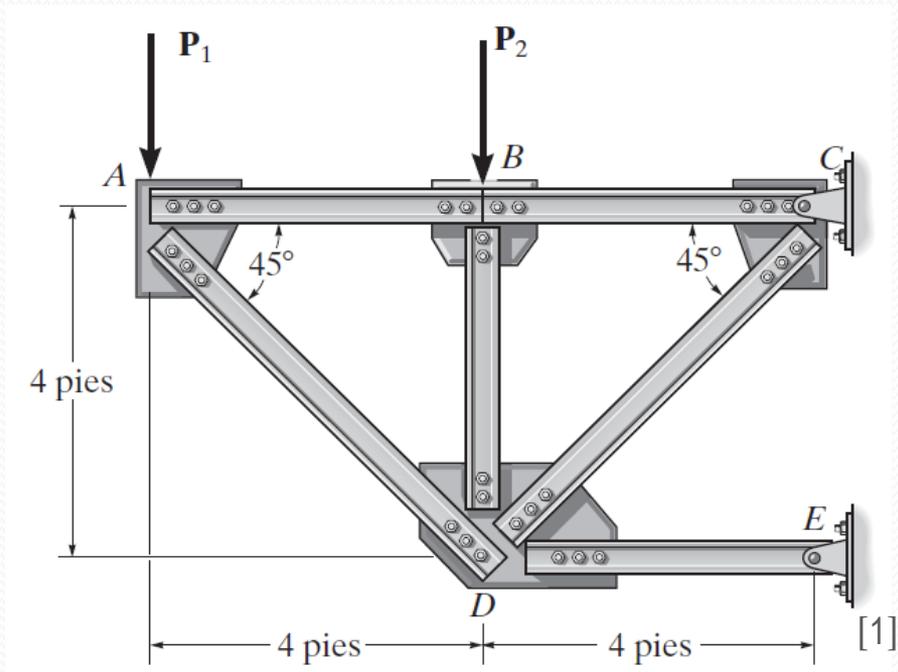
Hipótesis

1. Todas la cargas actúan sobre los **nudos**
 2. Los nudos están formados por **pasadores lisos**.
 3. Todos los miembros actúan como **miembros de dos fuerzas**.
- Los nudos son los **puntos de conexión** que están formados por: **pasadores o placas de unión común soldadas o atornilladas**.
 - La armadura que está conformada por **placas de unión común** no cumplen estrictamente con poseer elementos sometidos únicamente a tracción y compresión, sin embargo, se puede conseguir resultados satisfactorios (esfuerzos) suponiendo que los nudos **son pasadores**.

8.2 Armadura

Hipótesis

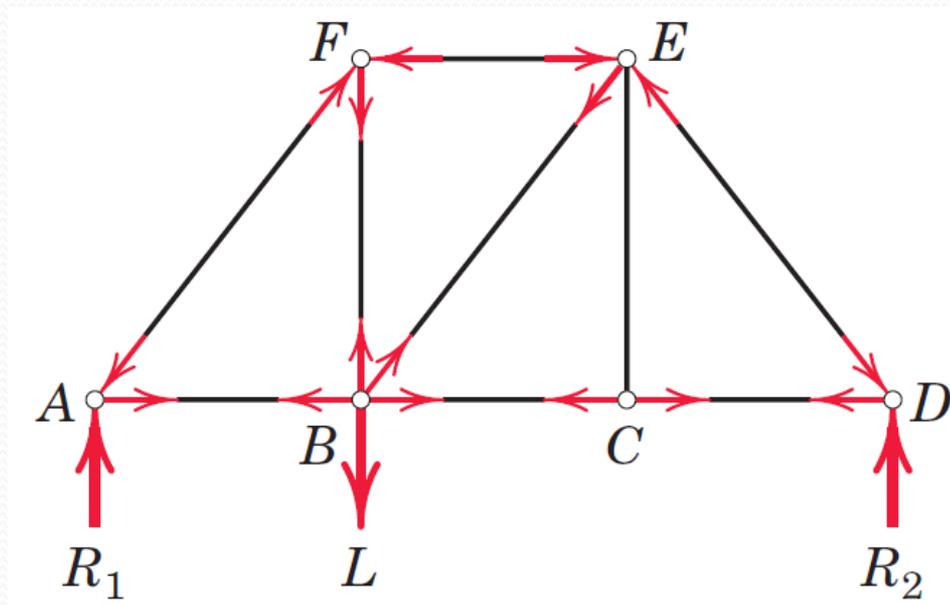
1. Todas la cargas actúan sobre los nudos
2. Los nudos están formados por **pasadores lisos**.
3. Todos los miembros actúan como miembros de dos fuerzas.



8.2 Armadura

Hipótesis

1. Todas la cargas actúan sobre los nudos
2. Los nudos están formados por pasadores lisos.
3. Todos los miembros actúan como **miembros de dos fuerzas**.



[2]

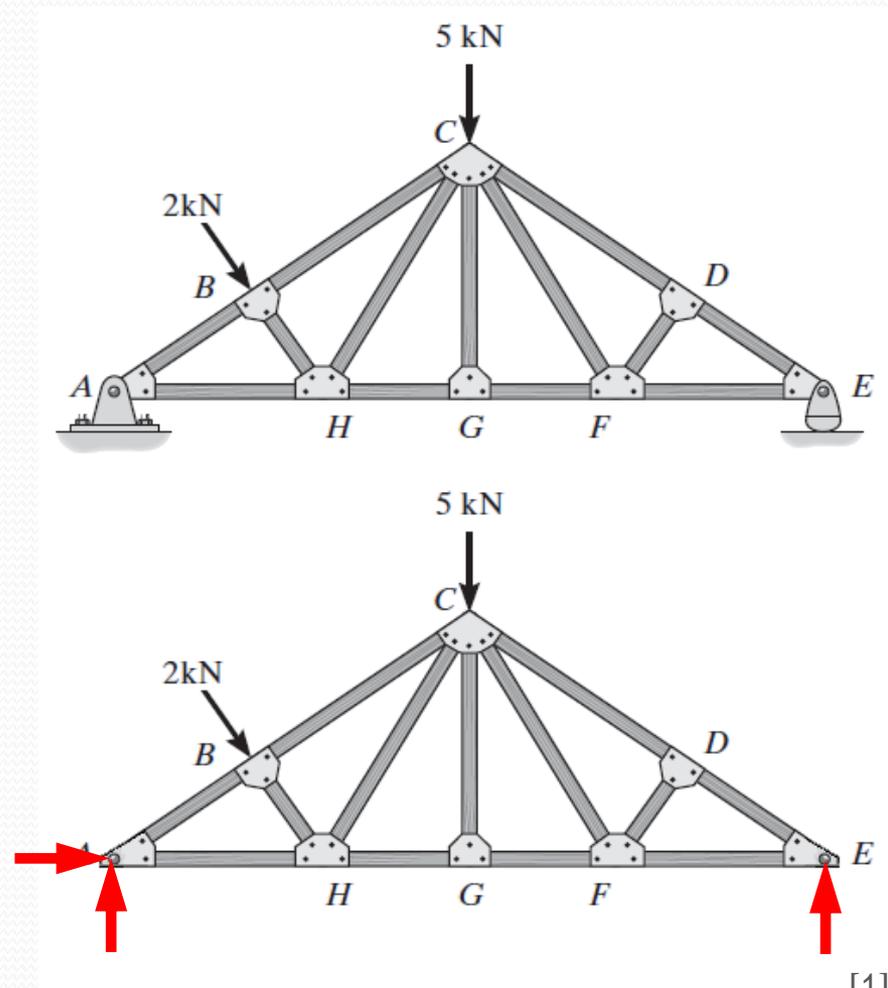
8.2.1

Estabilidad y

Determinación estática externas

8.2.1 Estabilidad y Determinación estática externas

- Una estructura es estable externamente si está **adecuadamente restringida** por sus apoyos.
- El análisis de estabilidad requiere elaborar el DCL del conjunto y sustituir los apoyos por reacciones obteniendo tantas incógnitas como **reacciones r** .
- La relación entre las **$q = 3$ ecuaciones de equilibrio (2D)** y las r reacciones establece el criterio de estabilidad externa.



8.1 Estabilidad y Determinación estática externas

Condición	Sistema externo	Estabilidad externa	Determinación estática externa
$r < q$	Hipostático	Inestable	---
$r = q$	Isostático	Estable	Estáticamente determinado
$r > q$	Hiperestático	Estable	Estáticamente indeterminado

Si una armadura coplanar alcanza la estabilidad externa, debe garantizarse que sus reacciones **no sean concurrentes en un punto o paralelas.**

8.2.1 Estabilidad y Determinación estática externas

Condición	Sistema externo	Estabilidad externa	Grado de libertad/indeterminación externo
$r < q$	Hipostático	Inestable	$GL = q - r$
$r = q$	Isostático	Estable	---
$r > q$	Hiperestático	Estable	$GI = r - q$

Si una armadura coplanar alcanza la estabilidad externa, debe garantizarse que sus reacciones **no sean concurrentes en un punto o paralelas.**

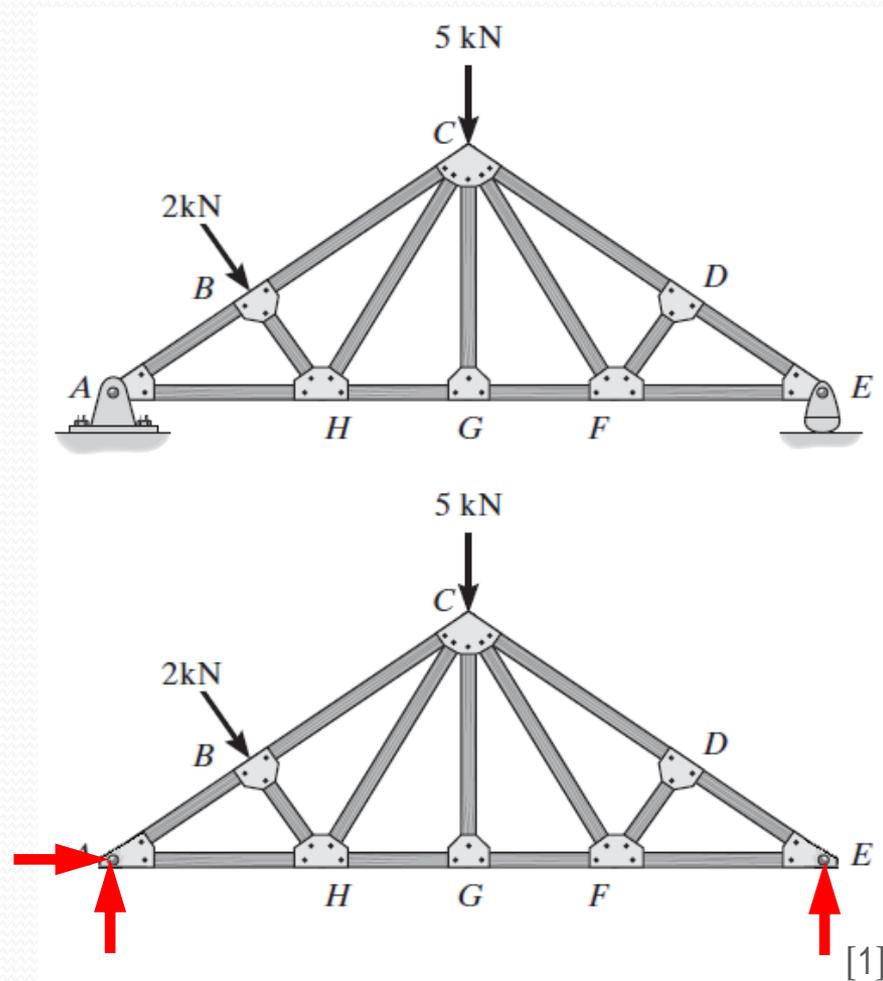
8.2.2

Estabilidad y

Determinación estática internas

8.2.2 Estabilidad y Determinación estática internas

- Se dispone de dos ecuaciones de equilibrio por cada **nudo** n , entonces **$2n$ ecuaciones**.
- Cada **miembro** m de la armadura está sometido a una carga axial (incógnita interna) y el conjunto está restringido por **reacciones externas** r .
- La relación entre el número de **ecuaciones** $2n$, la cantidad de **miembros** m y el número r de **reacciones** establece el criterio de determinación estática interna.



8.2.2 Estabilidad y Determinación estática internas

Condición	Sistema interno	Estabilidad interna	Determinación estática interna
$r + m < 2n$	Hipostático	Inestable	---
$r + m = 2n$	Isostático	Estable	Estáticamente determinado
$r + m > 2n$	Hiperestático	Estable	Estáticamente indeterminado

Si se despeja m de la expresión (sistema isostático):

$$m = 2n - r$$

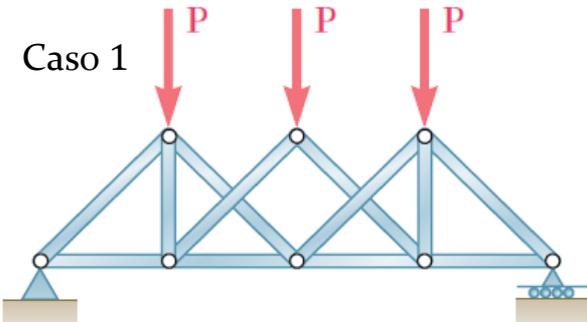
m representa el **número necesario de componentes** para obtener una armadura **estáticamente determinada en su interior**.

8.2.2 Estabilidad y Determinación estática internas

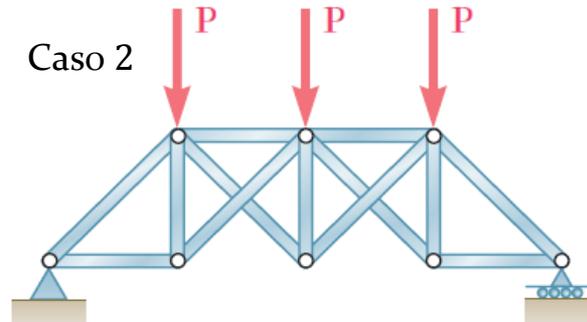
Condición	Sistema interno	Estabilidad interna	Determinación estática interna
$r + m < 2n$	Hipostático	Inestable	---
$r + m = 2n$	Isostático	Estable	Estáticamente determinado
$r + m > 2n$	Hiperestático	Estable	Estáticamente indeterminado

Si una armadura coplanar alcanza la estabilidad interna, debe garantizarse que sus reacciones **no sean concurrentes en un punto o paralelas.**

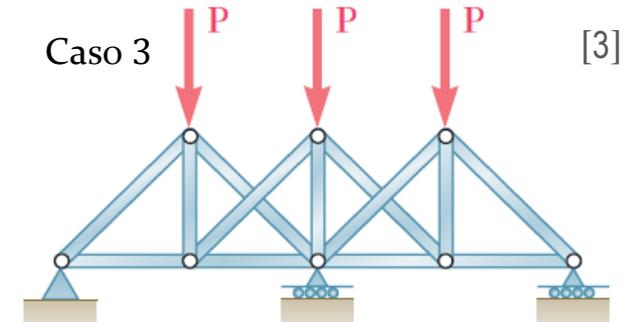
8.2.2 Estabilidad y Determinación estática



$$r = 3, m = 12, n = 8$$



$$r = 3, m = 13, n = 8$$

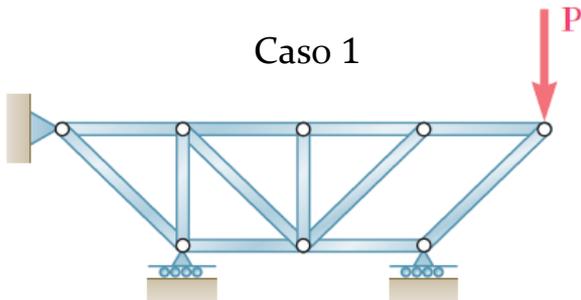


$$r = 4, m = 13, n = 8$$

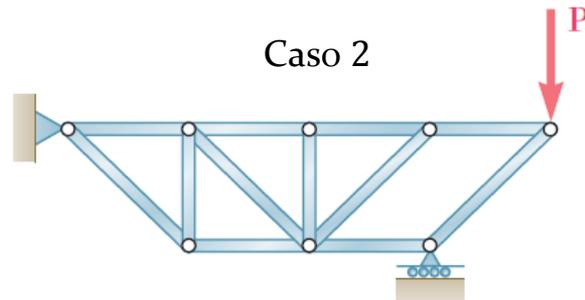
[3]

Caso	Condición	Sistema	Estabilidad	Determinación estática
Caso 1	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 12 < 2(8)$	Interno Hipostático	Inestable internamente	---
Caso 2	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 13 = 2(8)$	Interno Isostático	Estable internamente	Determinado internamente
Caso 3	$4 > 3$	Externo Hiperestático	Estable externamente	Indeterminado externamente
	$4 + 13 > 2(8)$	Interno Hiperestático	Estable internamente	Indeterminado internamente

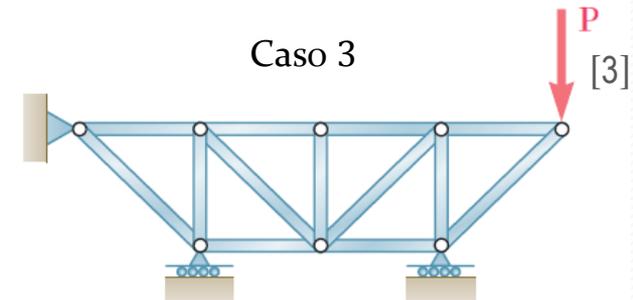
8.2.2 Estabilidad y Determinación estática



$$r = 4, m = 12, n = 8$$



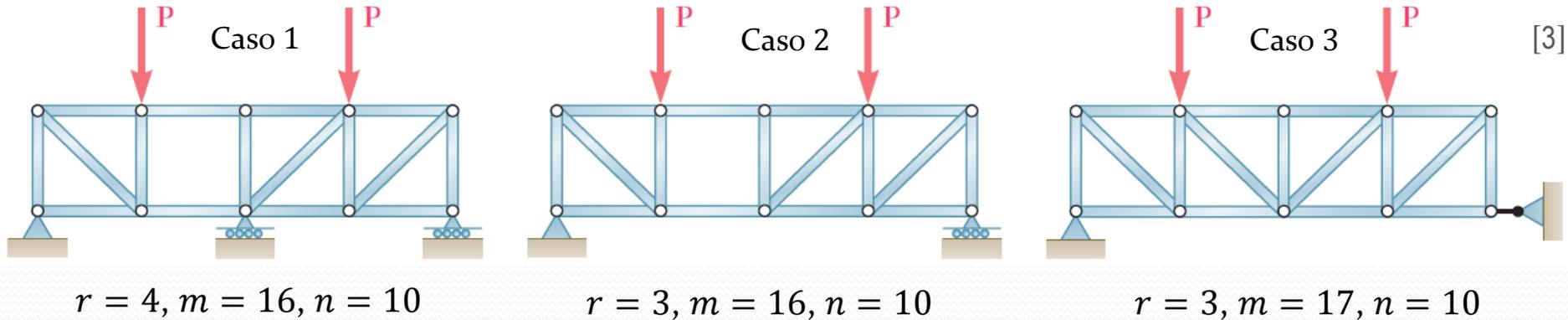
$$r = 3, m = 12, n = 8$$



$$r = 4, m = 13, n = 8$$

Caso	Condición	Sistema	Estabilidad	Determinación estática
Caso 1	$4 > 3$	Externo Hiperestático	Estable externamente	Indeterminado externamente
	$4 + 12 = 2(8)$	Interno Isostático	Estable internamente	Determinado internamente
Caso 2	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 12 < 2(8)$	Interno Hipostático	Inestable internamente	---
Caso 3	$4 > 3$	Externo Hiperestático	Estable externamente	Indeterminado externamente
	$4 + 13 > 2(8)$	Interno Hiperestático	Estable internamente	Indeterminado externamente

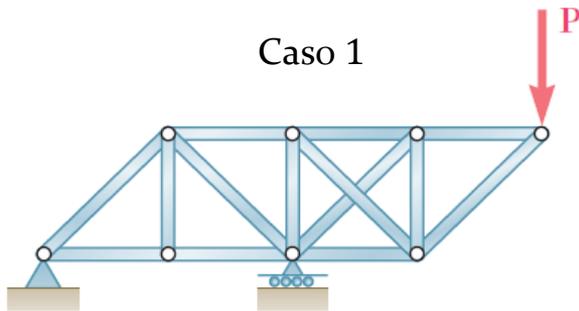
8.2.2 Estabilidad y Determinación estática



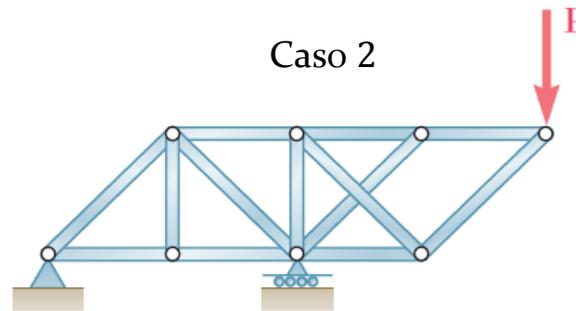
Caso	Condición	Sistema	Estabilidad	Determinación estática
Caso 1	$4 > 3$	Externo Hiperestático	Estable externamente	Indeterminado externamente
	$4 + 16 = 2(10)$	Interno Isostático	Estable internamente	Determinado internamente
Caso 2	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 16 < 2(10)$	Interno Hipostático	Inestable internamente	---
Caso 3	$3 = 3$	Externo Isostático	Inestable externamente(*)	---
	$3 + 17 = 2(10)$	Interno Isostático	Inestable internamente(*)	---

(*) Las reacciones concurren en un punto.

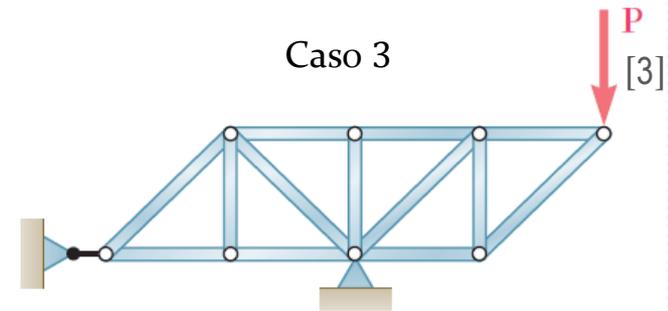
8.2.2 Estabilidad y Determinación estática



$$r = 3, m = 14, n = 8$$



$$r = 3, m = 13, n = 8$$



$$r = 3, m = 13, n = 8$$

Caso	Condición	Sistema	Estabilidad	Determinación estática
Caso 1	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 14 > 2(8)$	Interno Hiperestático	Estable internamente	Indeterminado internamente
Caso 2	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 13 = 2(8)$	Interno Isostático	Estable internamente	Determinado internamente
Caso 3	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 13 = 2(8)$	Interno Isostático	Inestable internamente(*)	---

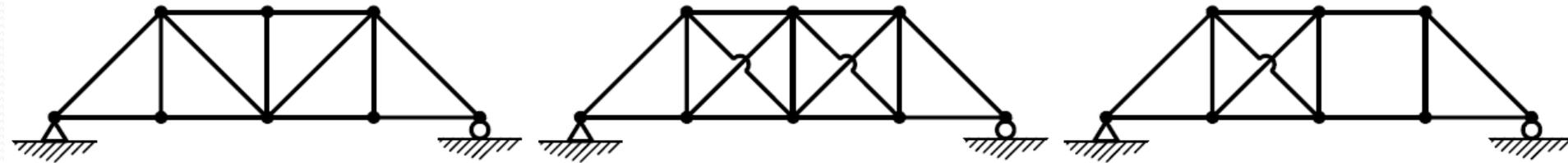
(*) Las reacciones son concurrentes en un punto.

8.2.2 Estabilidad y Determinación estática

Caso 1

Caso 2

Caso 3



$$r = 3, m = 13, n = 8$$

$$r = 3, m = 15, n = 8$$

$$r = 3, m = 13, n = 8$$

Caso	Condición	Sistema	Estabilidad	Determinación estática
Caso 1	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 13 = 2(8)$	Interno Isostático	Estable internamente	Determinado internamente
Caso 2	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 15 > 2(8)$	Interno Hiperestático	Estable internamente	Indeterminado internamente
Caso 3	$3 = 3$	Externo Isostático	Estable externamente	Determinado externamente
	$3 + 13 = 2(8)$	Interno Isostático	Inestable internamente(*)	---

(*) Existe inestabilidad geométrica debido a la falta de un miembro diagonal.

8.2.3

El método de los nudos

8.2.3 El método de los nudos

Objetivo

Analizar la armadura y determinar la **fuerza de cada uno** de los miembros.

**Equilibrio
(C. Rígido)**

**Toda la
armadura**



- **Reacciones de los apoyos
(fuerzas externas)**
- **No se puede determinar las fuerzas (T o C)
de los miembros
(fuerzas internas)**

**Equilibrio
(Partícula)**

Cada nudo



**Fuerzas (T o C) de cada uno de los
miembros
(fuerzas externas)**

8.2.3 El método de los nudos

Procedimiento

1. DCL de toda la armadura

- Determinar **las reacciones** de los apoyos.

2. DCL de los nudos

- La línea de acción de cada fuerza es determinada por la **geometría** de la armadura (alineada con cada miembro).
- El equilibrio de un nudo se trata como el equilibrio de una partícula: **dos ecuaciones - dos incógnitas**.
- Las fuerzas desconocidas pueden ser asumidas en **tracción**. En caso de obtener un valor negativo, se puede afirmar que dicha fuerza es de **compresión**.

8.2.3 El método de los nudos

Procedimiento

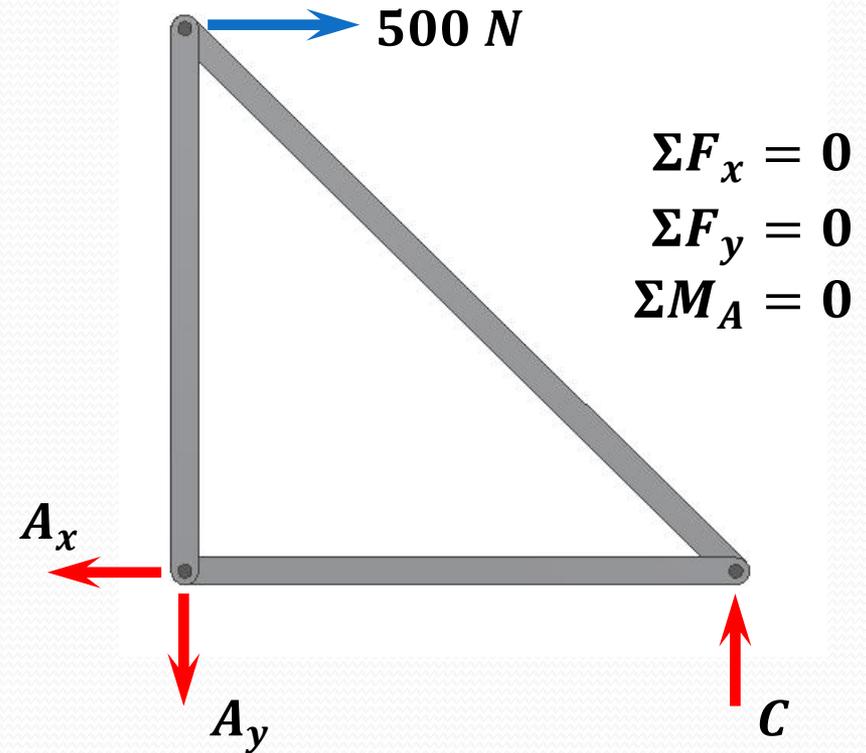
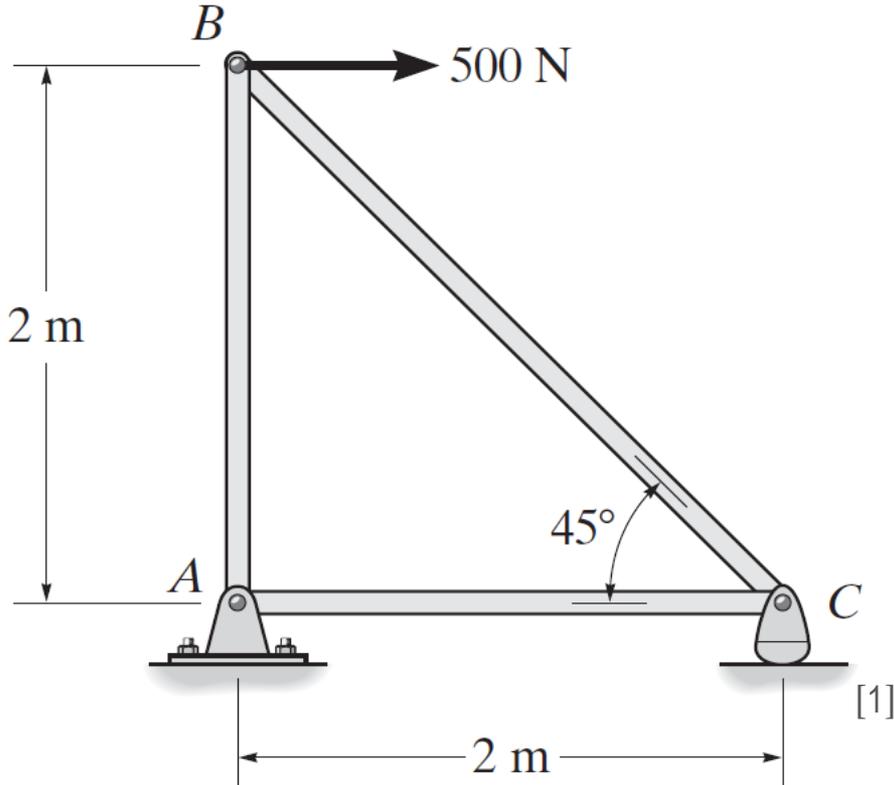
3. Simetría

- Analizar la **simetría** (en forma y en carga). Si la armadura es simétrica, se resuelve solo la mitad.
- Al final suele quedar un nudo con fuerzas conocidas llamado nudo de comprobación.

8.2.3 El método de los nudos

1. DCL de toda la armadura

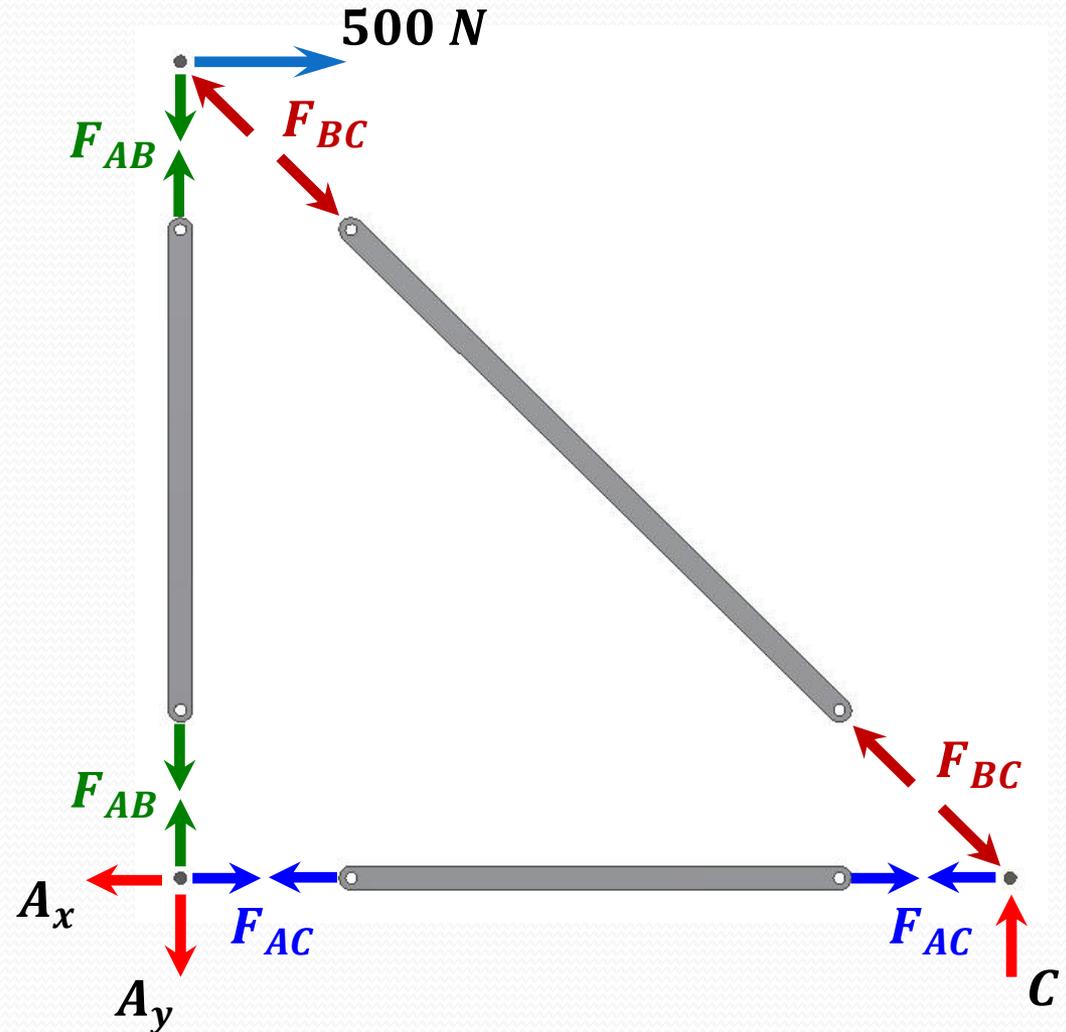
- Determinar las **reacciones** de los apoyos.



8.2.3 El método de los nudos

2. DCL de los nudos

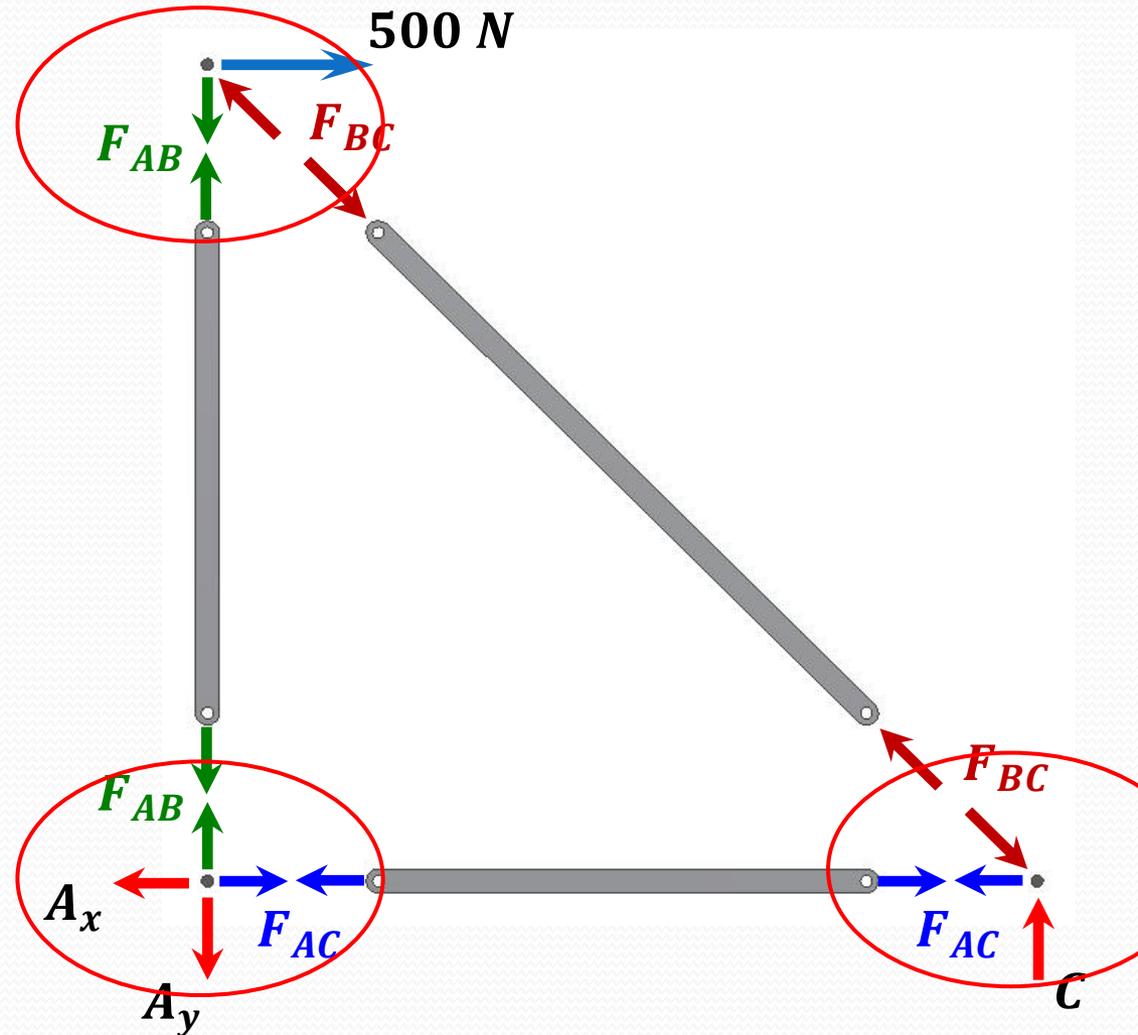
- Línea de acción de cada fuerza es determinada por la **geometría** de la armadura



8.2.3 El método de los nudos

2. DCL de los nudos

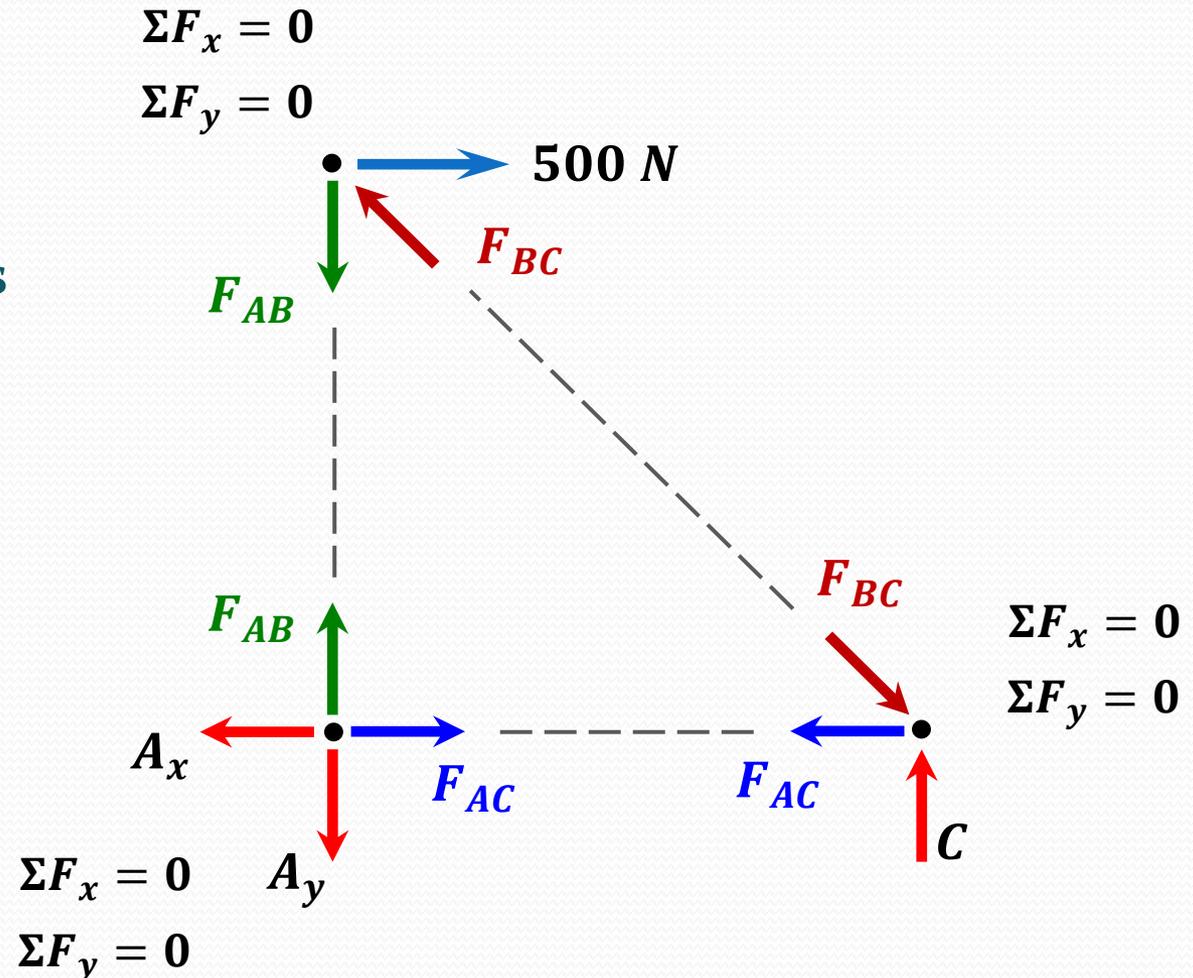
- Equilibrio de una partícula: **dos incógnitas** \leftrightarrow **dos ecuaciones**



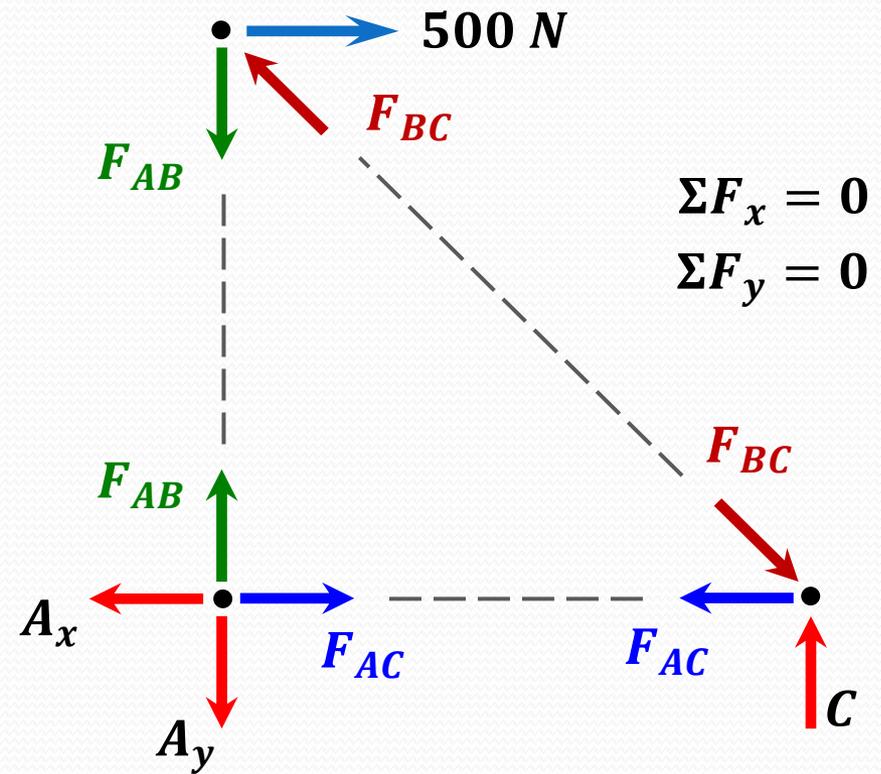
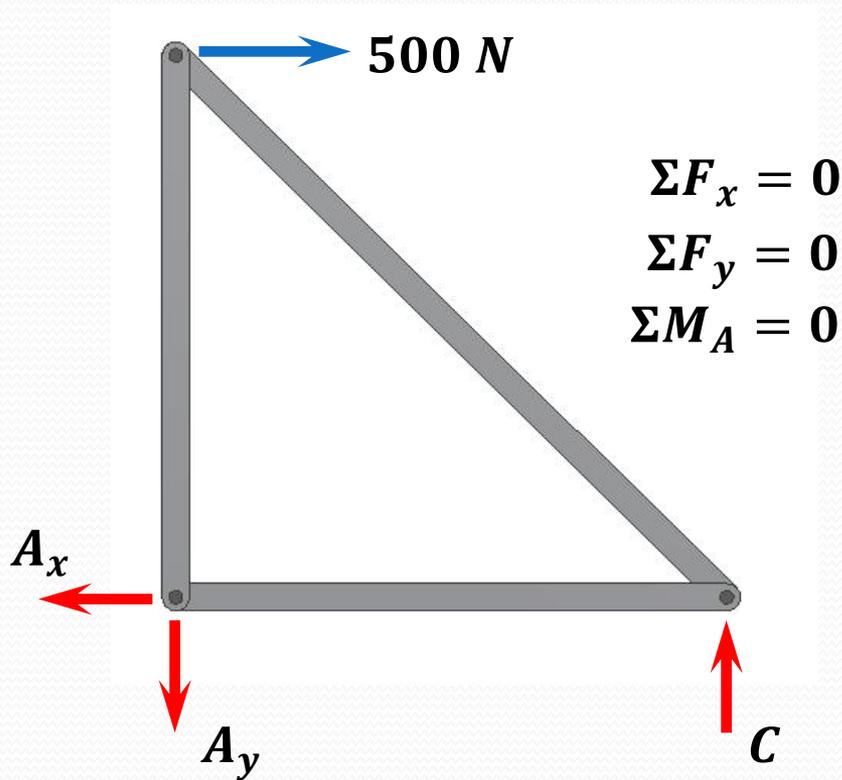
8.2.3 El método de los nudos

2. DCL de los nudos

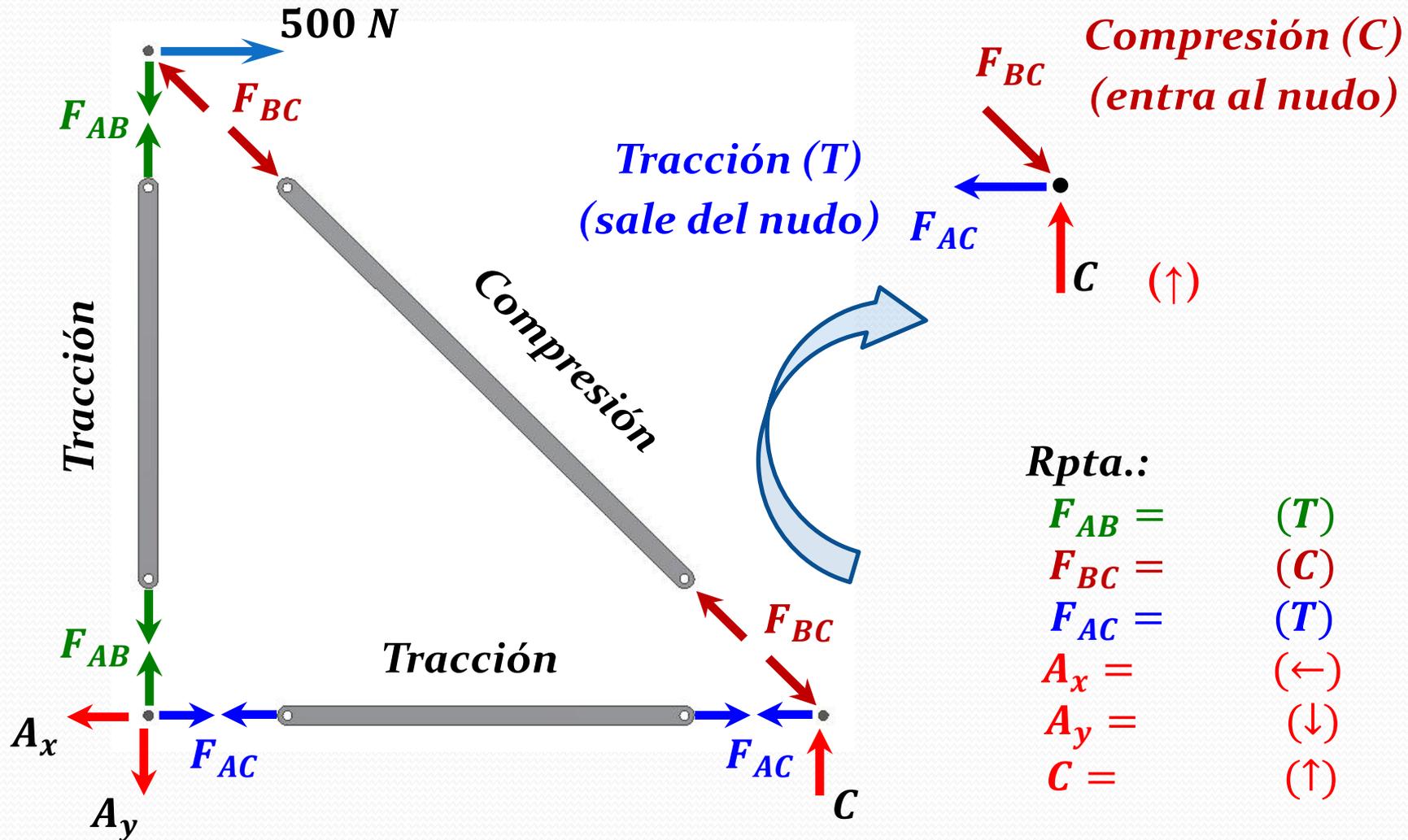
- Equilibrio de una partícula: **dos incógnitas** \leftrightarrow **dos ecuaciones**



8.2.3 El método de los nudos



8.2.3 El método de los nudos



8.2.4

Miembros de fuerza cero

8.2.4 Miembros de fuerza cero

Los **miembros de fuerza cero** son aquellos que **no soportan carga** y pueden ser detectados por **inspección** y se representan en dos casos:

Caso 1:

*“Si **dos miembros** que forman un nudo y **ninguna** carga externa o reacción de algún apoyo es aplicada al mismo nudo, **ambos** miembros tendrán **carga cero**”.*

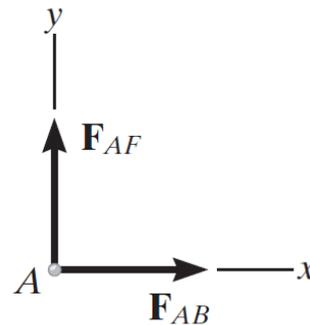
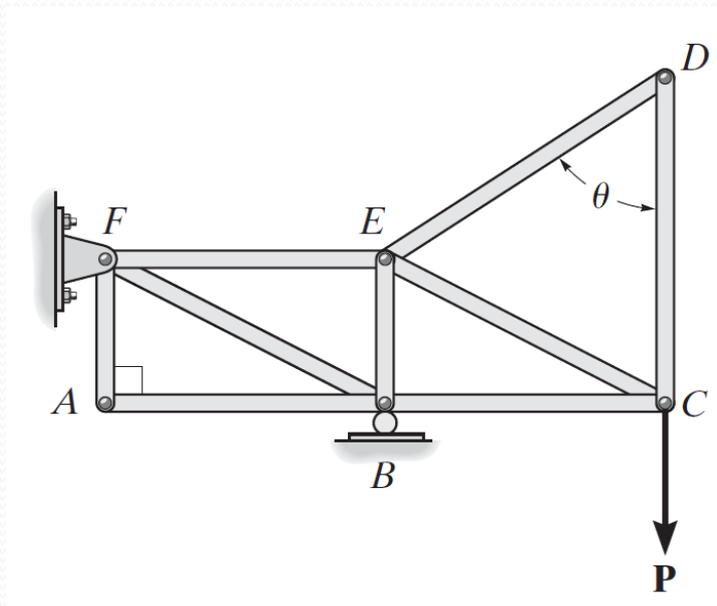
Caso 2:

*“Si de **tres miembros** que forman un nudo, **dos de ellos son colineales** y **ninguna** carga externa o reacción de soporte es aplicada al mismo nudo, el **tercer** miembro es de **fuerza cero**”.*

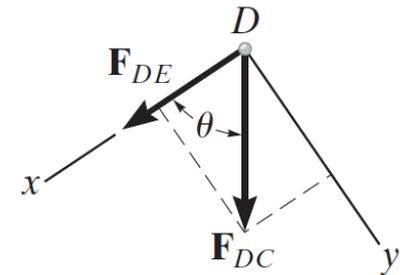
8.2.4 Miembros de fuerza cero

Caso 1:

“Si **dos miembros** que forman un nudo y **ninguna** carga externa o reacción de algún apoyo es aplicada al mismo nudo, **ambos** miembros tendrán **carga cero**”.



$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; F_{AB} = 0 \\ \uparrow \Sigma F_y &= 0; F_{AF} = 0 \end{aligned}$$



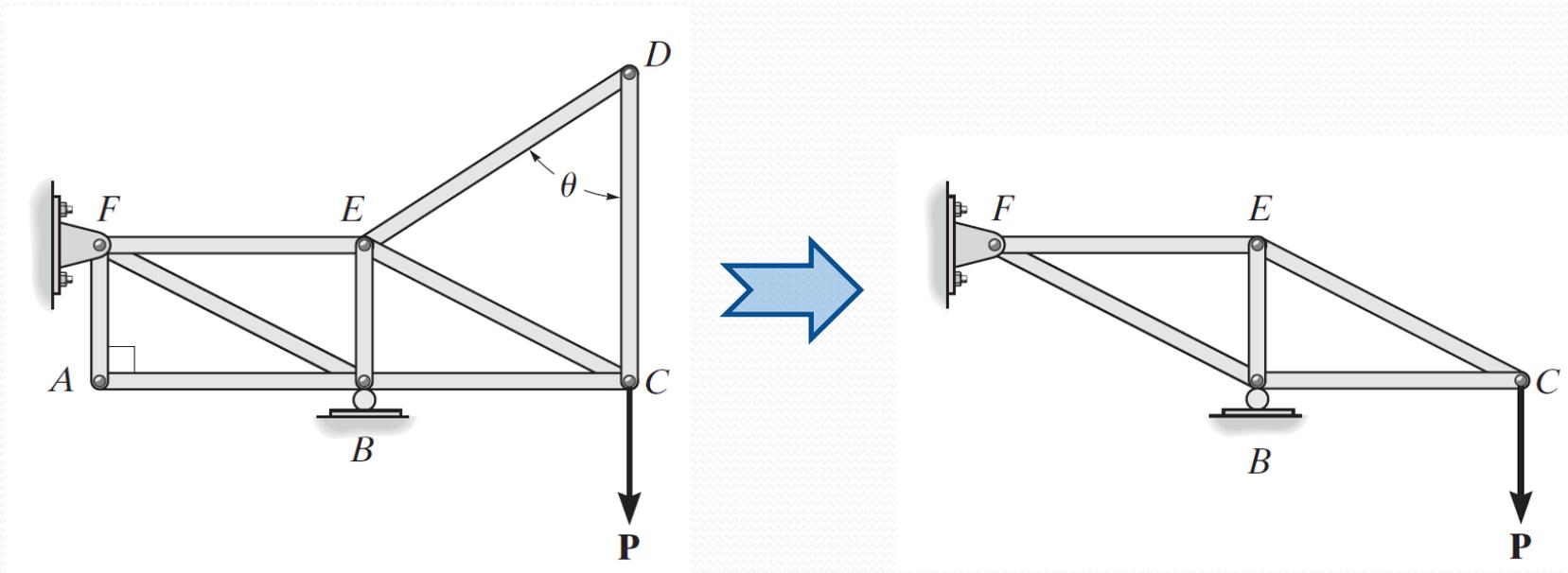
$$\begin{aligned} + \searrow \Sigma F_y &= 0; F_{DC} \sin \theta = 0; F_{DC} = 0 \\ + \swarrow \Sigma F_x &= 0; F_{DE} + 0 = 0; F_{DE} = 0 \end{aligned}$$

[1]

8.2.4 Miembros de fuerza cero

Caso 1:

“Si **dos miembros** que forman un nudo y **ninguna** carga externa o reacción de algún apoyo es aplicada al mismo nudo, **ambos** miembros tendrán **carga cero**”.

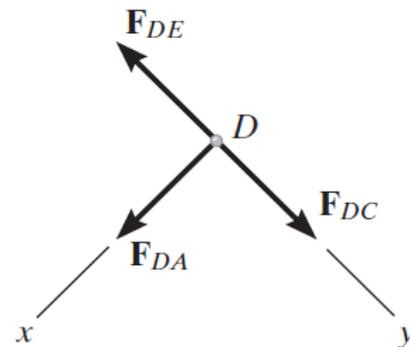
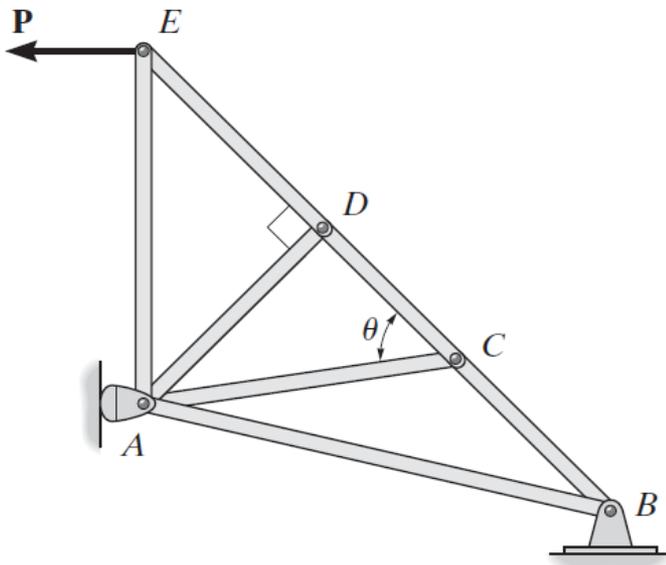


[1]

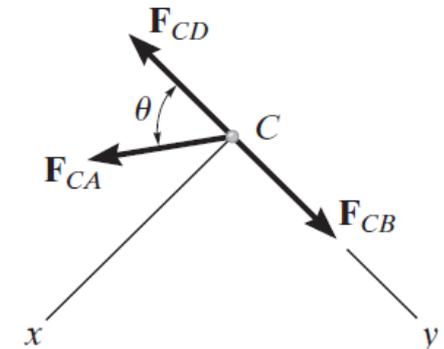
8.2.4 Miembros de fuerza cero

Caso 2:

“Si de *tres miembros* que forman un nudo, *dos de ellos son colineales* y *ninguna carga externa* o reacción de soporte es aplicada al mismo nudo, el *tercer miembro es de fuerza cero*”.



$$\begin{aligned}
 +\curvearrowleft \Sigma F_x &= 0; & F_{DA} &= 0 \\
 +\curvearrowright \Sigma F_y &= 0; & F_{DC} &= F_{DE}
 \end{aligned}$$

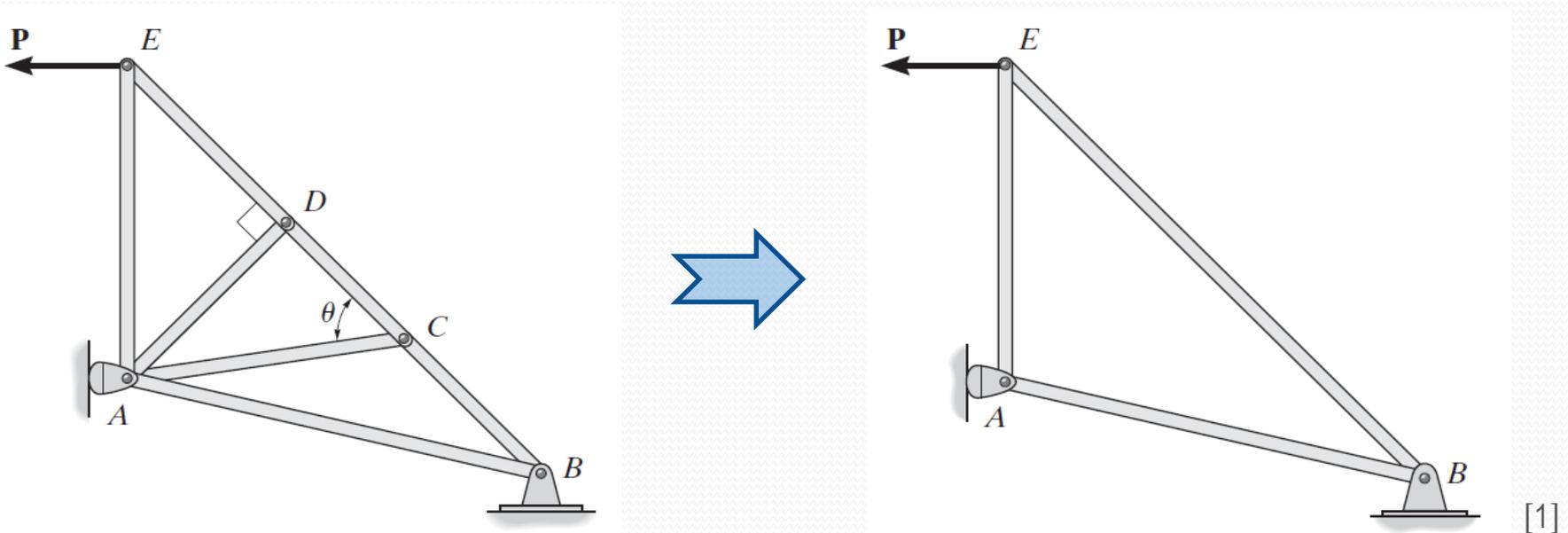


$$\begin{aligned}
 +\curvearrowleft \Sigma F_x &= 0; & F_{CA} \sin \theta &= 0; & F_{CA} &= 0 \\
 +\curvearrowright \Sigma F_y &= 0; & F_{CB} &= F_{CD}
 \end{aligned}
 \quad [1]$$

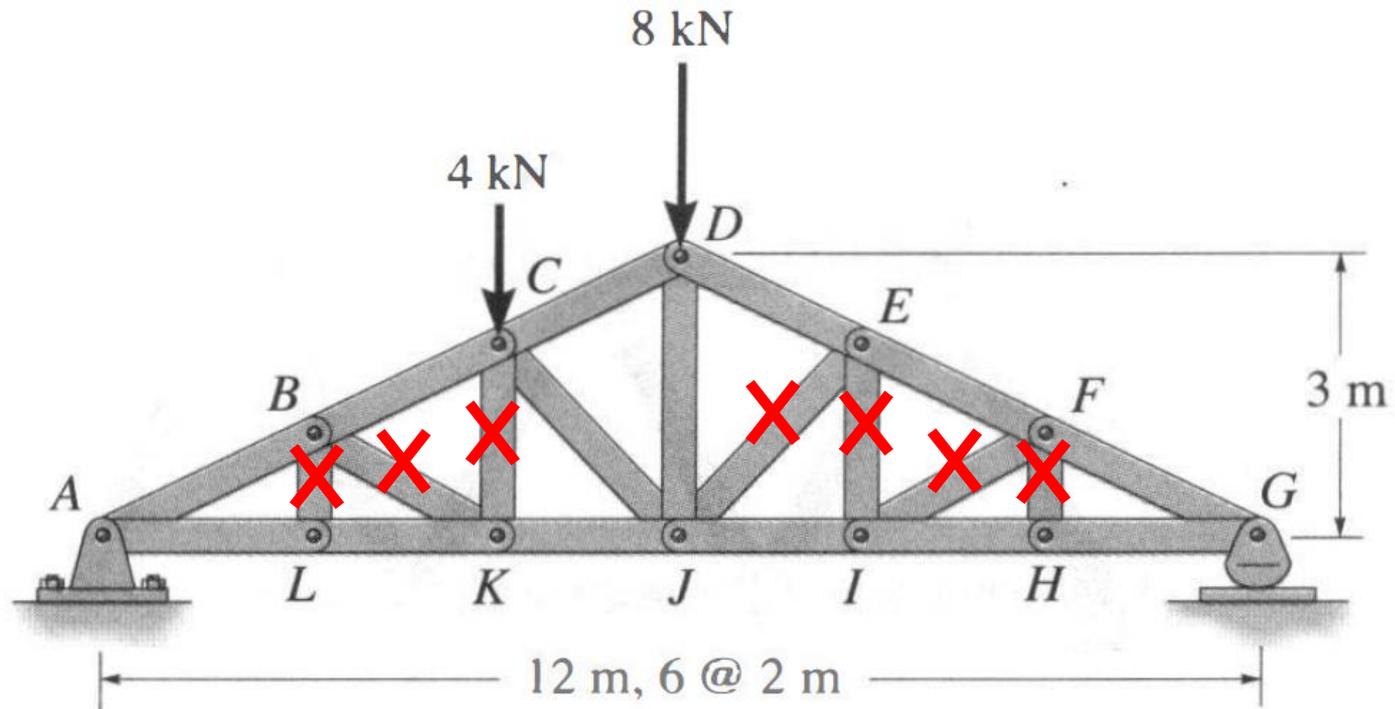
8.2.4 Miembros de fuerza cero

Caso 2:

“Si de *tres miembros* que forman un nudo, *dos de ellos son colineales* y *ninguna carga externa o reacción de soporte es aplicada al mismo nudo*, el *tercer miembro* es de *fuerza cero*”.



8.2.4 Miembros de fuerza cero

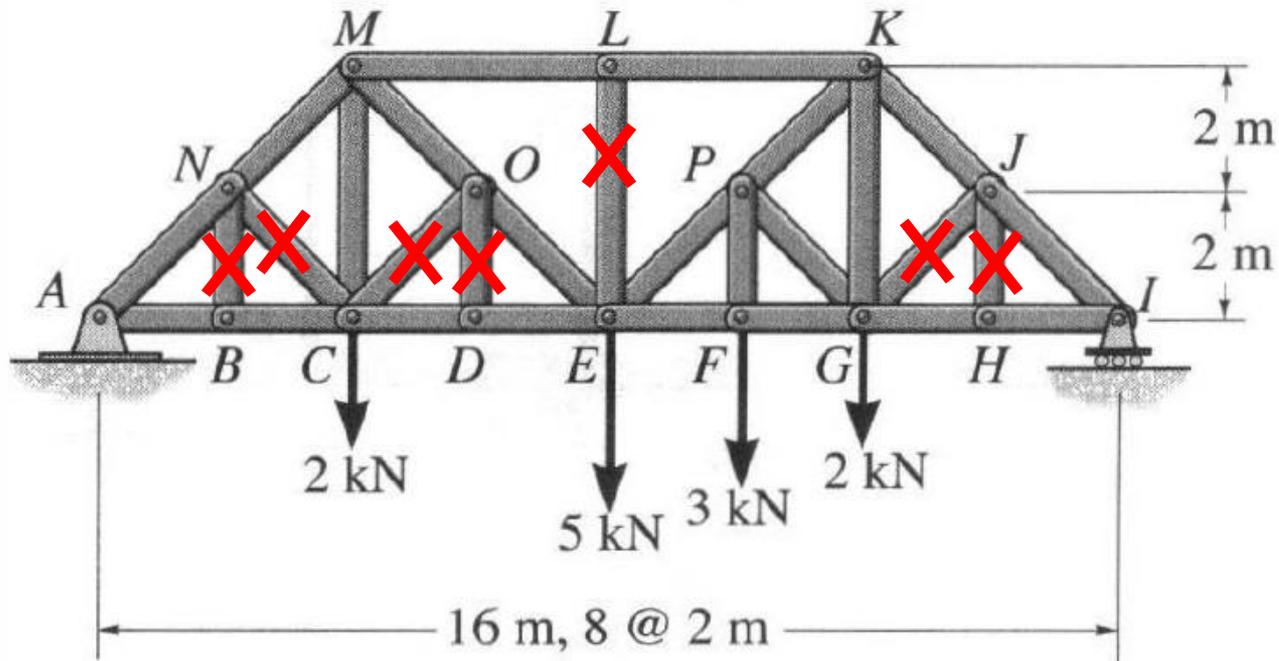


Caso 1: ---

Caso 2: LB, BK, KC, HF, FI, IE, EJ

[4]

8.2.4 Miembros de fuerza cero



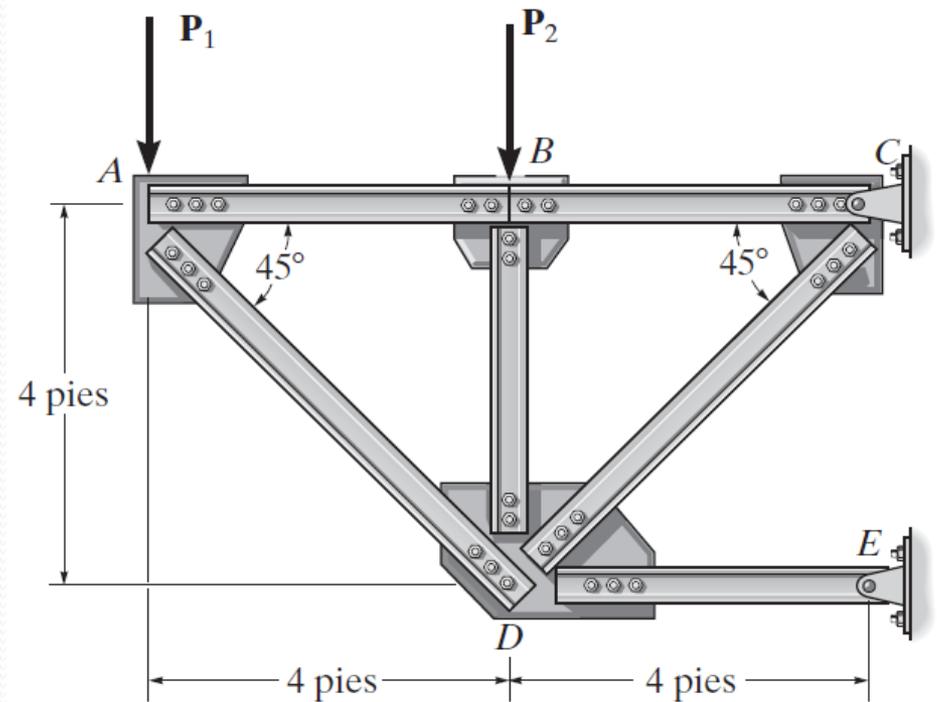
Caso 1: ---

Caso 2: BN, NC, DO, OC, LE, HJ, JG

[4]

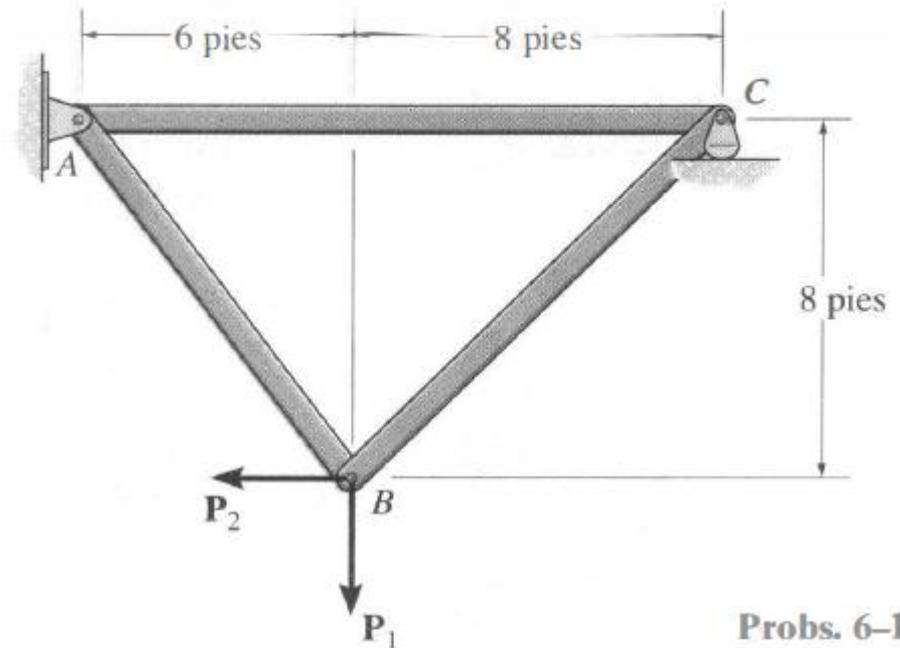
Ejercicios propuestos

6-3. La armadura, que se ha utilizado para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Aproxime cada nodo como un pasador y determine la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 800$ lb, $P_2 = 0$.



[1]

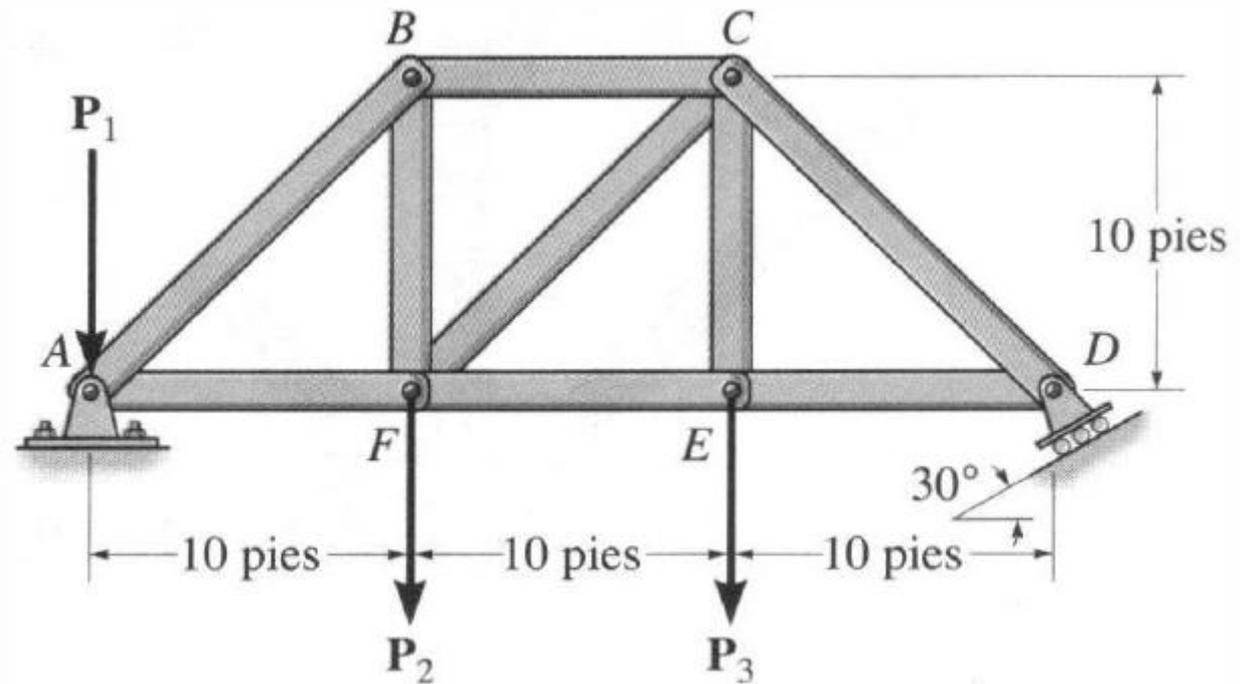
6-2. Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 500$ lb y $P_2 = 100$ lb.



[4]

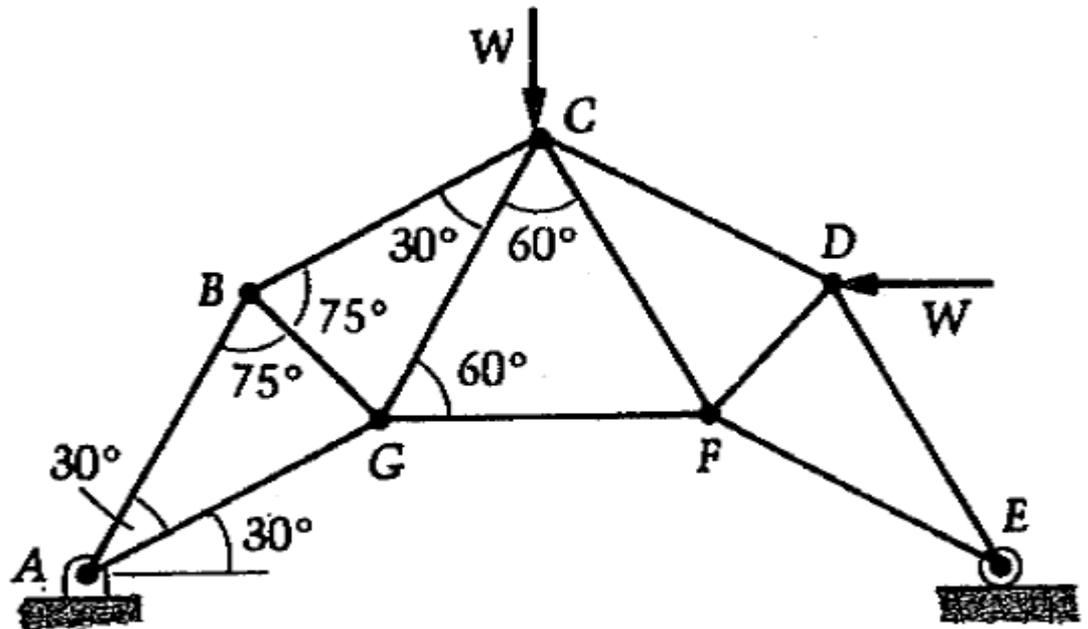
Determine la fuerza en cada miembro de la armadura y establezca si los miembros están en tensión o en compresión.

Considerar $P_1 = 100$ lb, $P_2 = 200$ lb, $P_3 = 300$ lb.



[4]

Hallar el máximo valor W , si las barras pueden soportar una tracción máxima de 8 kN y una compresión máxima de 6 kN. Considerar $GF=L=2m$



8.2.5

El método de las secciones

8.2.5 El método de las secciones

Objetivo

Analizar la armadura y determinar la **fuerza de algunos** de los miembros.

**Equilibrio
(C. Rígido)**



**Toda la
armadura**

- **Reacciones de los apoyos
(fuerzas externas)**
- **No se puede determinar las fuerzas (T o C)
de los miembros
(fuerzas internas)**

**Equilibrio
(C. Rígido)**



**Una de las partes
seccionadas**

**Fuerzas (T o C) de aquellas miembros
que han sido cortados
(fuerzas externas)**

8.2.5 El método de las secciones

Procedimiento

1. DCL de toda la armadura

- Determinar **las reacciones** de los apoyos (de los posibles).

2. DCL de las secciones

- Este método se basa en el principio de que si la armadura está en equilibrio, entonces **una parte de la armadura está también en equilibrio**.
- Para determinar las fuerzas dentro de los aquellos miembros de interés, se utiliza una **sección imaginaria** que los corta en dos partes.
- Las **fuerzas internas** de los miembros cortados son “**expuestas**” como fuerzas “externas”.

8.2.5 El método de las secciones

Procedimiento

2. DCL de las secciones

- La sección imaginaria corta en dos partes a la armadura, entonces se traza el DCL de cualquiera de sus **partes** y se aplican las **ecuaciones de equilibrio**.
- **Tratar** de seleccionar una sección que pase por **no más de tres miembros** de fuerzas sean desconocidas.
- Las ecuaciones de equilibrio deben ser aplicadas con cuidado de manera que den **una solución directa** para cada una de las incógnitas.

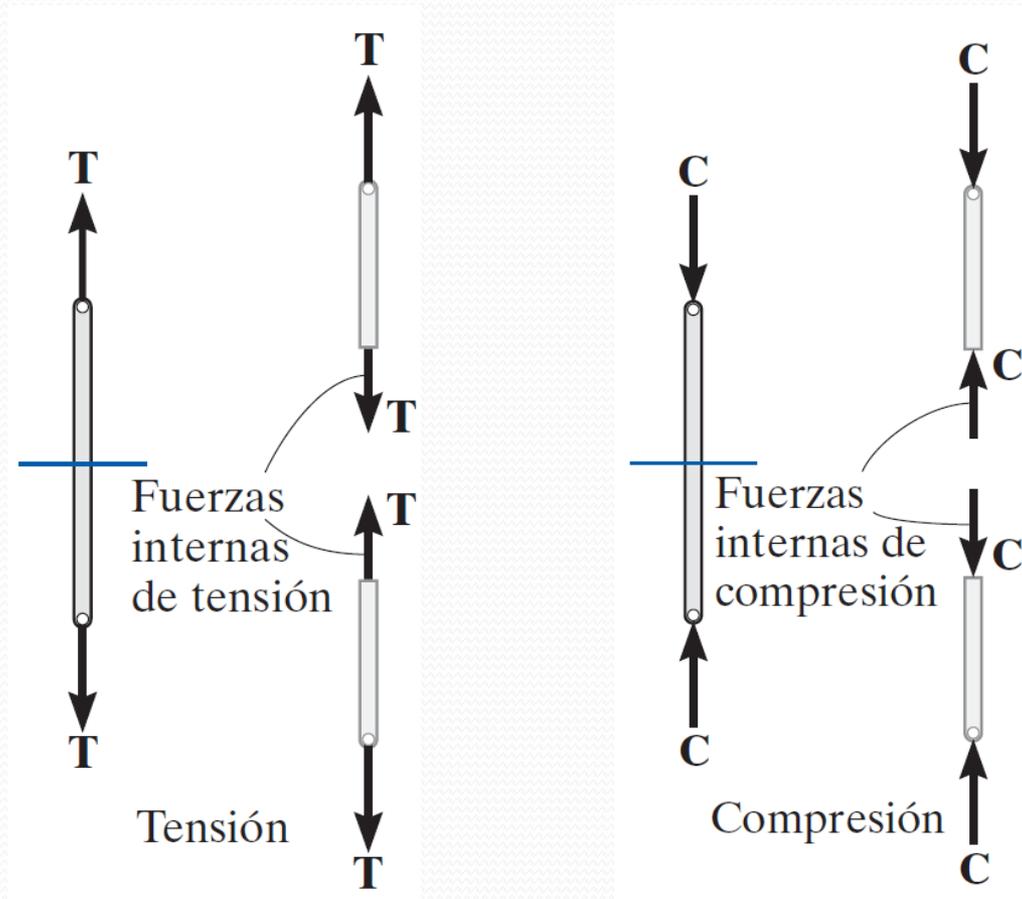
8.2.5 El método de las secciones

Procedimiento

2. DCL de las secciones

- Las fuerzas desconocidas pueden ser **asumidas en tracción**. En caso de obtener un **valor negativo**, se puede afirmar que dicha fuerza es de **compresión**.
- Es posible **combinar** ambos **métodos** para determinar las fuerzas internas de aquellos miembros de interés.

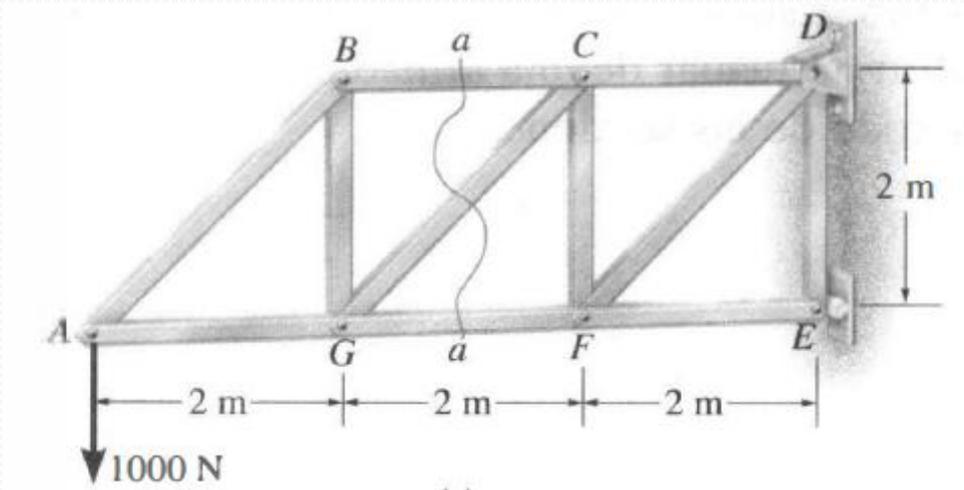
8.2.5 El método de las secciones



[1]

8.2.5 El método de las secciones

Determinar la fuerza en los miembros BC , CG y GF



$$\Sigma F_y = 0: \rightarrow D_y =$$

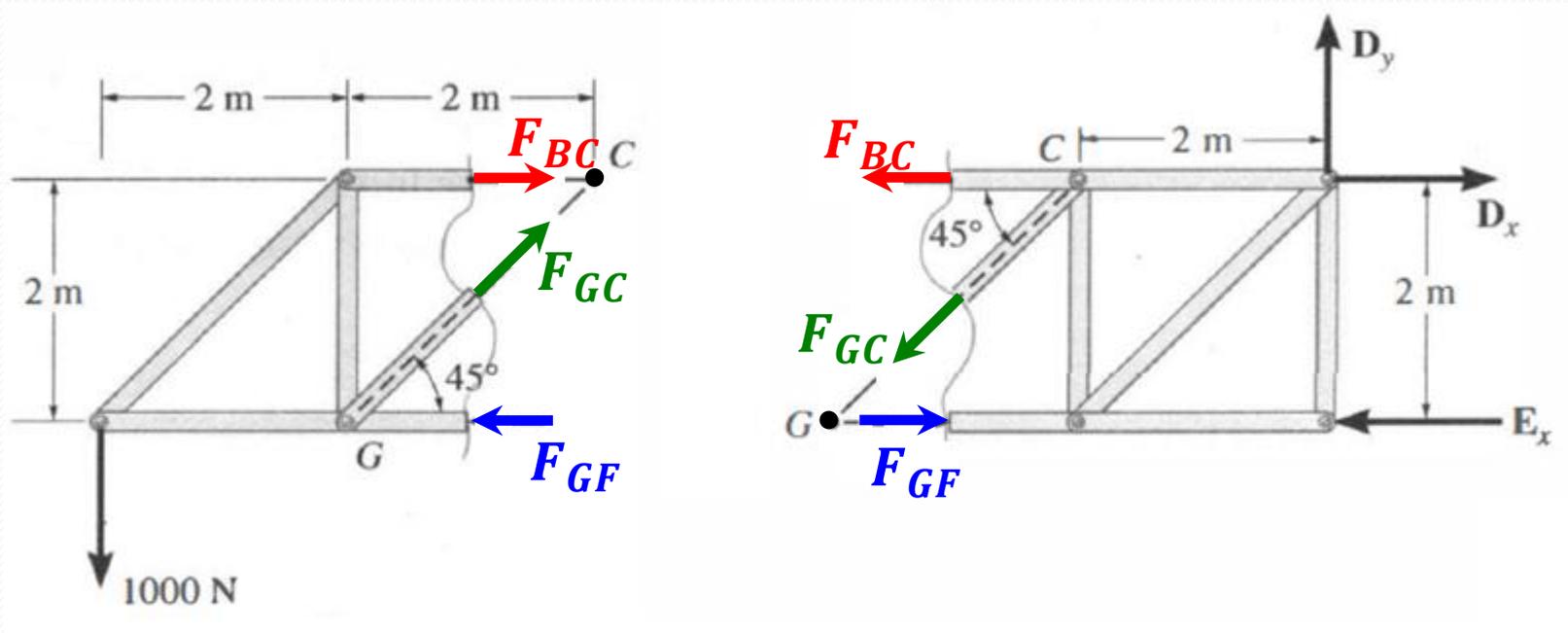
$$\Sigma M_E = 0: \rightarrow E_x =$$

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow D_x =$$

[1]

8.2.5 El método de las secciones

Determinar la fuerza en los miembros BC , CG y GF

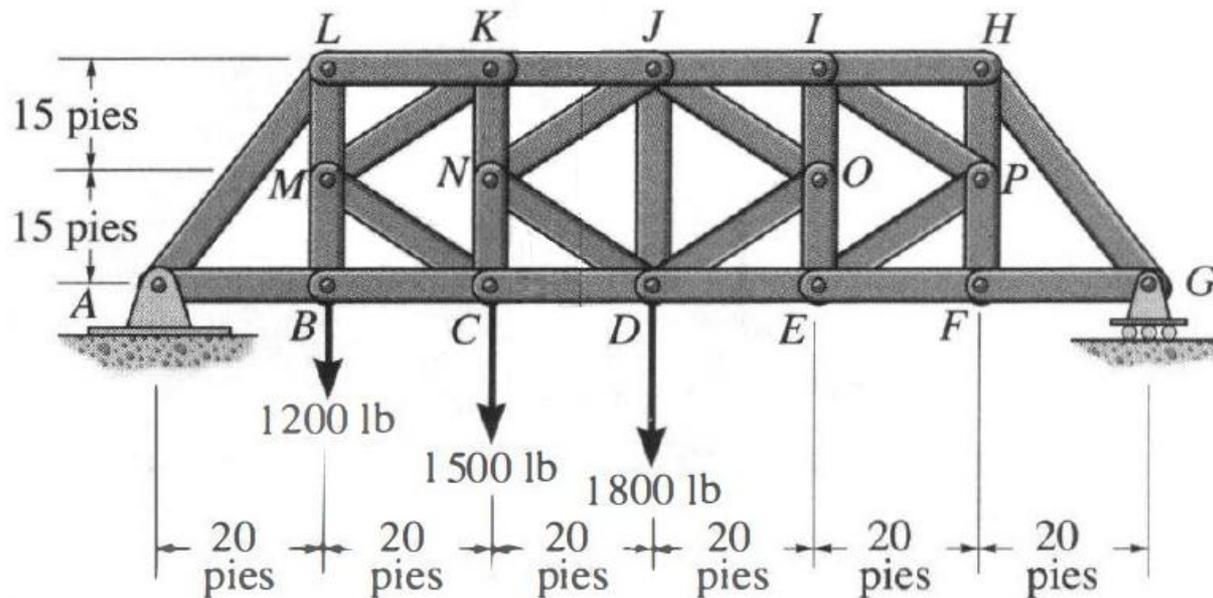


$$\Sigma M_C = 0: \rightarrow F_{GF} = \quad \Sigma M_G = 0: \rightarrow F_{BC} = \quad \Sigma F_y = 0: \rightarrow F_{GC} =$$

[1]

8.2.5 El método de las secciones

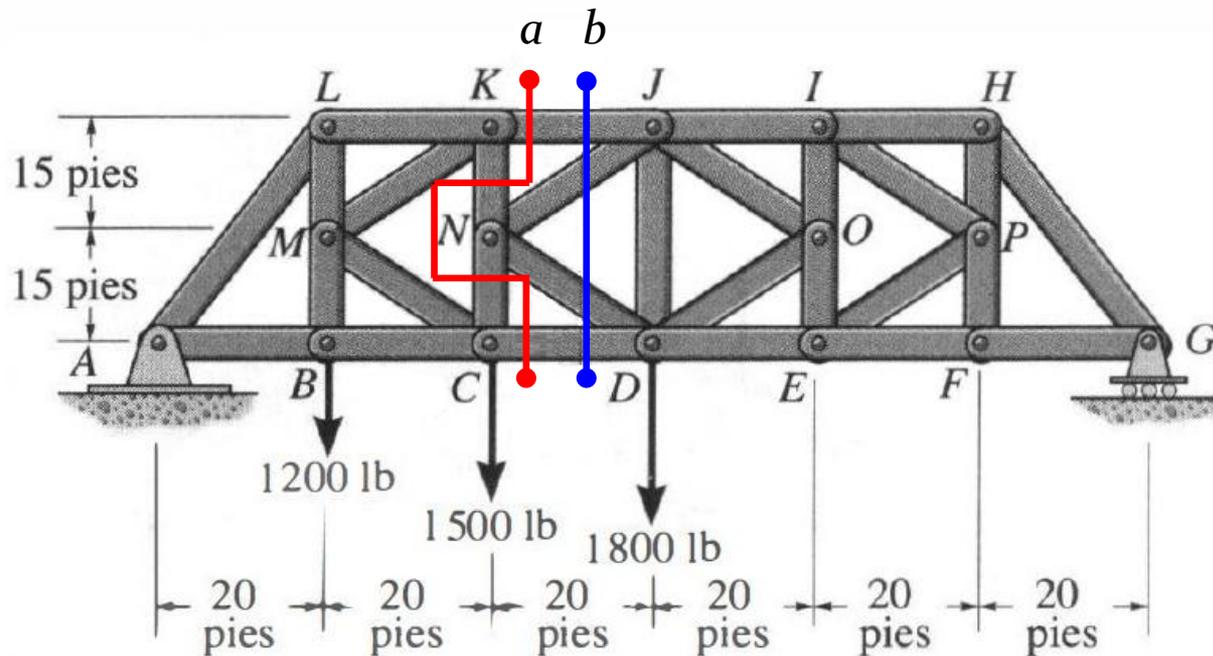
Determinar la fuerza en los miembros KJ , JN , ND y DC .



[4]

8.2.5 El método de las secciones

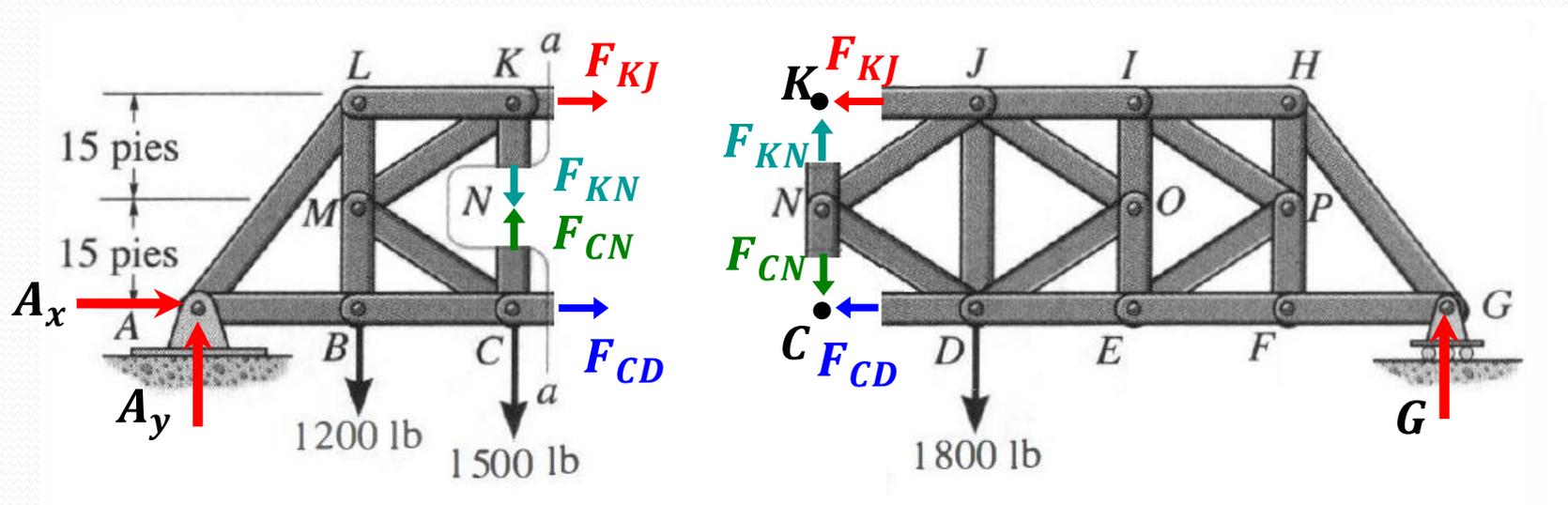
Determinar la fuerza en los miembros KJ , JN , ND y DC .



[4]

8.2.5 El método de las secciones

Determinar la fuerza en los miembros KJ , JN , ND y DC .

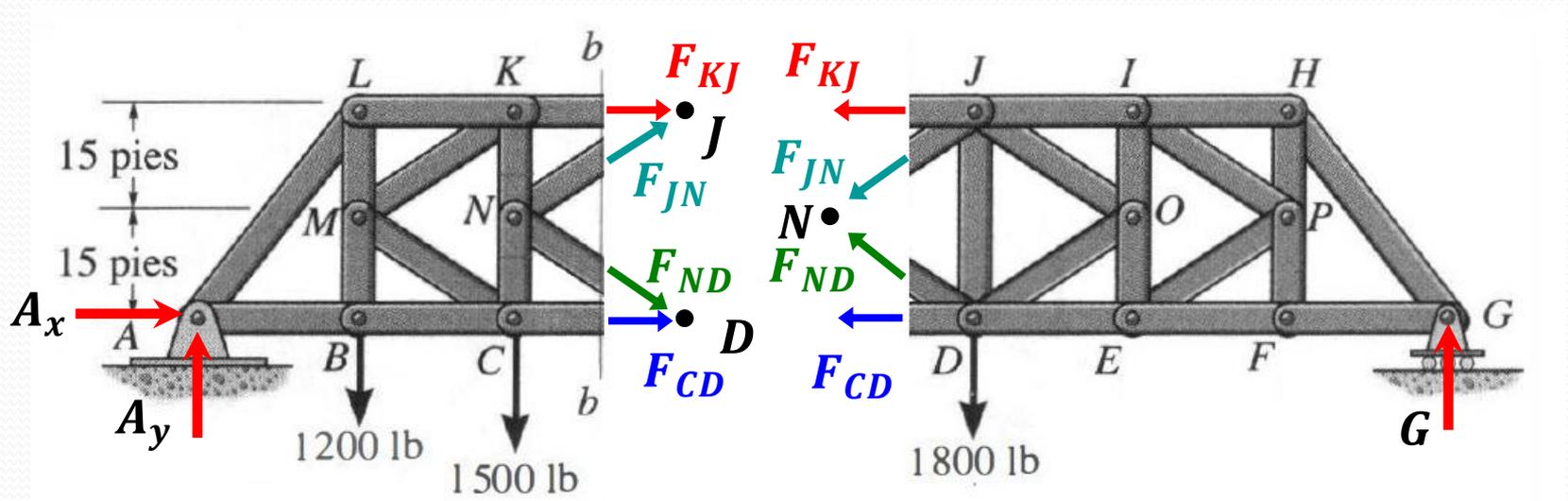


$$\Sigma M_K = 0: \rightarrow F_{CD} =$$

$$\Sigma M_C = 0: \rightarrow F_{KJ} =$$

[4]

8.2.5 El método de las secciones



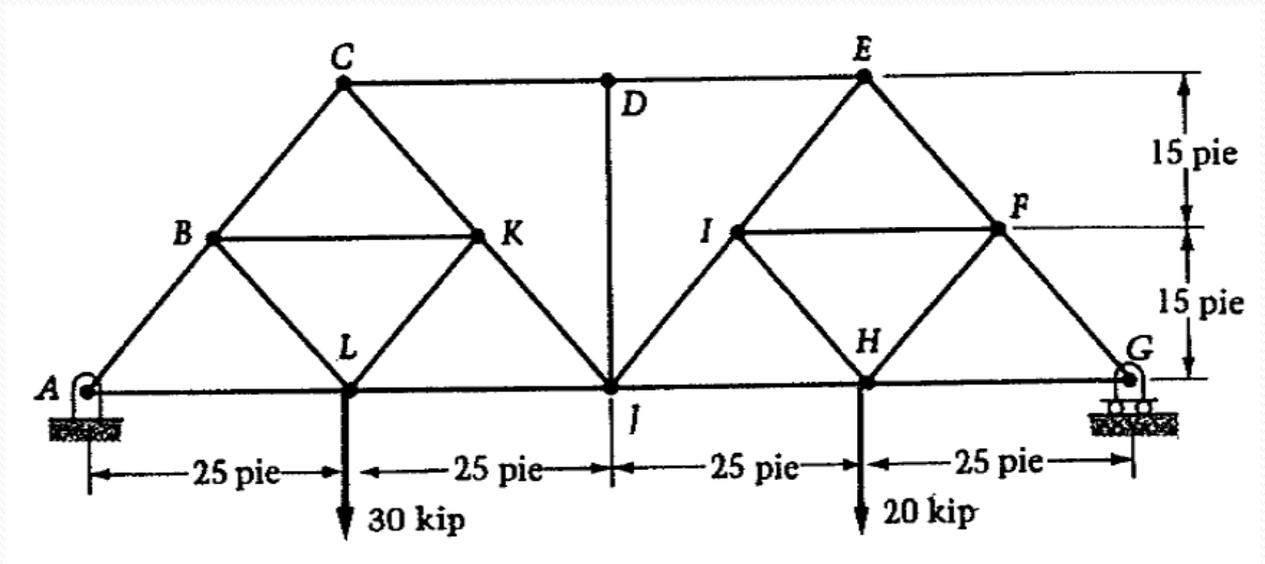
$$\Sigma M_J = 0: \rightarrow F_{ND} =$$

$$\Sigma M_D = 0: \rightarrow F_{JN} =$$

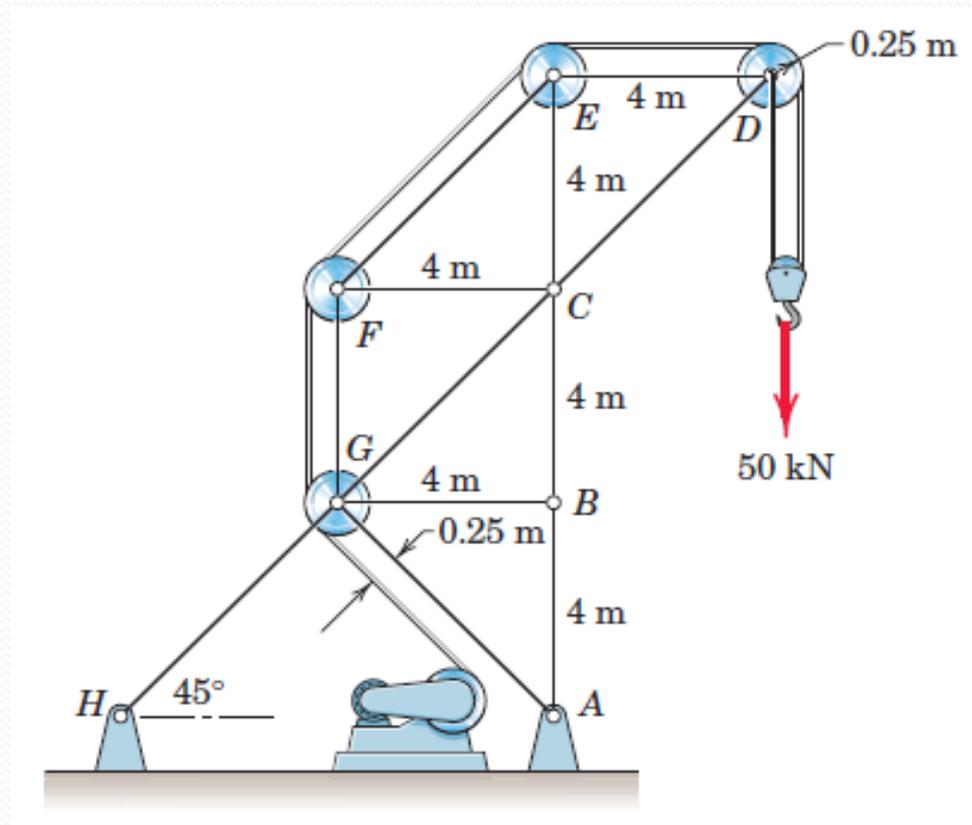
[4]

Ejercicios propuestos

Hallar las fuerzas en los miembros CD , KL y LJ .
Indique si son fuerzas de tracción o compresión.



Hallar las fuerzas en los miembros FG , CG y BC .
Indique si son fuerzas de tracción o compresión.



[2]

Imágenes tomadas de la siguiente bibliografía:

- [1] Hibbeler R.C. (2010). Estática. Ed. 12.
- [2] Meriam J.L. (2006). Estática. Ed. 7.
- [3] Beer F.P. (2009). Estática. Ed. 9.
- [4] Hibbeler R.C. (2004). Estática. Ed. 10.