

Capítulo 7

Resultante de una carga general distribuida

Estática 2015-1

Profesor Herbert Yépez Castillo

Introducción

7.1 Distribución de presión sobre una superficie

- Carga distribuida bidimensional
- Carga distribuida tridimensional

7.2 Presión de un fluido.

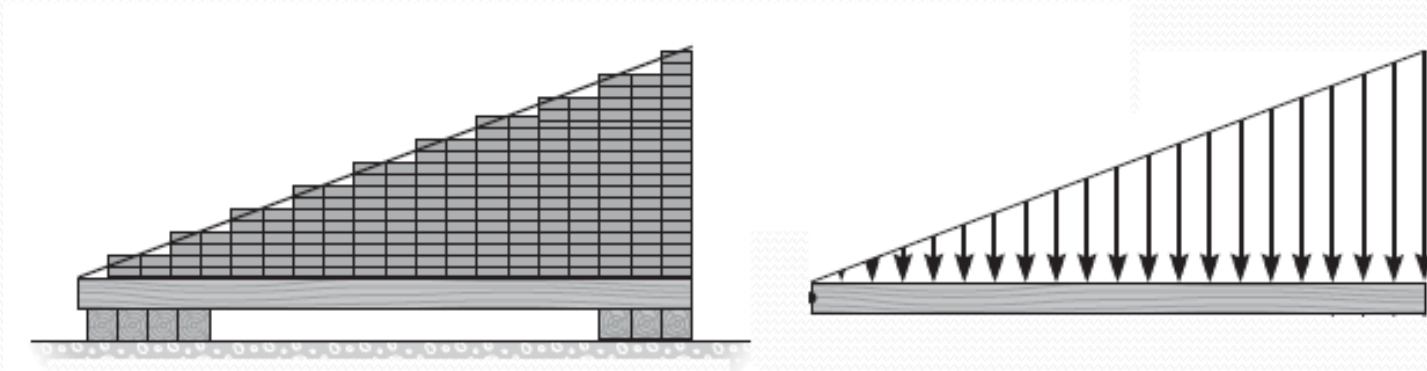
- Presión de un fluido
- Placa plana de ancho constante
- Placa curva de ancho constante
- Placa plana de ancho variable

7.1

Distribución de presión sobre una superficie

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

- En ocasiones, un cuerpo puede estar sometido a una carga que se encuentra distribuida a lo largo de su superficie. Por ejemplo, la presión del viento, el peso de algún material, etc.
- La carga distribuida puede ser reemplazada por una **fuerza resultante** F_R que actúa en una **ubicación particular** sobre el cuerpo.



[1]

7.1.1

Carga distribuida bidimensional

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida – Bidimensional

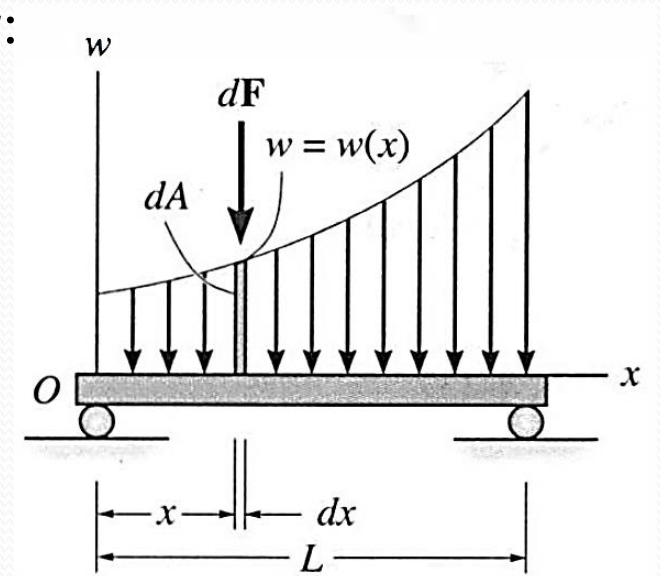
- La carga distribuida está representada por:

$$w = w(x)$$

- La carga w está expresada por:

$$N/m \text{ o } lb/ft$$

(Fuerza por unidad de longitud)

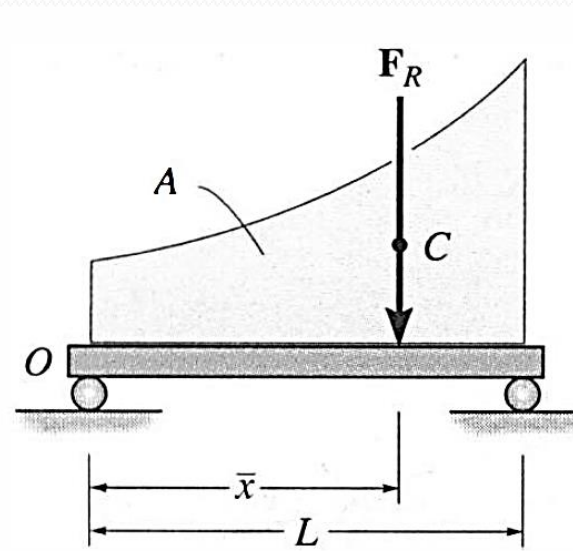
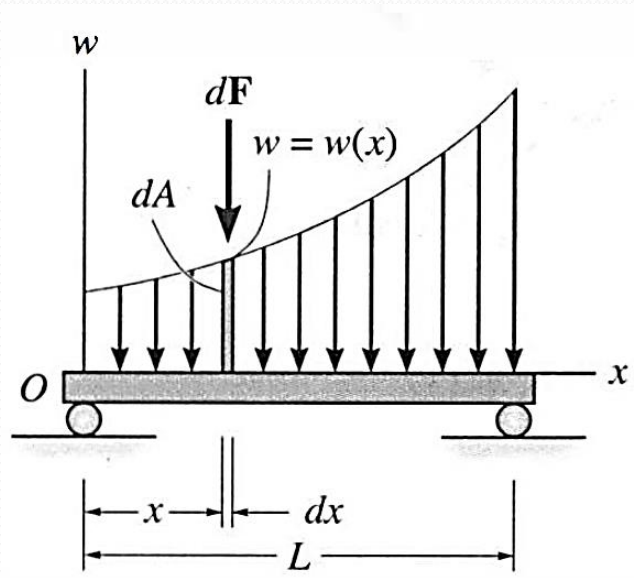


[1]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida – Bidimensional

- La fuerza resultante es equivalente a la **suma de todas las fuerzas** presentes en el sistema.
- La línea de acción de la fuerza resultante debe pasar por el **centroide** del área definida por la carga distribuida.



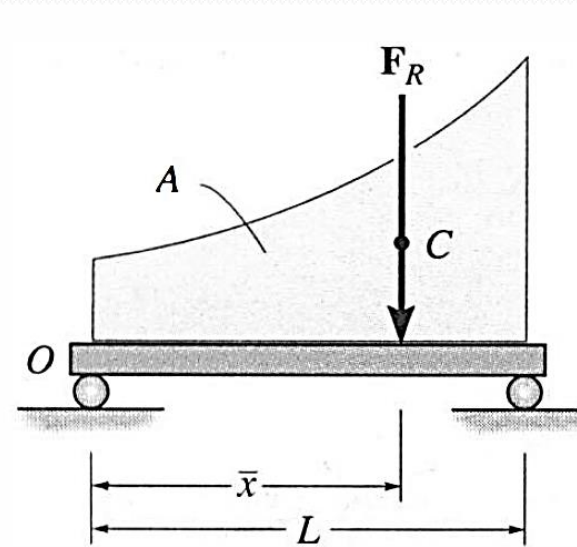
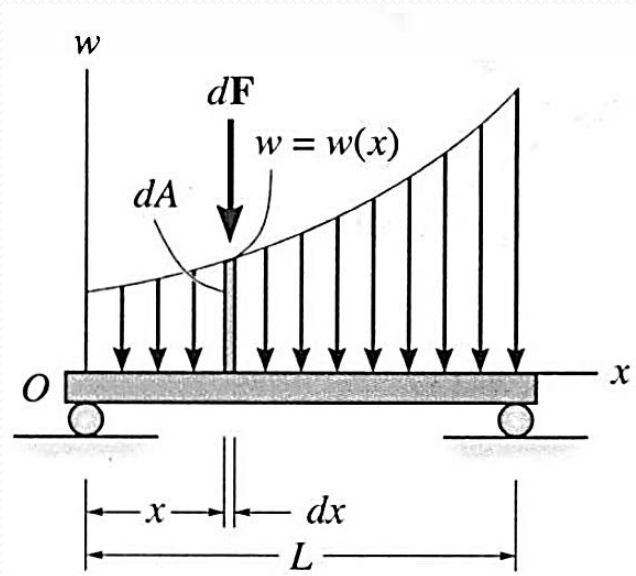
[1]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida – Bidimensional

$$F_R = \int w \, dx = \int_0^L dA = A$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \, dA}{\int dA}$$



[1]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida – Tridimensional

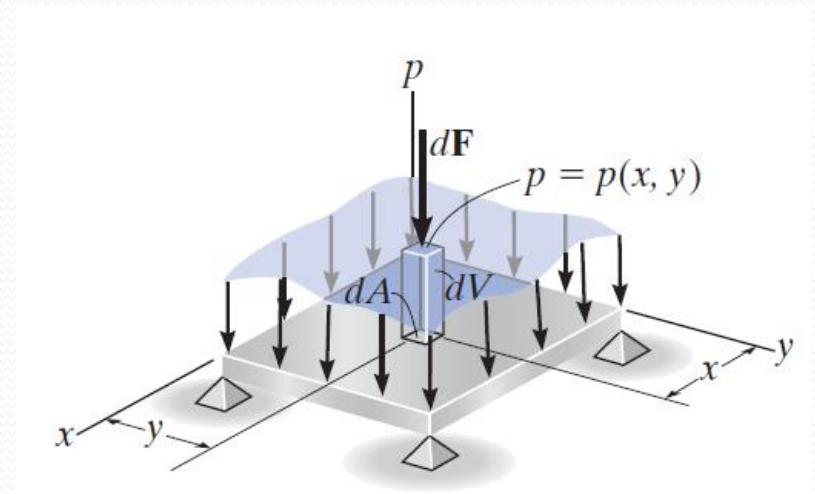
- La carga distribuida está representada por:

$$p = p(x, y)$$

- La carga p está expresada por:

$$N/m^2 \text{ o } lb/ft^2$$

(Fuerza por unidad de área)



[2]

7.1.2

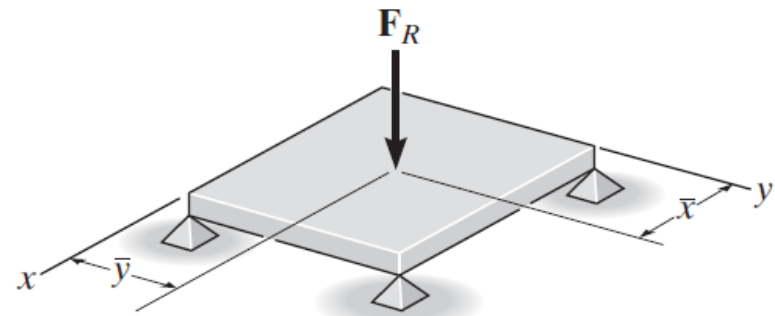
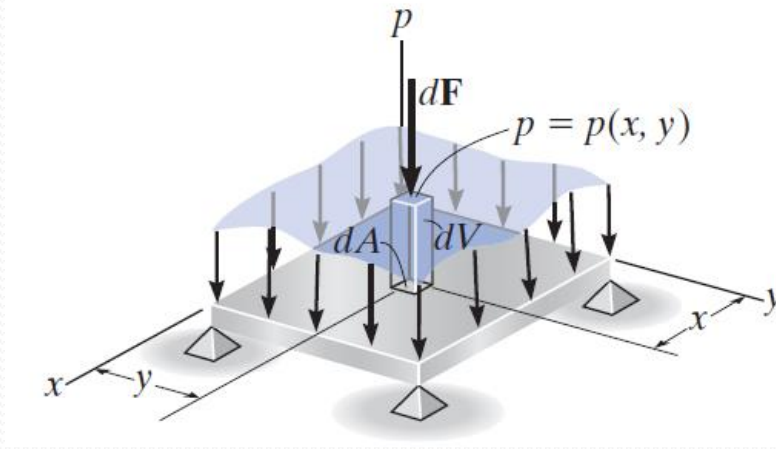
Carga distribuida tridimensional

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida – Tridimensional

La fuerza resultante es equivalente a la **suma de todas las fuerzas** presentes en el sistema y su línea de acción debe pasar por el **centroide** del área definida por la carga distribuida.

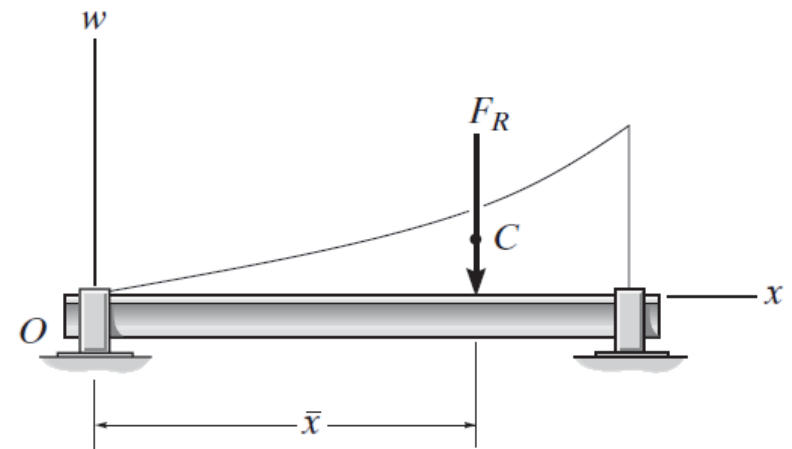
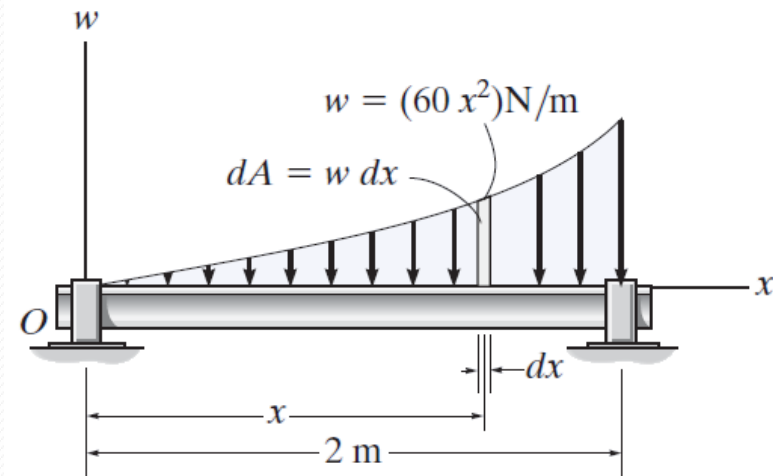
$$F_R = \int p \, dA = \int dV = V \quad \bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \, dV}{\int dV} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \, dV}{\int dV}$$



[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Integración.



$$F_R = \int w \, dx = \int_0^L dA = A$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \, dA}{\int dA}$$

[2]

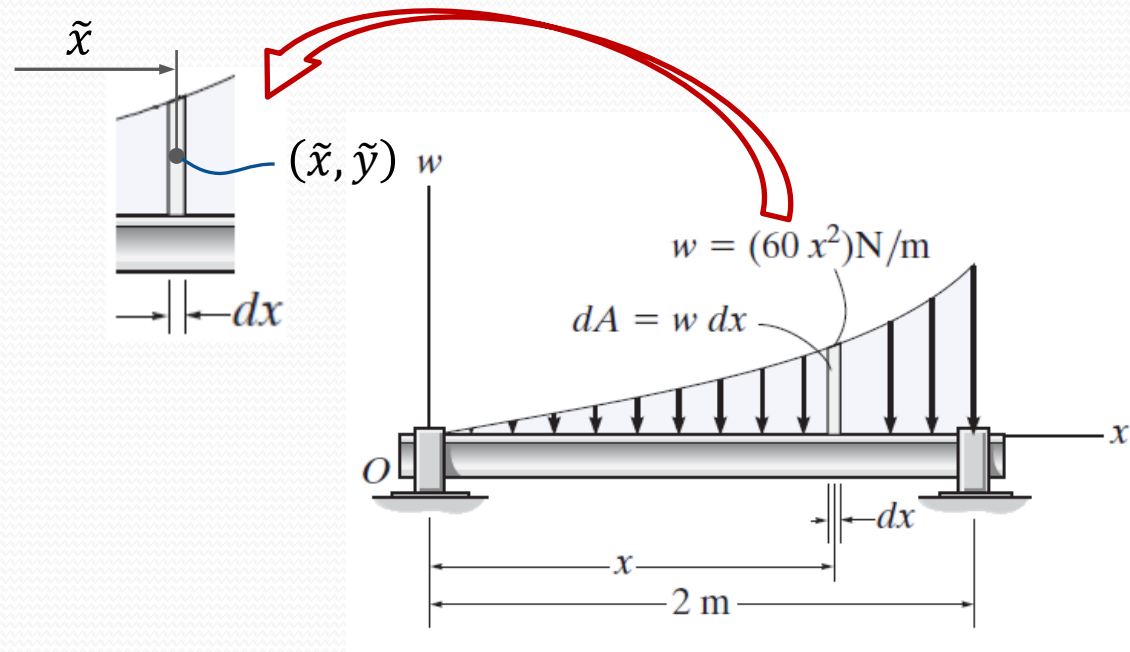
7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Integración.

$$\begin{aligned} F_R &= \int w \, dx = \int dA \\ &= \int_0^{L=2} 60x^2 \, dx = \left[\frac{60}{3} x^3 \right] \\ &= \frac{60}{3} (2^3 - 0^3) = 160 \, N \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \, dA}{\int dA} = \frac{\int x (w \, dx)}{F_R}$$

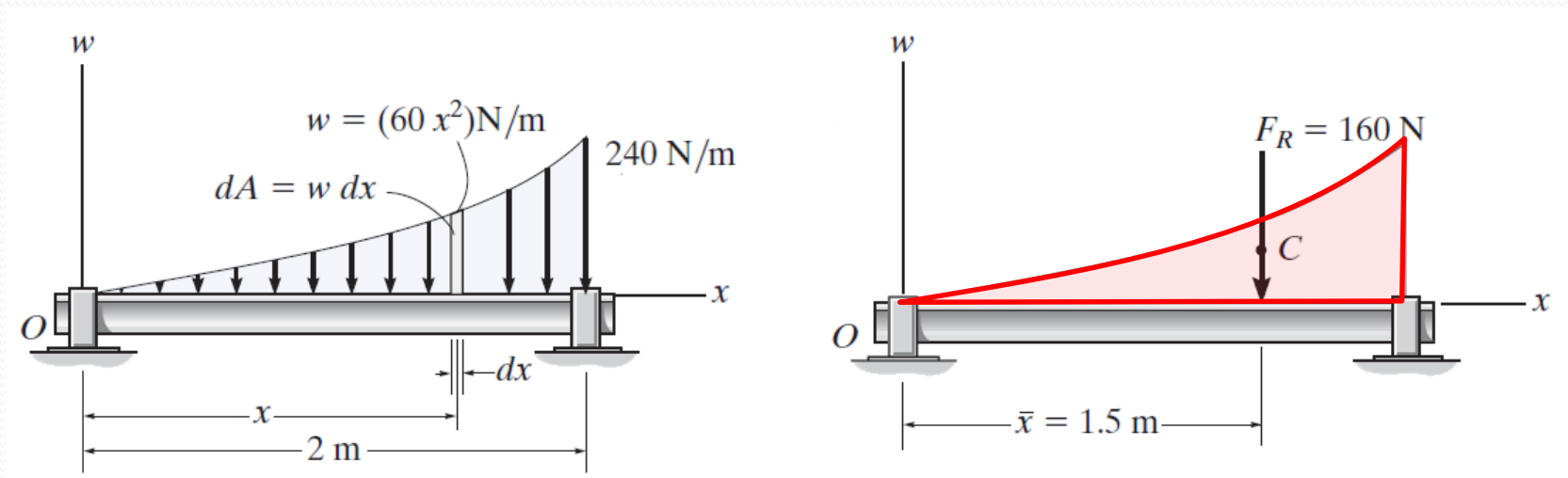
$$\bar{x} = \frac{1}{F_R} \left(\int_0^2 60x^3 \, dx \right) = \frac{1}{F_R} \left(\frac{60}{4} x^4 \right) \Bigg|_0^2 = \frac{1}{F_R} (15(2^4)) = 1.5 \, m$$



[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Integración.



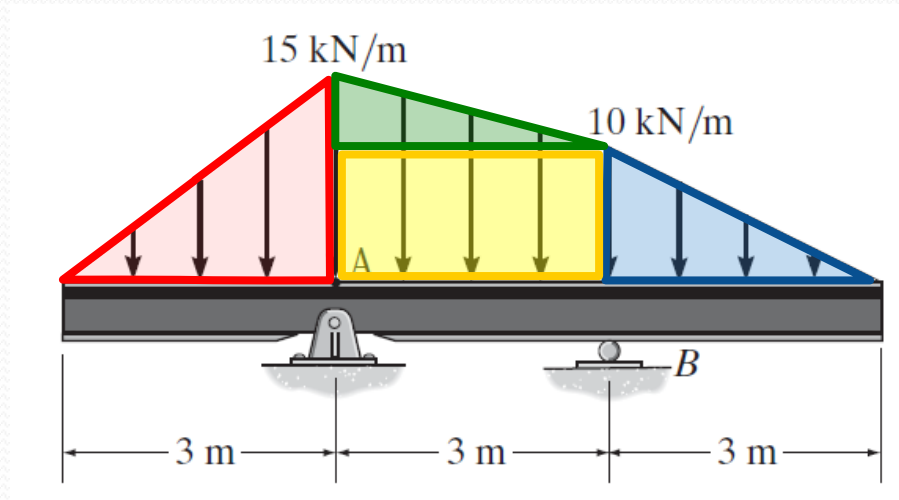
Según
tablas:

Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
Seno parabólico		$\frac{3}{4}(2) = 1.5$ $\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{(2)(240)}{3} = 160$ $\frac{ah}{3}$

[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Áreas compuestas.



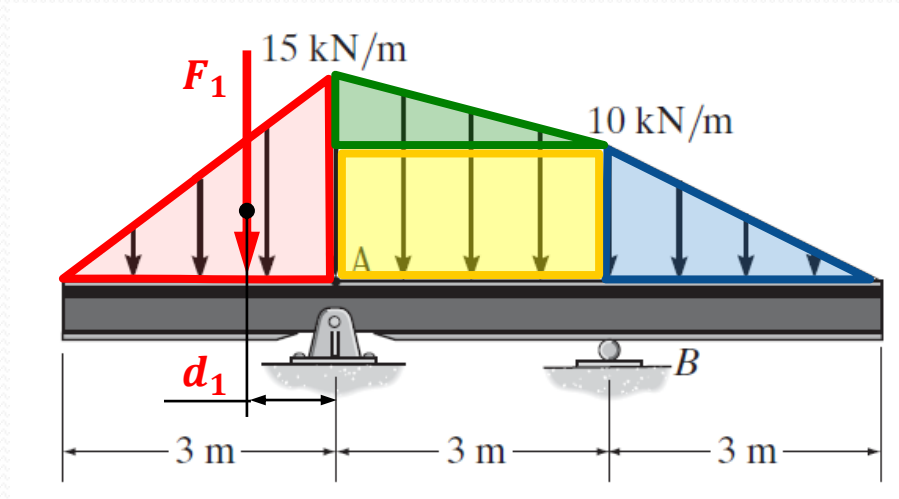
Según
tablas:

Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
Triángulo rectángulo		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$

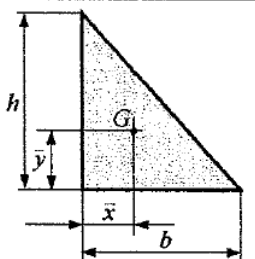
[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Áreas compuestas.



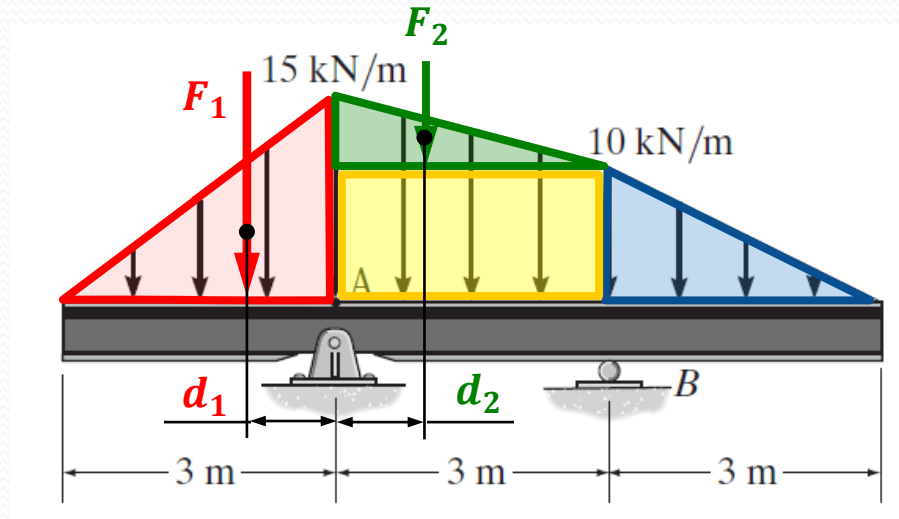
Según
tablas:

Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
Triángulo rectángulo		$\frac{(3)}{3} = 1 = d_1$ $\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{(3)(15)}{2} = 22.5 = F_1$ $\frac{bh}{2}$

[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Áreas compuestas.



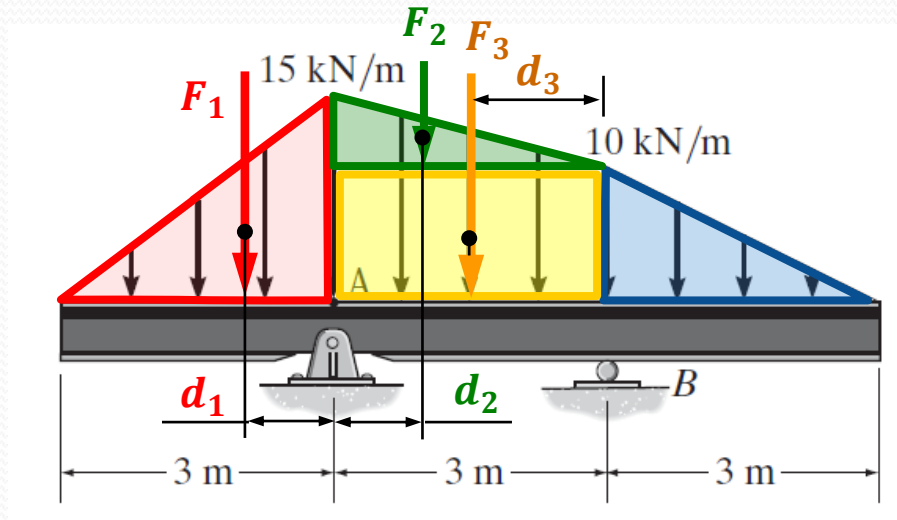
Según
tablas:

Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
Triángulo rectángulo		$\frac{(3)}{3} = 1 = d_2$ $\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{(3)(15 - 10)}{2} = 7.5 = F_2$ $\frac{bh}{2}$

[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Áreas compuestas.



Según
tablas:

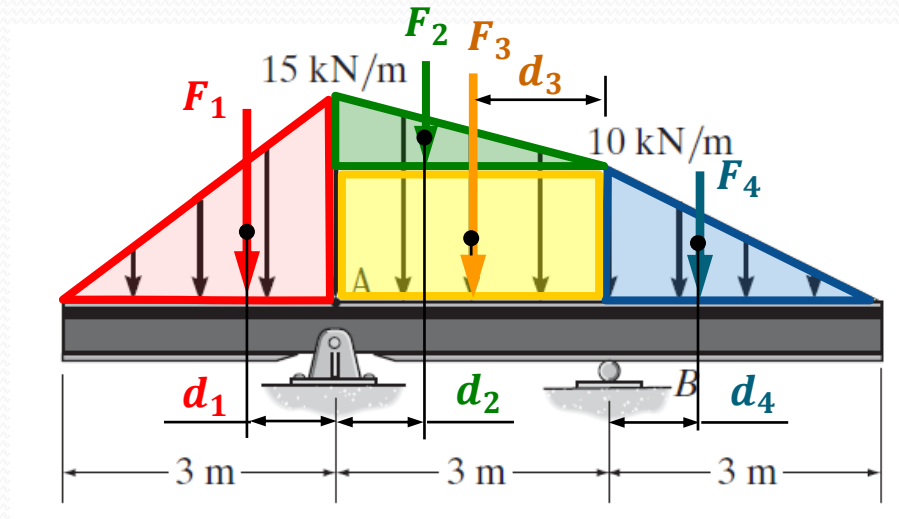
$$\frac{(3)}{2} = 1.5 = d_3$$

$$(3)(10) = 30 = F_3$$

[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Áreas compuestas.



Según
tablas:

Nombre	Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$	A
Triángulo rectángulo		$\frac{(3)}{3} = 1 = d_4$		$\frac{(3)(10)}{2} = 15 = F_4$
		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$

[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Áreas compuestas.

$$d_1 = 1$$

$$F_1 = 22.5$$

$$d_2 = 1$$

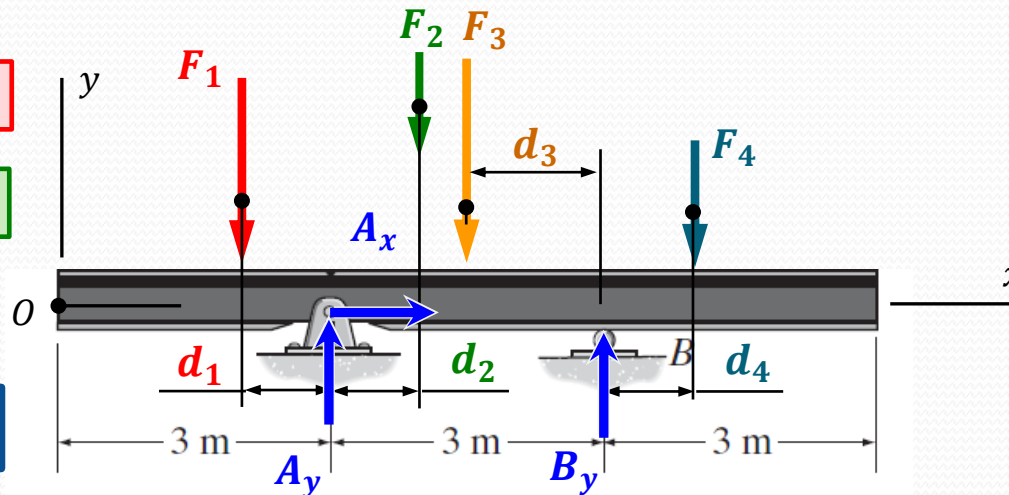
$$F_2 = 7.5$$

$$d_3 = 1.5$$

$$F_3 = 30$$

$$d_4 = 1$$

$$F_4 = 15$$



$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}F}{\sum F}$$

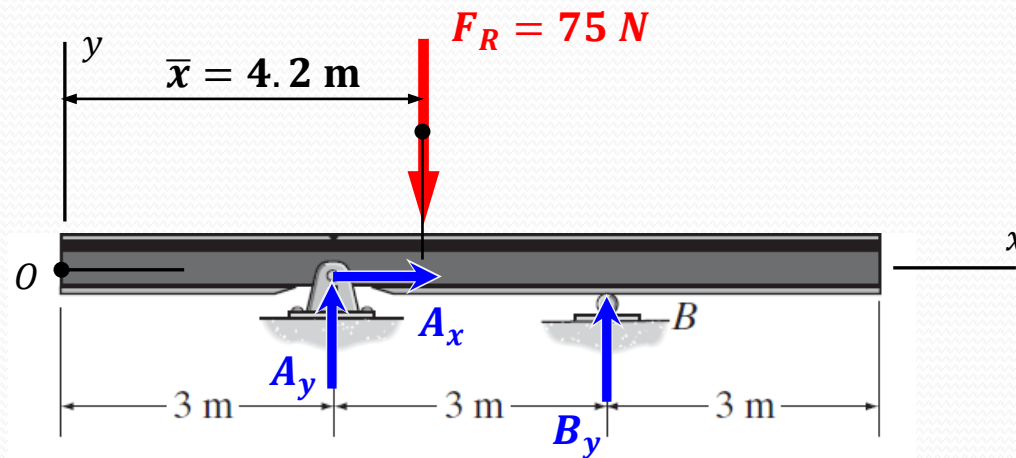
$$\bar{x} = \frac{(3 - d_1)F_1 + (3 + d_2)F_2 + (6 - d_3)F_3 + (6 + d_4)F_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}$$

$$\bar{x} = \frac{(3 - 1)22.5 + (3 + 1)7.5 + (6 - 1.5)30 + (6 + 1)15}{75} = \frac{315}{75} = 4.2$$

[2]

7.1 Distribución de presión sobre una superficie.

Carga distribuida bidimensional – Áreas compuestas.

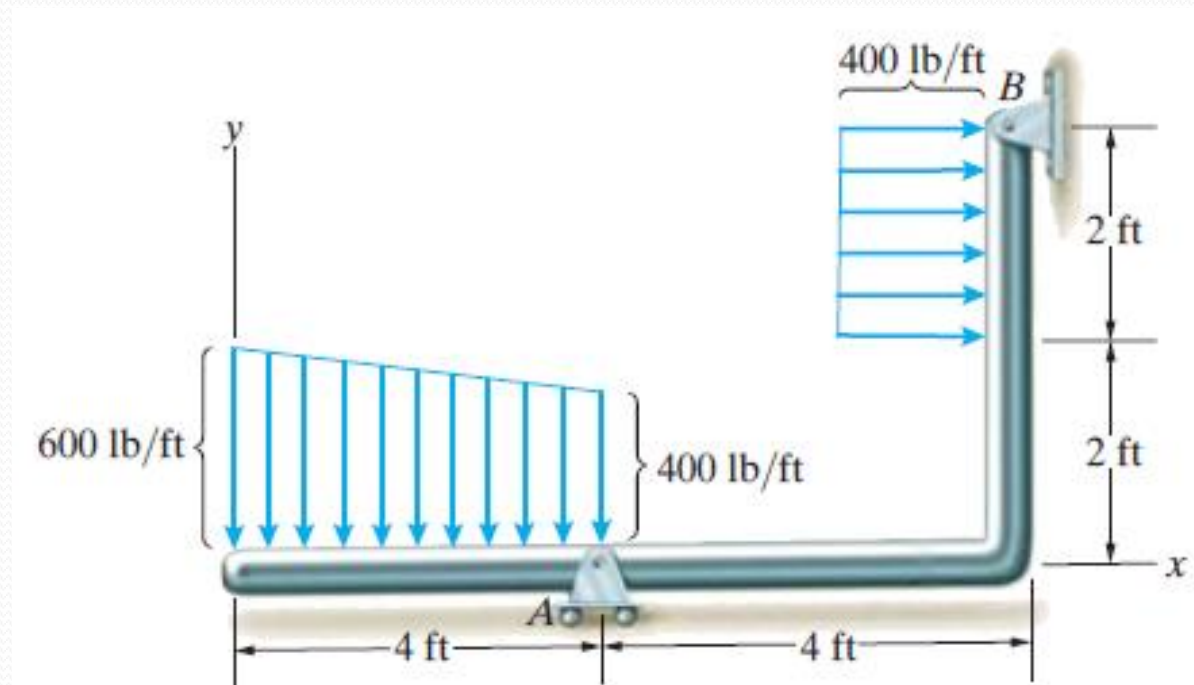


$$\left. \begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0: & A_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0: & A_y + B_y - F_R = 0 \\ \Sigma M_A = 0: & (3)B_y - (1.2)F_R = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_x = 0 \\ A_y = 45\text{ N} \\ B_y = 30\text{ N} \end{array}$$

[2]

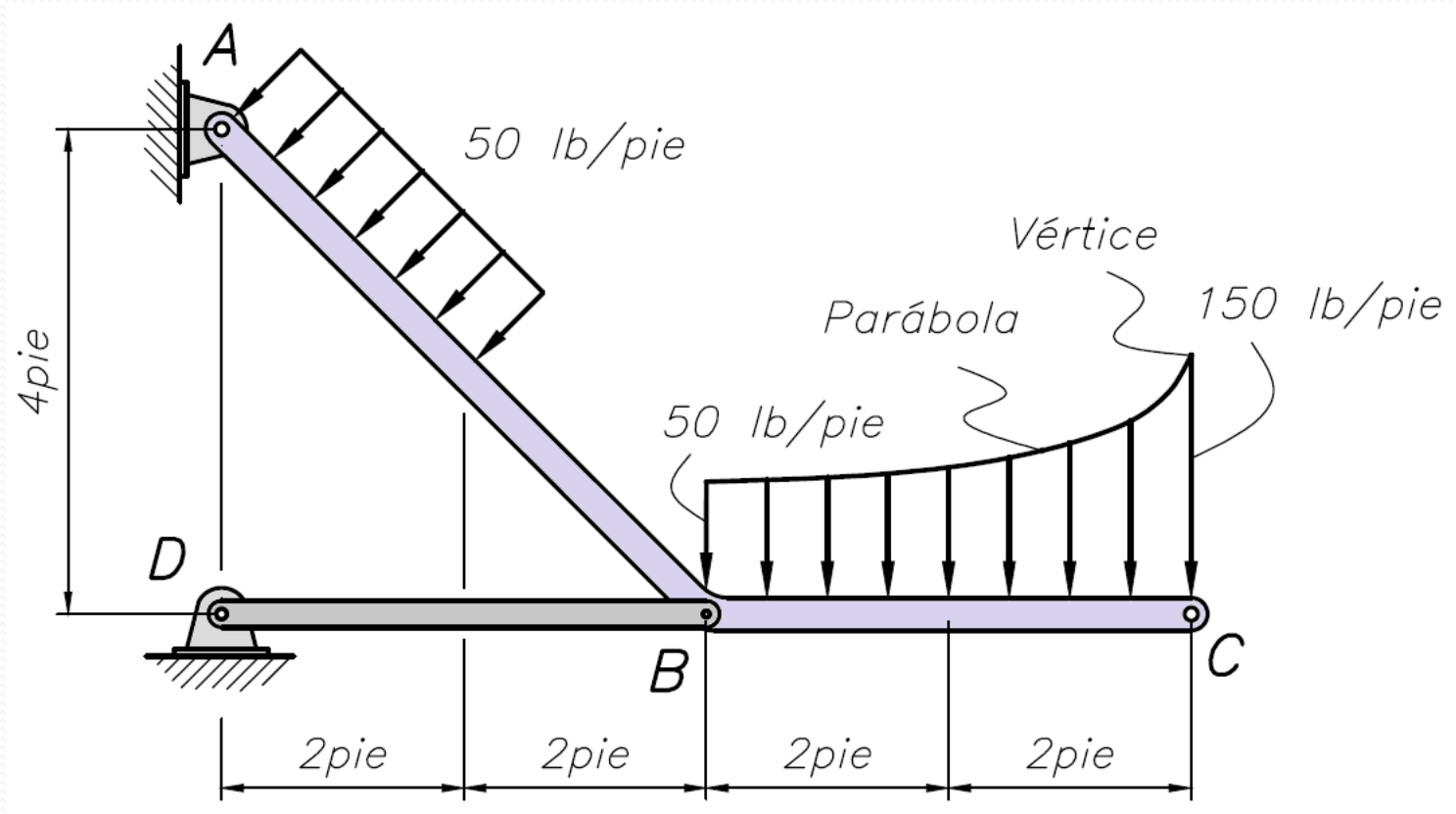
Ejercicios propuestos

Determinar las reacciones sobre la barra.

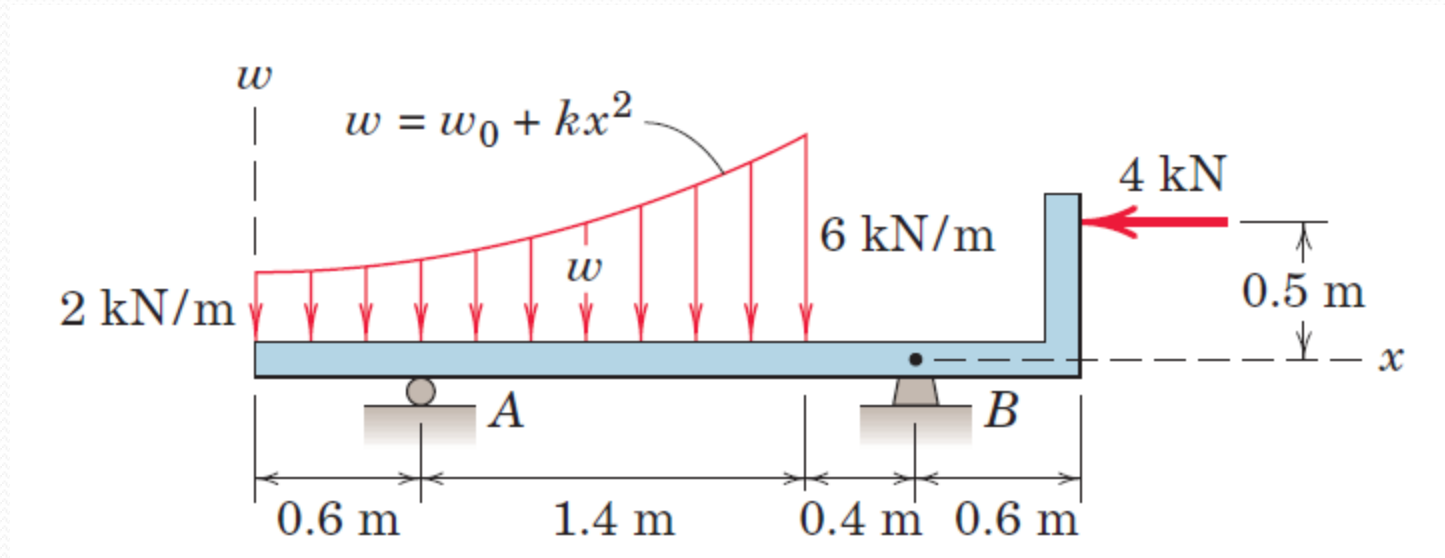


[3]

Determinar las reacciones sobre la barra ABC.

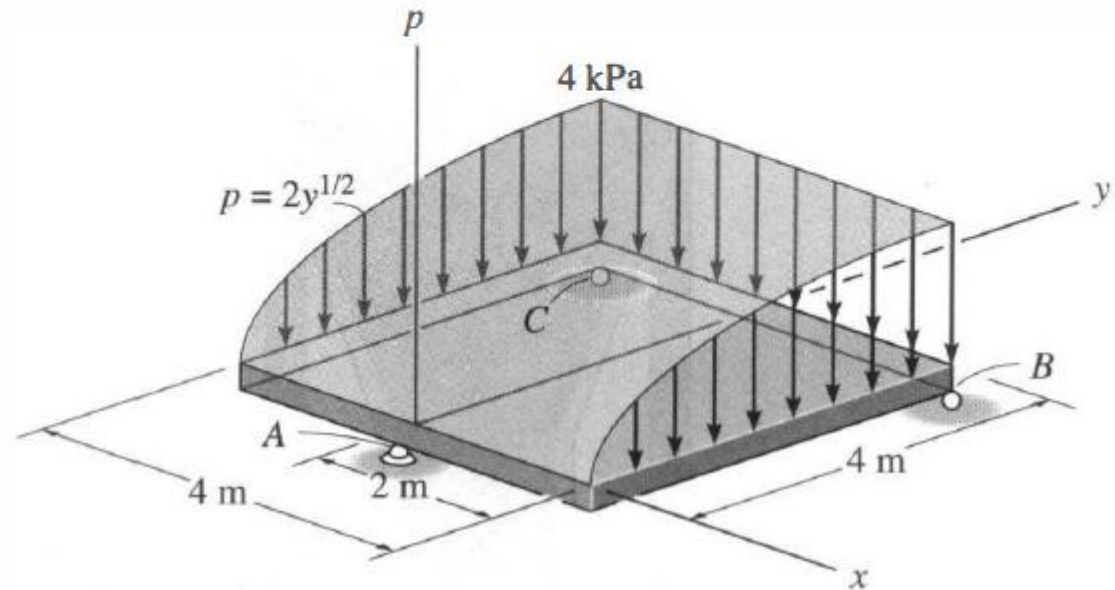


Determinar las reacciones sobre la barra.



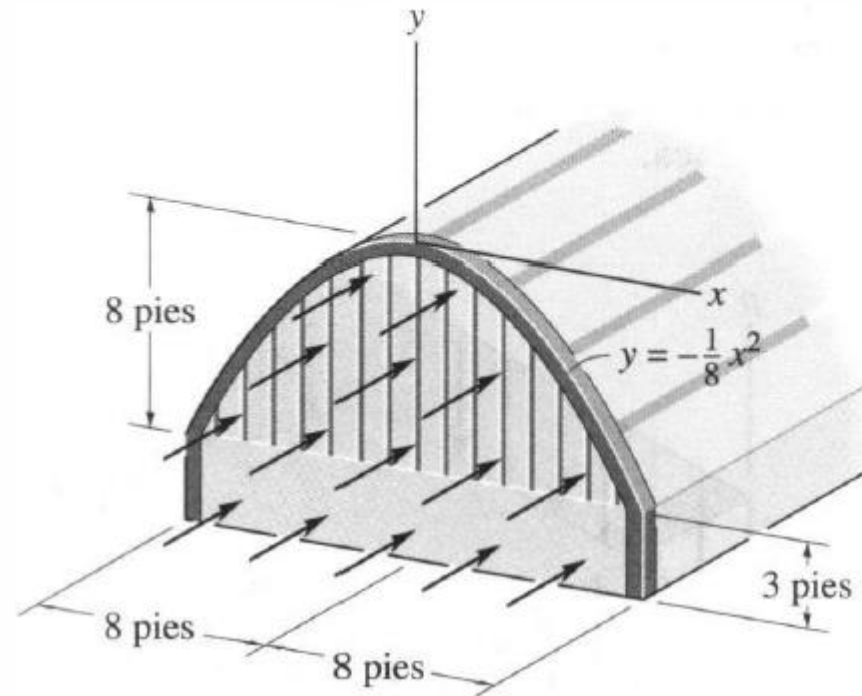
[4]

9-122. La carga que actúa sobre una placa plana está representada por una distribución parabólica de presión. Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del punto en que la línea de acción de la fuerza interseca la placa. ¿Cuáles son las reacciones en los rodillos B y C y en la rótula esférica A ? Ignore el peso de la placa.



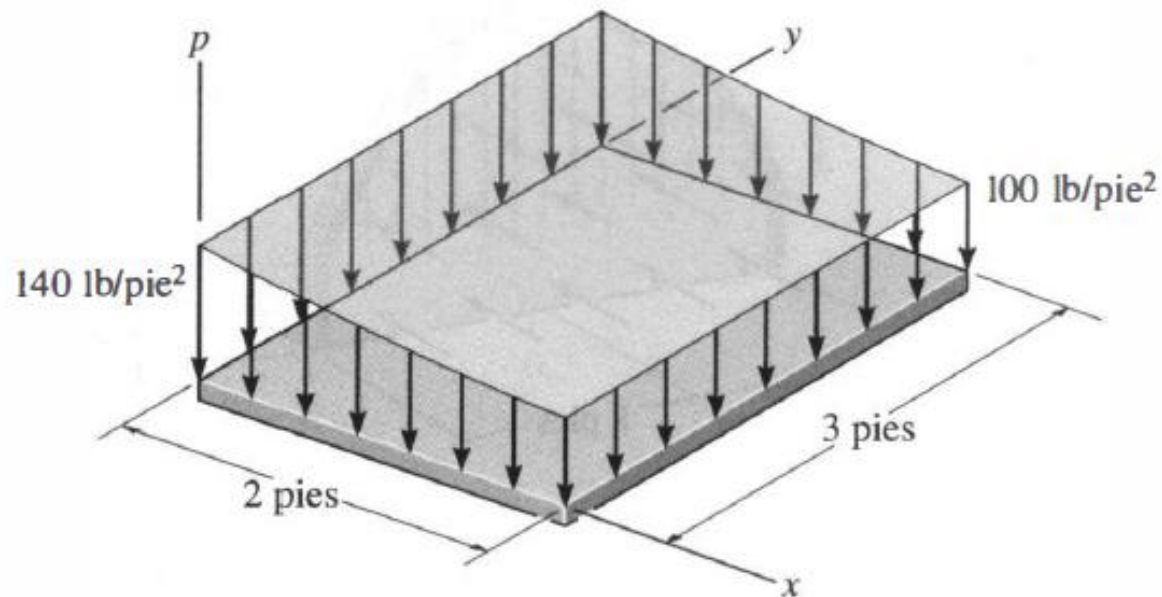
[1]

9-121. El viento sopla uniformemente sobre la superficie frontal del edificio metálico con una presión de 30 lb/pie^2 . Determine la fuerza resultante que ejerce sobre la superficie y la posición de esta resultante.



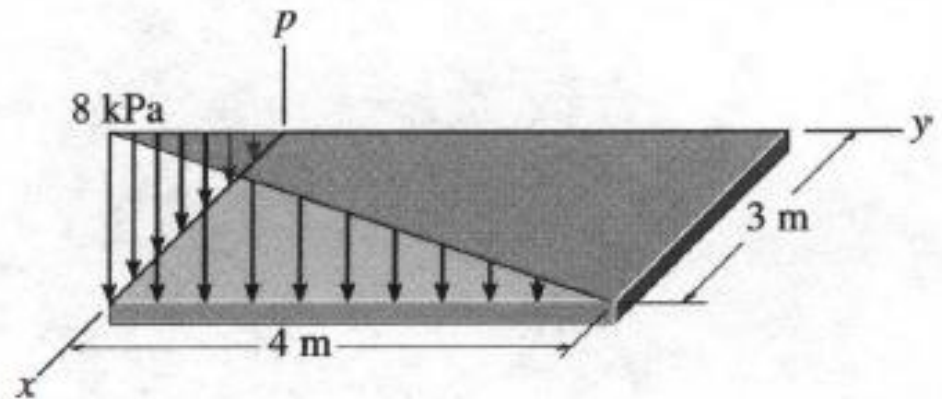
[1]

9-119. La carga de presión sobre la placa está descrita por la función $p = 10[6/(x + 1) + 8]$ lb/pie². Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del punto donde la línea de acción de la fuerza interseca la placa.



[1]

9-133. La carga sobre la placa varía linealmente a lo largo de los lados de la placa de modo que $p = \frac{2}{3}[x(4 - y)]$ kPa. Determine la fuerza resultante y su posición $(\bar{x}, \bar{y})$ sobre la placa.



[1]

7.2

Presión de un líquido

7.2 Presión de un fluido

Ley de Pascal

Un fluido (reposo) genera **presión** sobre un punto en **todas las direcciones y con la misma magnitud** p . La magnitud de p depende del peso específico del fluido y de la profundidad h medida desde la superficie del fluido.

$$p = \rho g h = \gamma h \left[\frac{kg}{m^3} \right] \left[\frac{m}{s^2} \right] [m]$$

La relación es válida para fluidos que se suponen **incompresibles**.

7.2 Presión de un fluido

En particular el **agua** posee la siguiente información:

$$\rho_{agua} = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\gamma_{agua} = 9810 \frac{N}{m^3}$$

$$\gamma_{agua} = 62.4 \frac{lb}{ft^3}$$

7.2.1

Placa plana de ancho constante

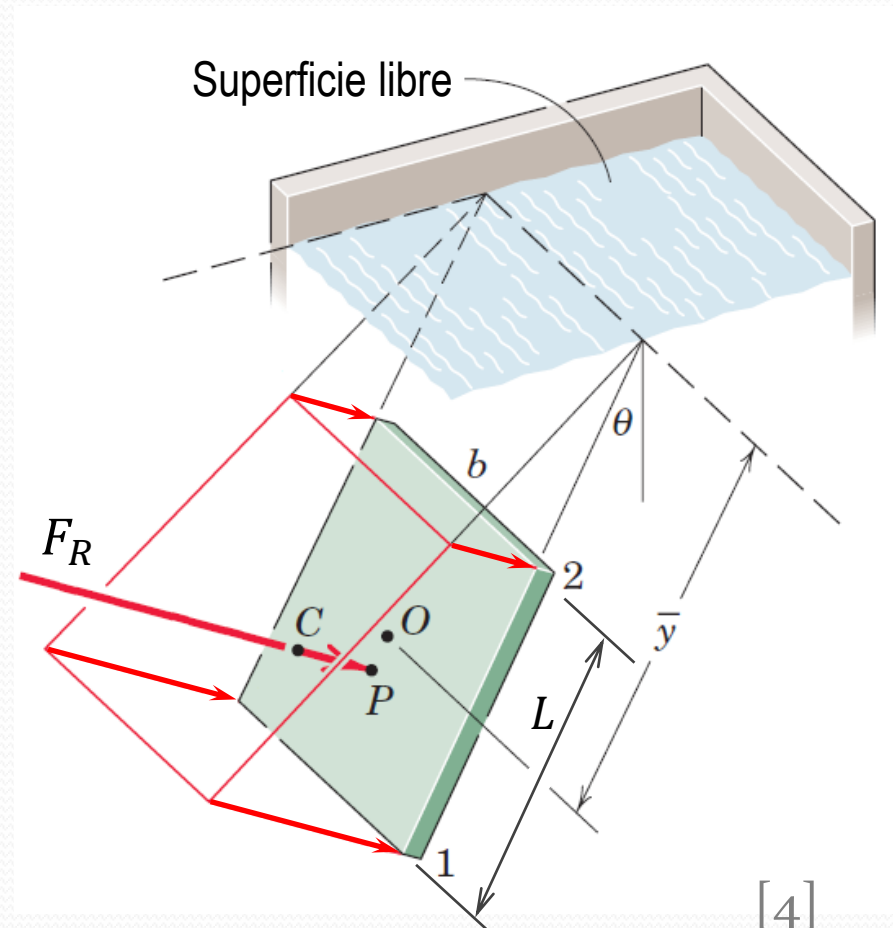
7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho constante

Una placa de longitud L y ancho b está inclinada un ángulo θ arbitrario respecto a la vertical.

El fluido ejerce un **presión normal** a toda el área de la superficie

La presión en el punto 1 es mayor que en 2, debido a que 1 se encuentra a una profundidad mayor



[4]

7.2 Presión de un fluido

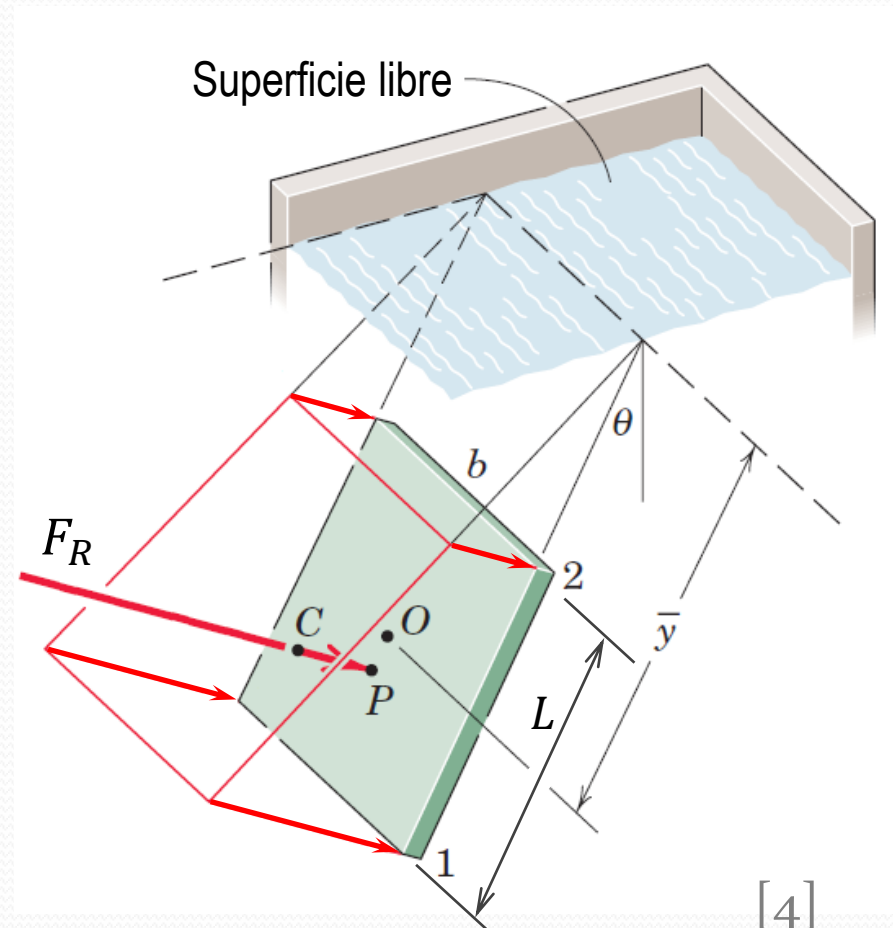
Placa plana de ancho constante

La presión varía linealmente y su distribución se representa mediante un volumen trapezoidal, donde

C: Centroide del volumen trapezoidal

P: Punto de paso de la fuerza resultante de la carga distribuida sobre la placa (centro de presión)

O: Centroide del área superficial de la placa.



[4]

7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho constante

1ra Forma

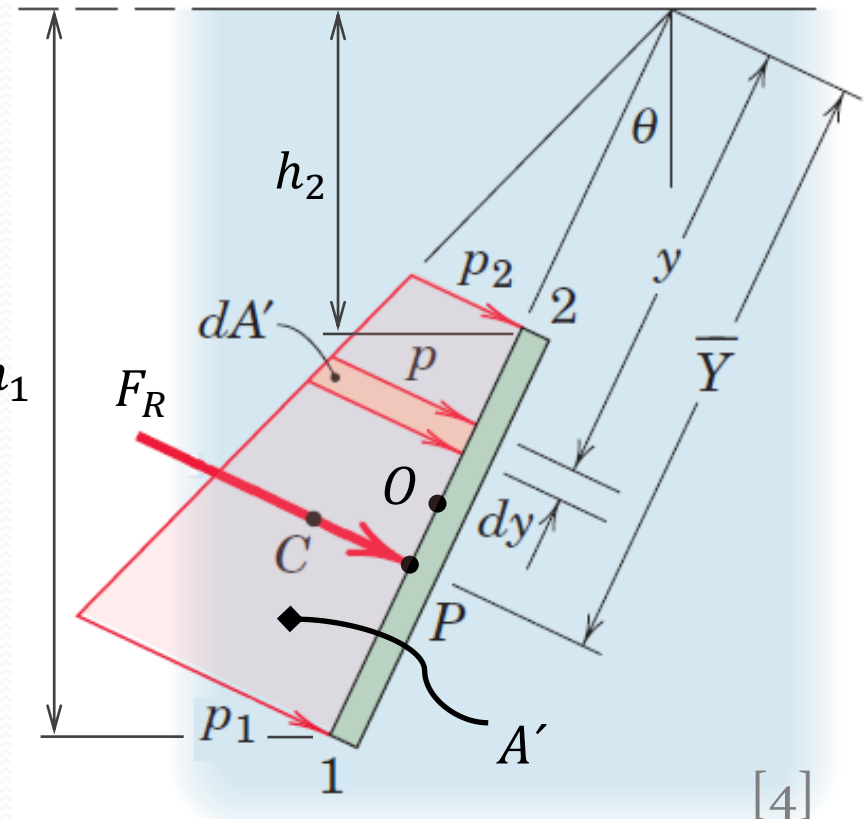
La fuerza resultante F_R es igual a:

$$F_R = b \int p \, dy = b \int dA' = b A'$$

Donde, A' es el área definida por la distribución trapezoidal de presiones y h_1 b el ancho de la placa.

Además, la presión en 1 y 2 es:

$p_1 = \gamma h_1$ a la profundidad h_1 , y
 $p_2 = \gamma h_2$ a la profundidad h_2 .



7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho constante

2da Forma

Otra forma de determinar F_R :

$$F_R = \int p \, dA = \int \gamma h \, dA = \gamma \int h \, dA$$

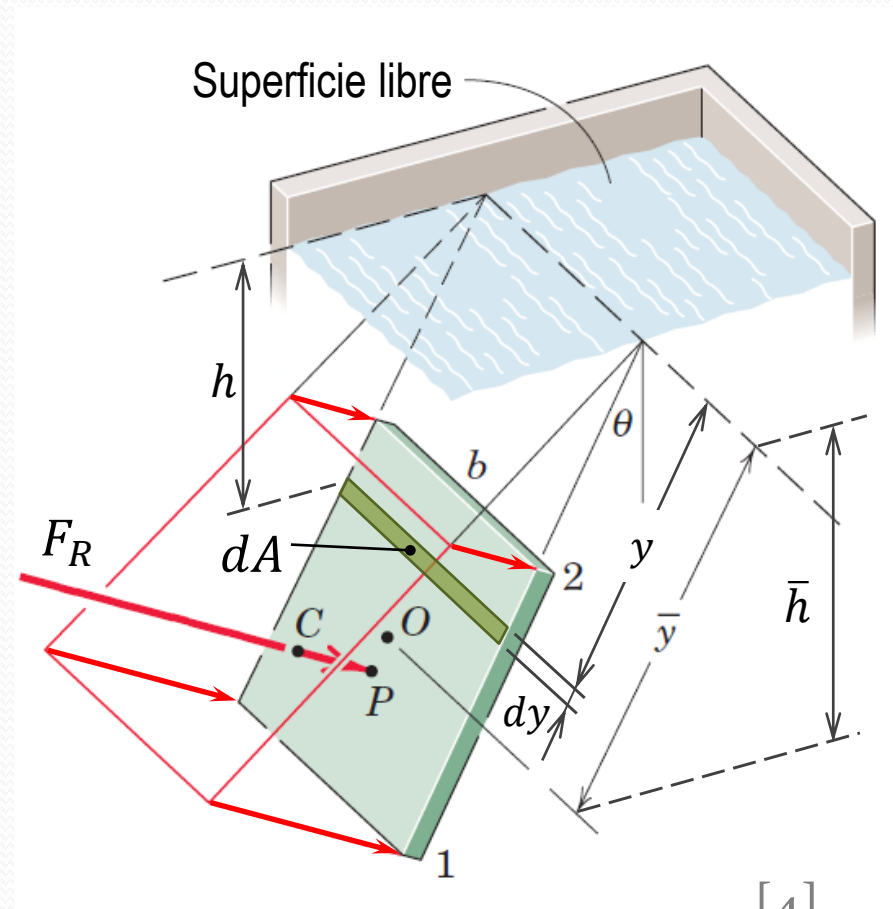
Donde,

$$\bar{h} = \frac{\int h \, dA}{\int dA}$$

Reemplazando la relación centroidal

$$F_R = \gamma \bar{h} \int dA = \gamma \bar{h} A$$

Donde, A es el área superficial de la placa.



[4]

7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho constante

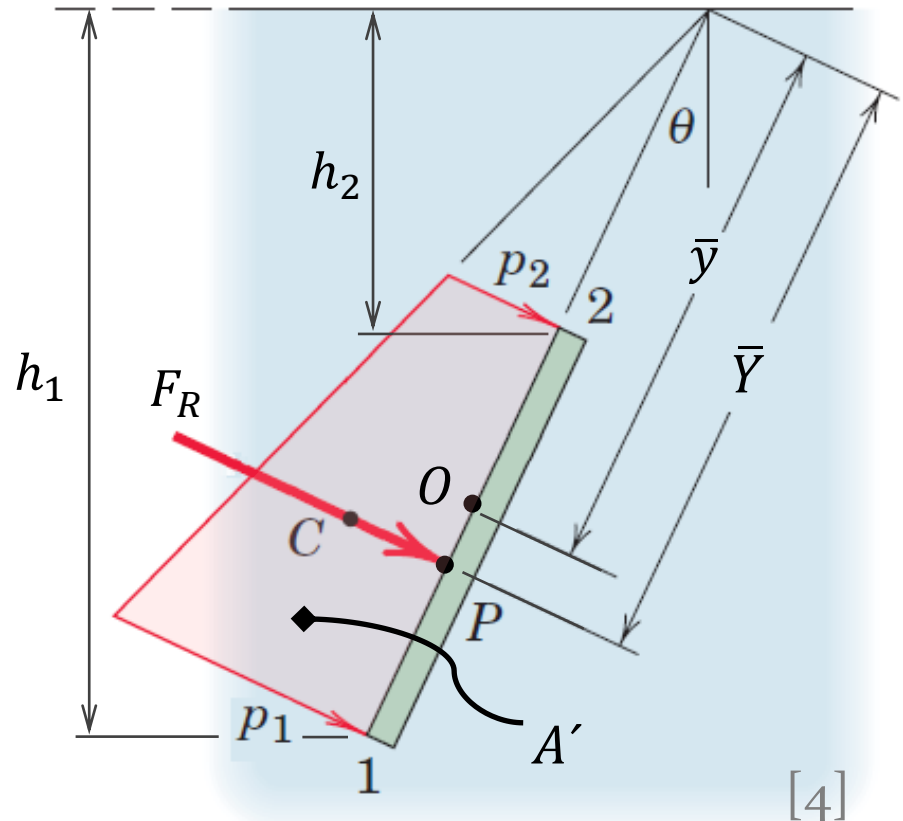
Resumen - 1ra Forma:

$$F_R = b A'$$

Donde

A' : Área definida por la distribución trapezoidal de presiones

b : Ancho constante de la placa (dimensión perpendicular a la imagen)



7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho constante

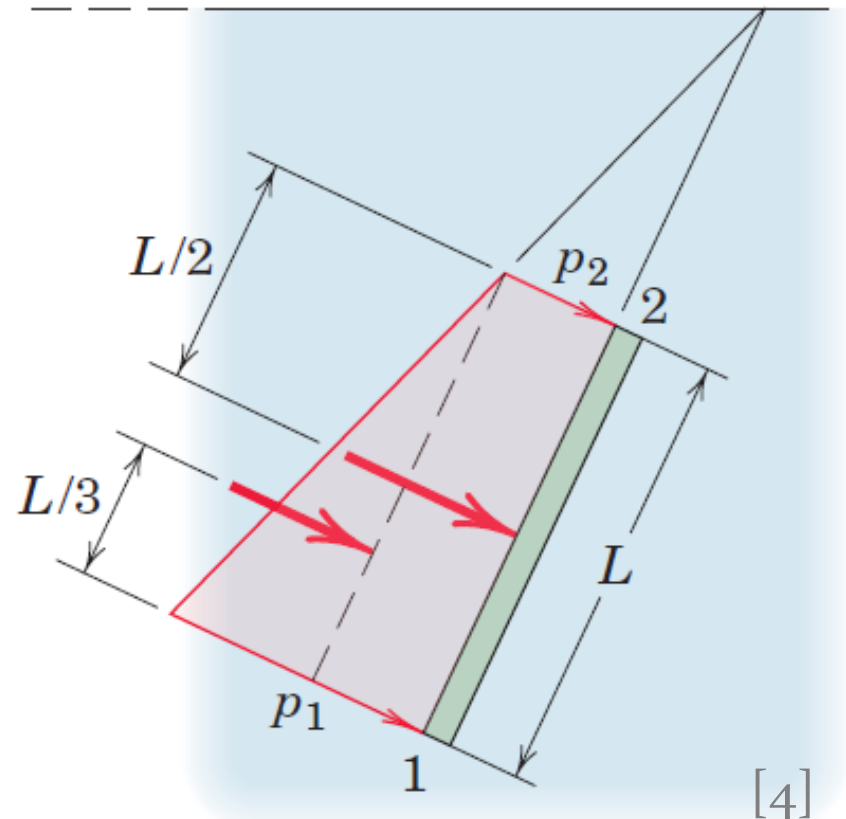
Resumen - 1ra Forma:

$$F_R = b A'$$

Donde

A' : Área definida por la distribución trapezoidal de presiones

b : Ancho constante de la placa (dimensión perpendicular a la imagen)



7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho constante

Resumen – 2da Forma:

$$F_R = \gamma \bar{h} A$$

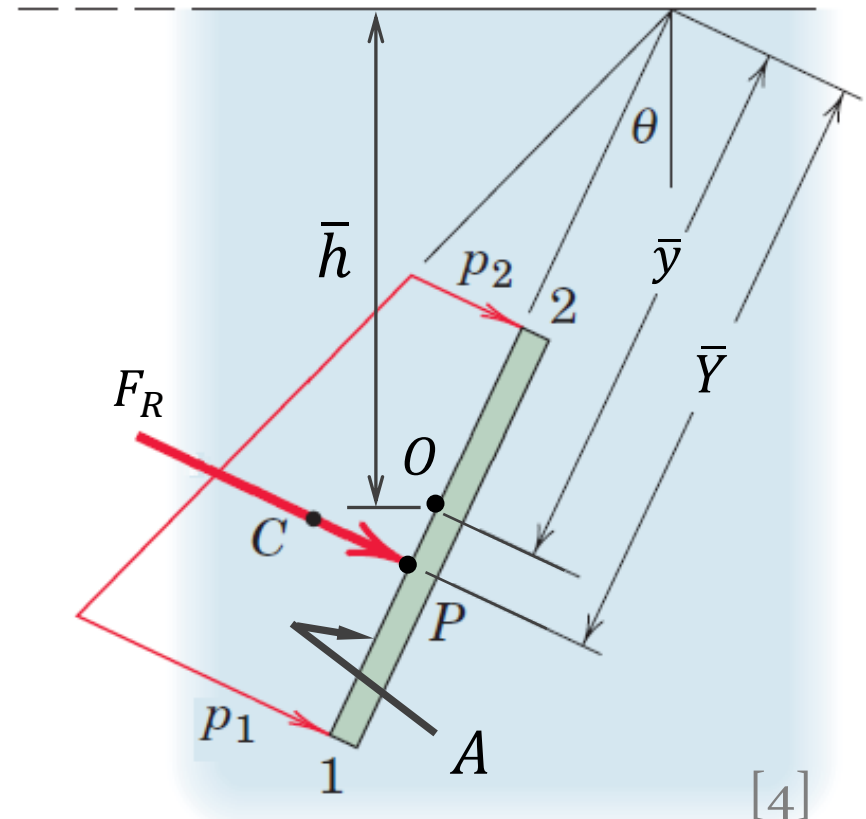
Donde

A : Área superficial de la placa

$\bar{h}$: Profundidad hasta el centroide del área superficial de la placa

$$\bar{h} = \bar{y} \cos \theta$$

γ : Peso específico del fluido



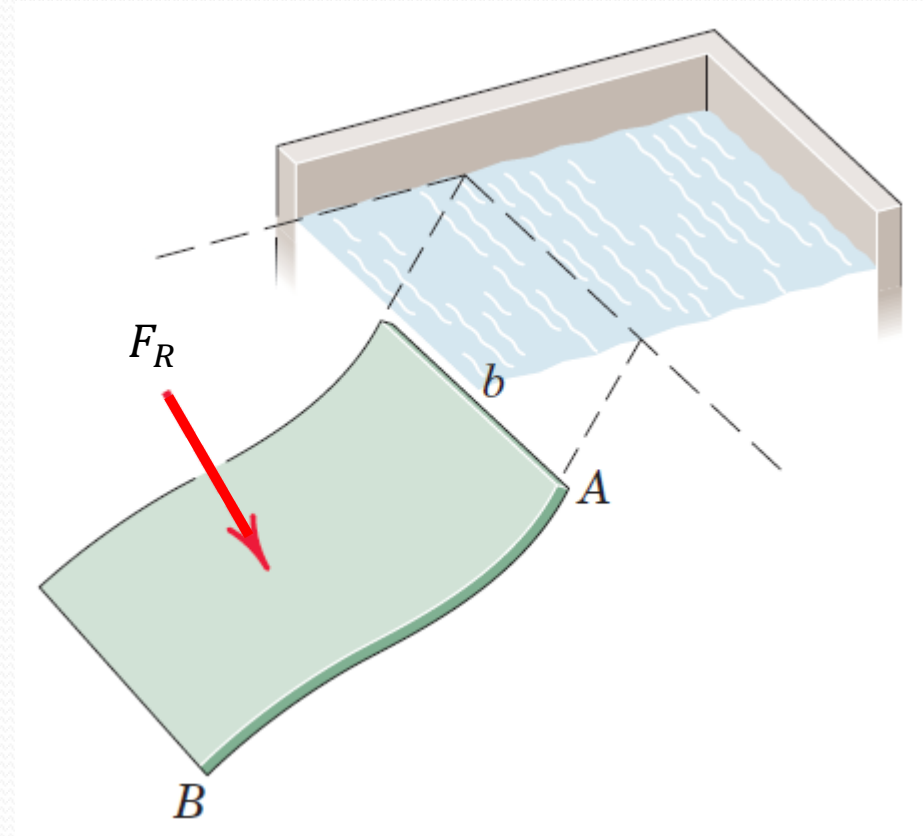
7.2.2

Placa curva de ancho constante

7.2 Presión de un fluido

Placa curva de ancho constante

Cuando la placa sumergida es curva de ancho constante, la presión que actúa en forma normal al área superficial de la placa cambia su dirección de manera continua, y por tanto, estimar la **fuerza resultante** F_R y el **centro de presión** es más difícil que para una placa plana.



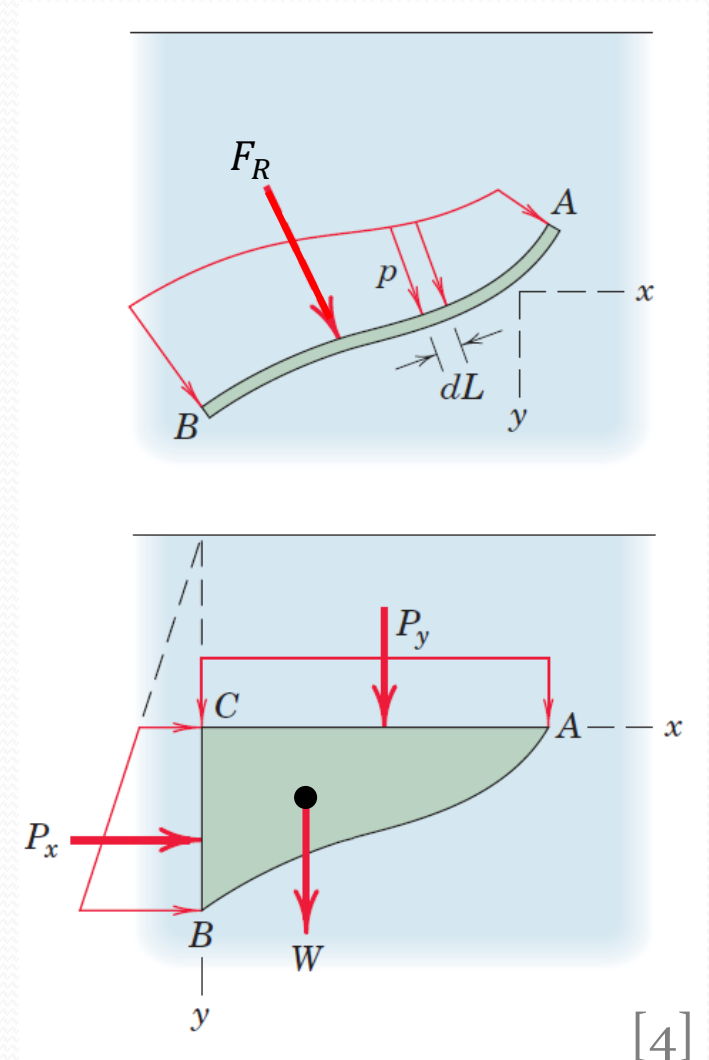
[4]

7.2 Presión de un fluido

Placa curva de ancho constante

Aunque puede usarse la integración, existe un método más simple, el cual requiere cálculos separados de las **componentes horizontal y vertical** de F_R .

El método consiste en considerar una **carga equivalente** de un **bloque de líquido encerrado** directamente por encima de la superficie curva de la placa de ancho constante, como se aprecia en la figura adjunta.



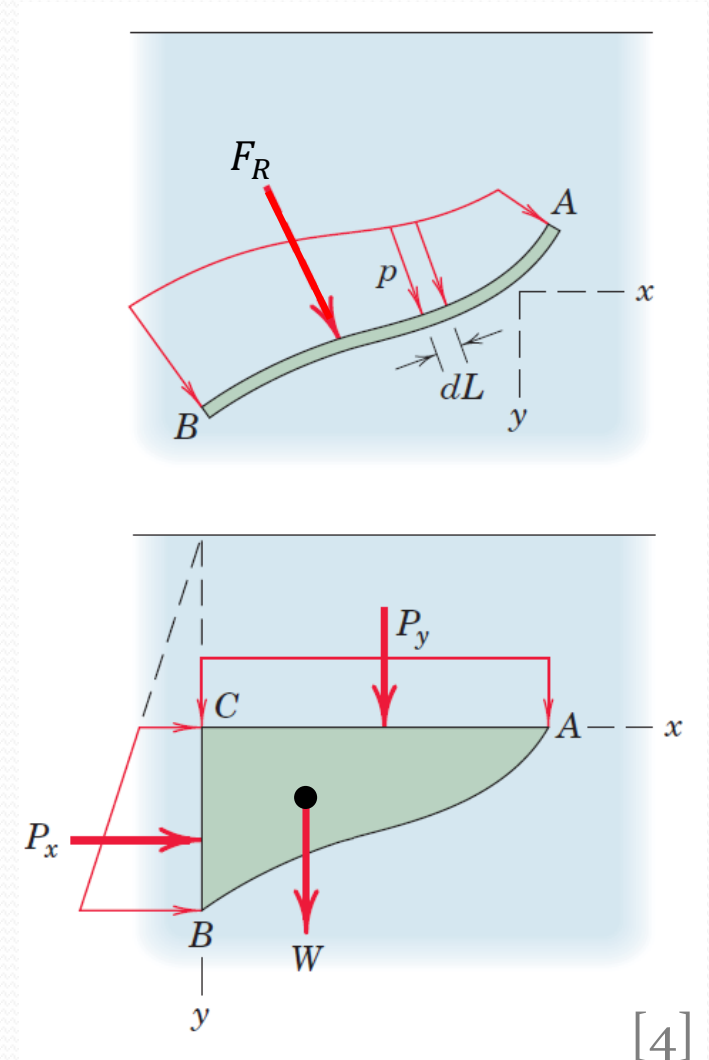
7.2 Presión de un fluido

Placa curva de ancho constante

El bloque de líquido encerrado posee un peso W , el cual debe pasar por el **centroide del área ABC**. Dicho peso se define mediante la siguiente expresión:

$$W = \gamma b A_{ABC}$$

Donde, γ es el peso específico del fluido y b es el ancho constante de la placa curva.

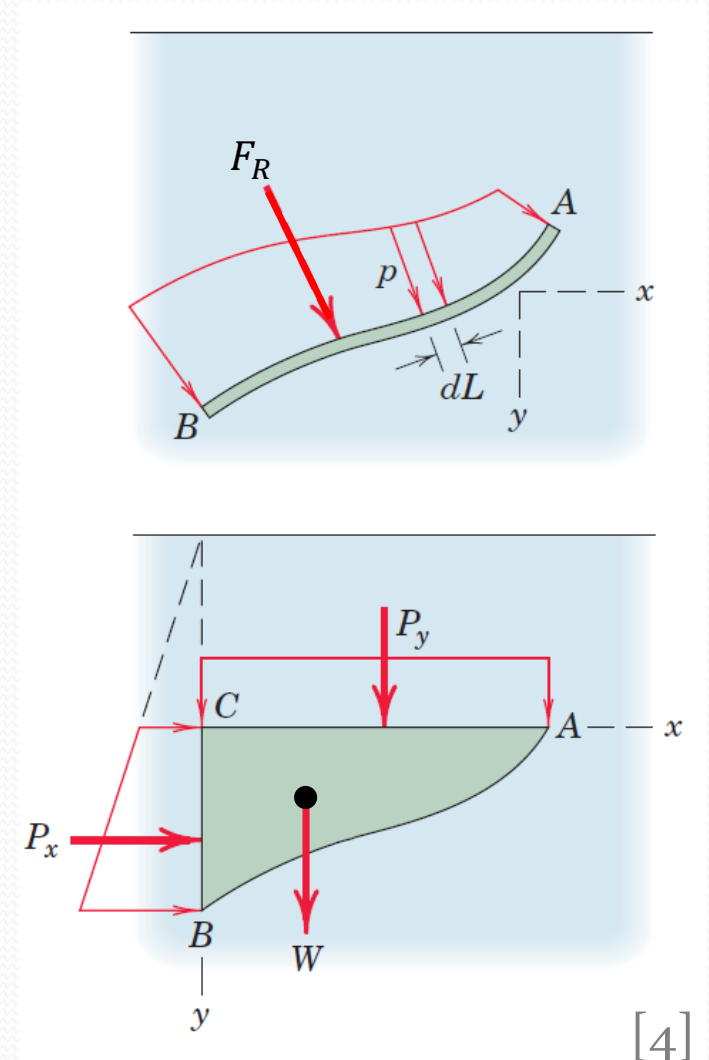


7.2 Presión de un fluido

Placa curva de ancho constante

Sobre las **superficies planas** del bloque se analiza las otras componentes de la fuerza resultante.

Las resultantes de presión a lo largo de las superficies CB y AC son P_x y P_y , respectivamente, las cuales son relativamente fáciles de obtener.



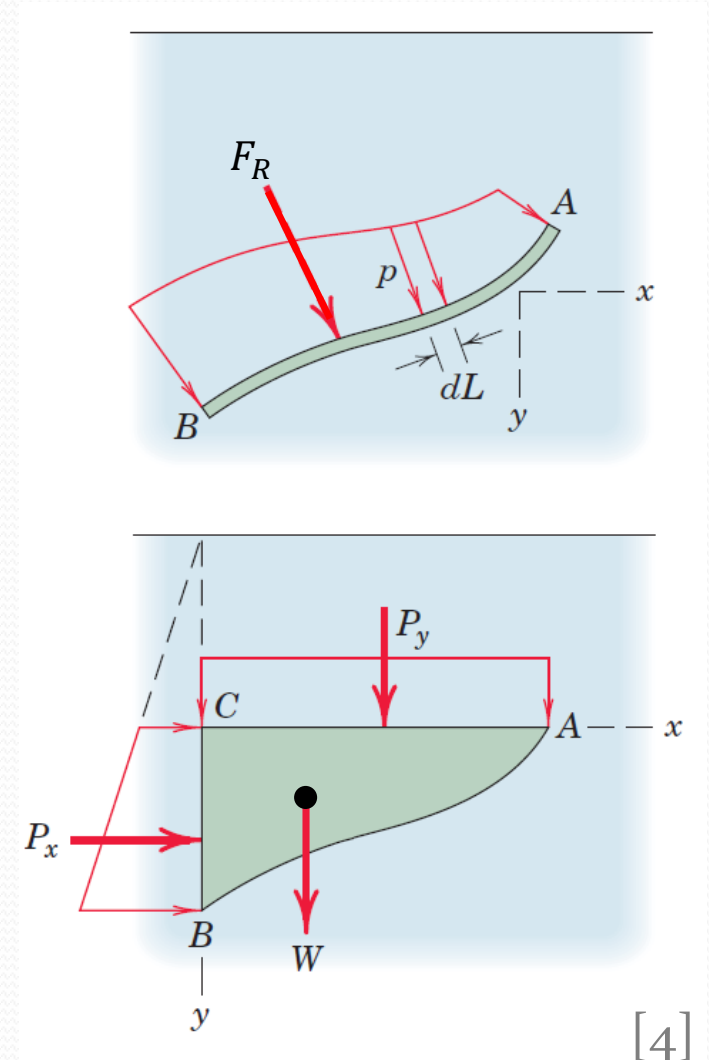
7.2 Presión de un fluido

Placa curva de ancho constante

La **suma de los tres vectores fuerza** es igual a la fuerza resultante F_R .

$$\bar{F}_R = \bar{P}_x + \bar{P}_y + \bar{W}$$

La ubicación del **centro de presión** sobre la placa se determina de la intersección entre la superficie y la **línea de acción** que resultada de la reducción del sistema a una **fuerza única**.



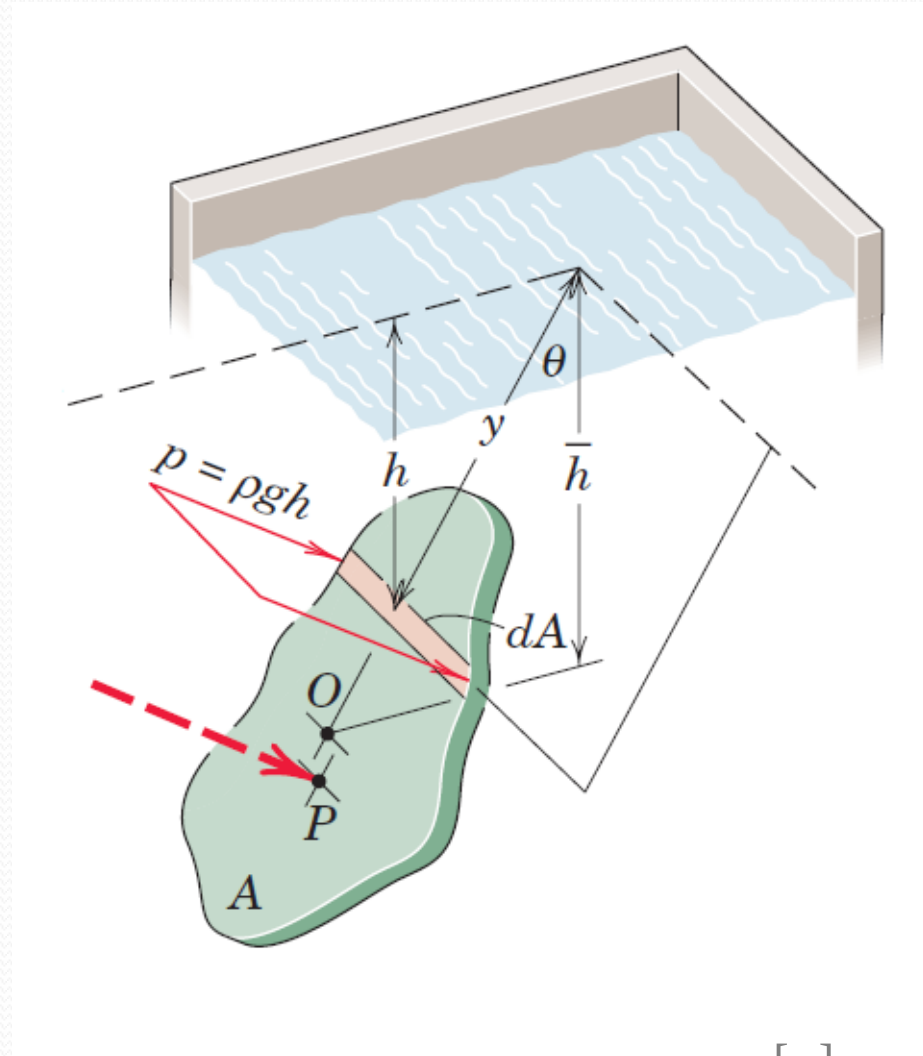
7.2.3

Placa plana de ancho variable

7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho variable

Cuando la placa sumergida es curva de ancho constante, la presión que actúa en forma normal al área superficial de la placa cambia su dirección de manera continua, y por tanto, estimar la **fuerza resultante** F_R y el **centro de presión** es más difícil que para una placa plana.



[4]

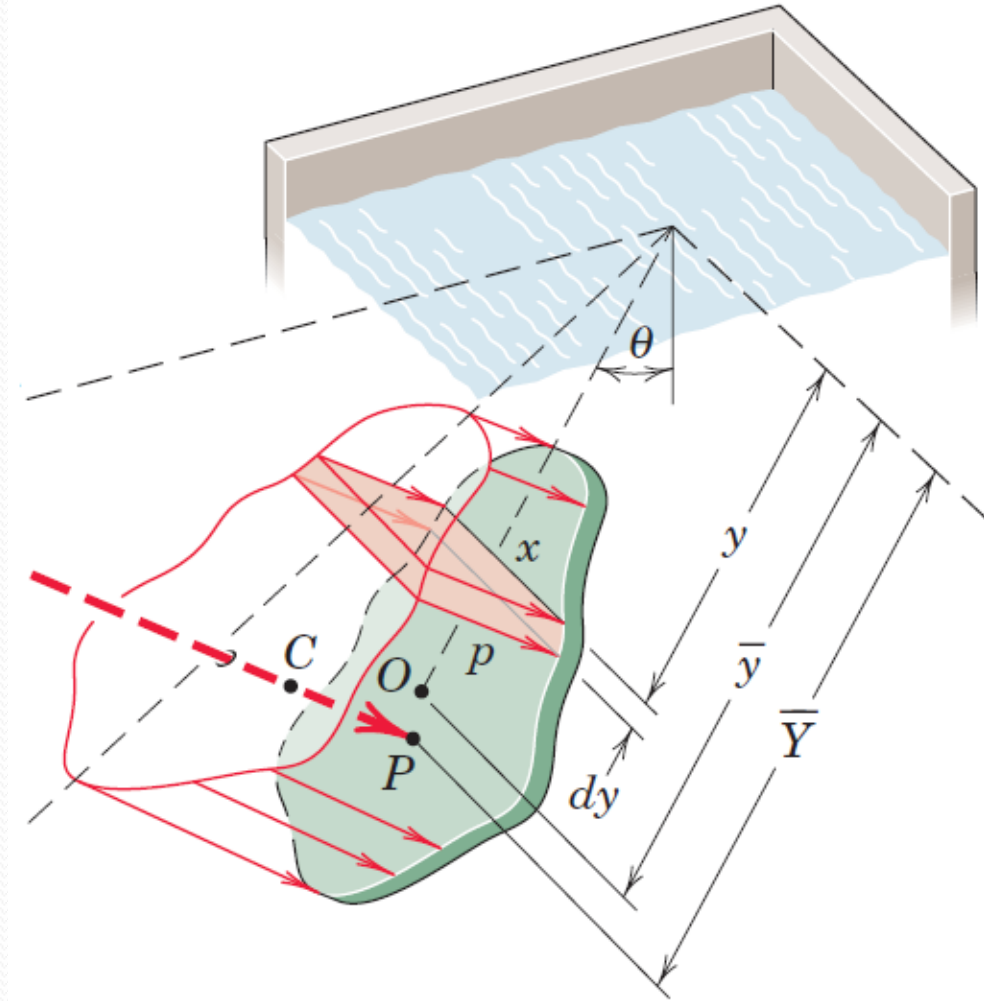
7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho variable

1ra Forma

La fuerza resultante F_R es igual a:

$$\begin{aligned} F_R &= \int p \, dA = \int \gamma h_{(y)} dA \\ &= \gamma \int h_{(y)} x \, dy \end{aligned}$$



[4]

7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho variable

2da Forma

La fuerza resultante F_R es igual a:

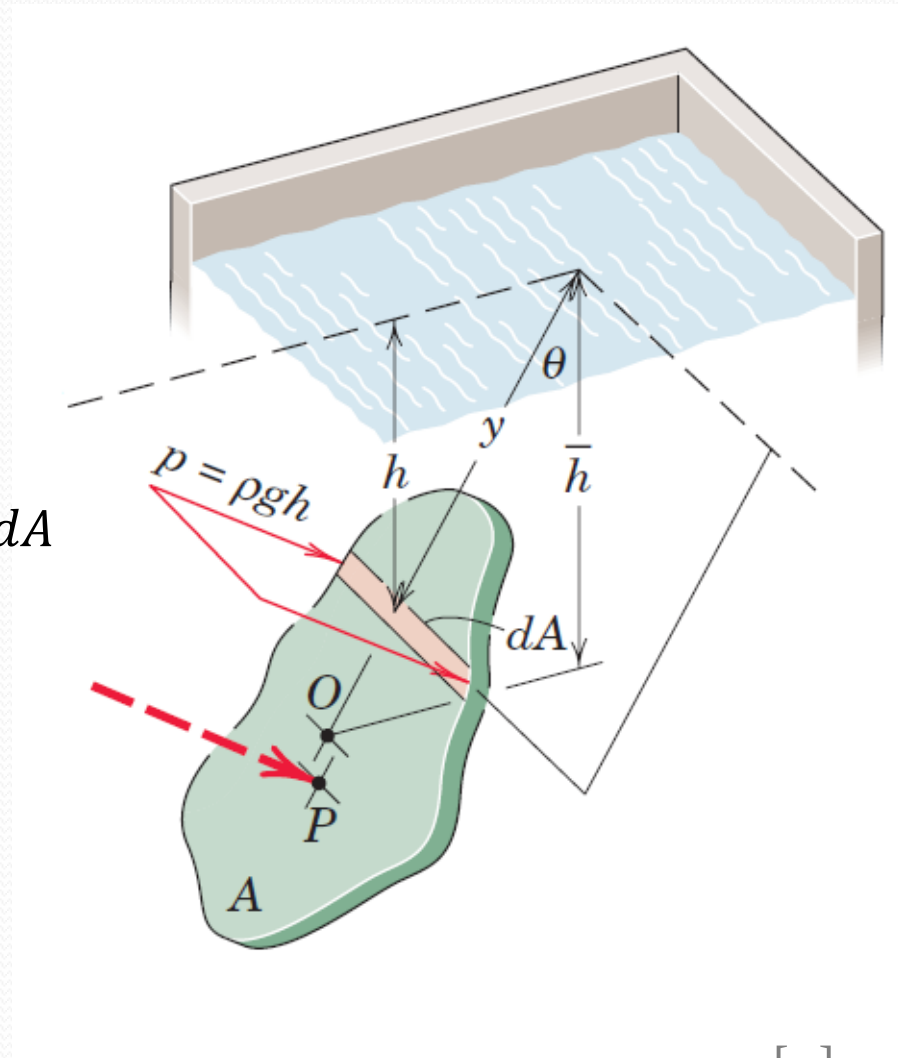
$$F_R = \int p \, dA = \int \gamma \, h_{(y)} \, dA = \gamma \int h_{(y)} \, dA$$

Donde,

$$\bar{h} = \frac{\int h \, dA}{\int dA}$$

Reemplazando

$$F_R = \gamma \bar{h} \int dA = \gamma \bar{h} A$$



[4]

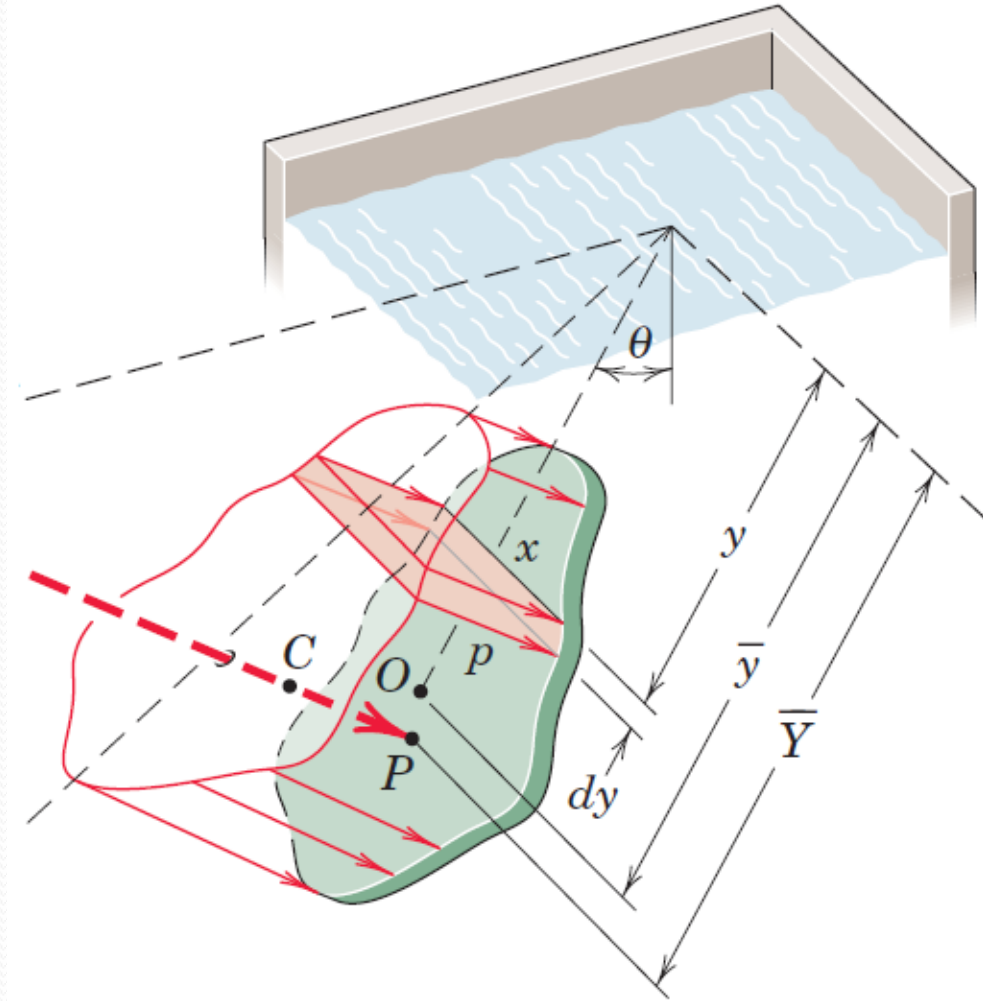
7.2 Presión de un fluido

Placa plana de ancho variable

Centro de presión

El centro de presión debe ser determinado por integración.

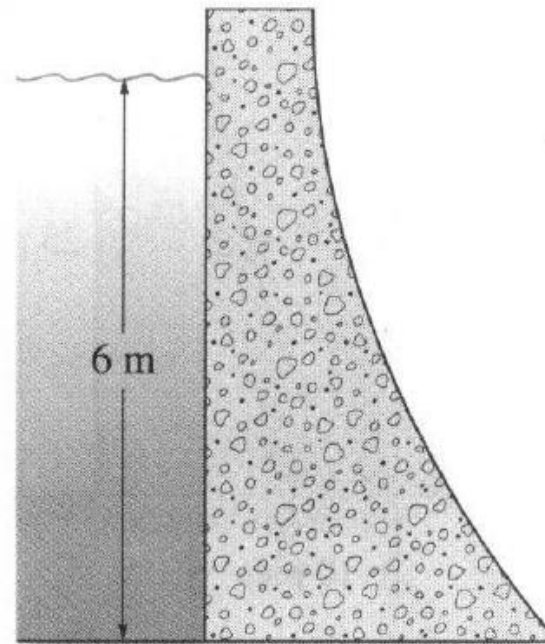
$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \frac{\int y dV}{\int dV} = \frac{\int y \gamma h_{(y)} dA}{\int \gamma h_{(y)} dA} \\ &= \frac{\gamma \int h_{(y)} y x dy}{F_R}\end{aligned}$$



[4]

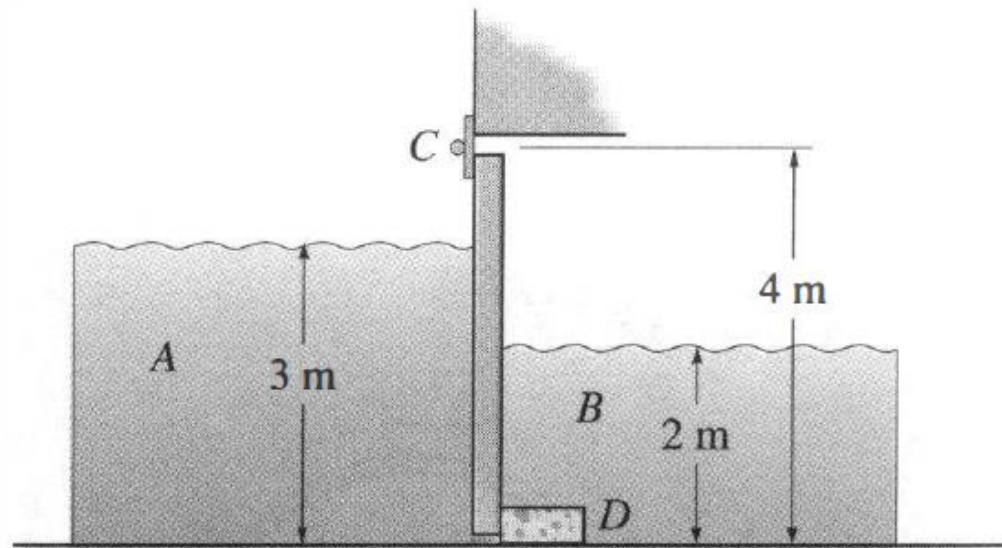
Ejercicios propuestos

9-106. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la presa y su ubicación, medida desde la superficie superior del agua. El ancho de la presa es de 8 m; $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



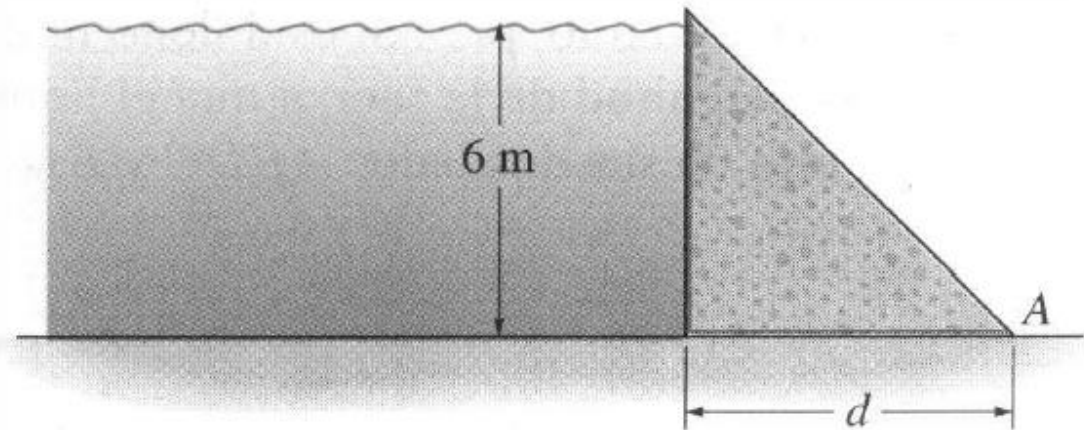
[2]

***9-108.** Cuando el agua de la marea *A* desciende, la compuerta de marea gira automáticamente abriéndose para drenar el agua de la ciénaga *B*. Para la condición de marea alta mostrada, determine las reacciones horizontales desarrolladas en la articulación *C* y en el tope *D*. La longitud de la compuerta es de 6 m y su altura de 4 m. $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



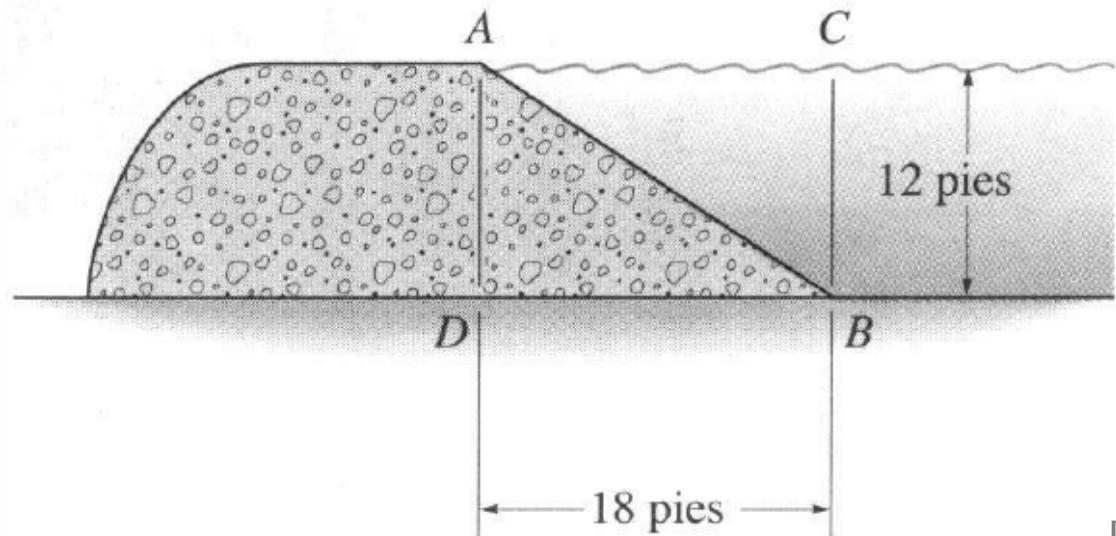
[2]

9-109. La presa de “gravedad” de concreto es mantenida en su lugar por su propio peso. Si la densidad del concreto es $\rho_c = 2.5 \text{ Mg/m}^3$, y el agua tiene una densidad de $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$, determine la dimensión d más pequeña que impedirá que la presa se voltee alrededor de su extremo A .



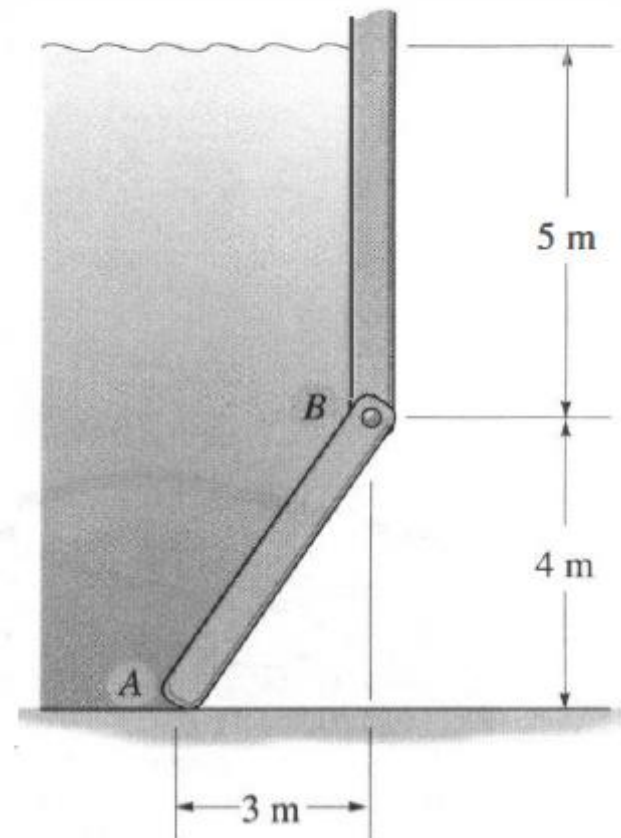
[2]

9-110. La presa de concreto está diseñada de manera que su cara AB tiene una pendiente gradual en el agua como se muestra. Debido a esto, la fuerza de fricción en la base BD es incrementada por la fuerza hidrostática del agua actuando sobre la presa. Calcule la fuerza hidrostática que actúa sobre la cara AB de la presa, la cual tiene 60 pies de ancho. $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/pie}^3$.



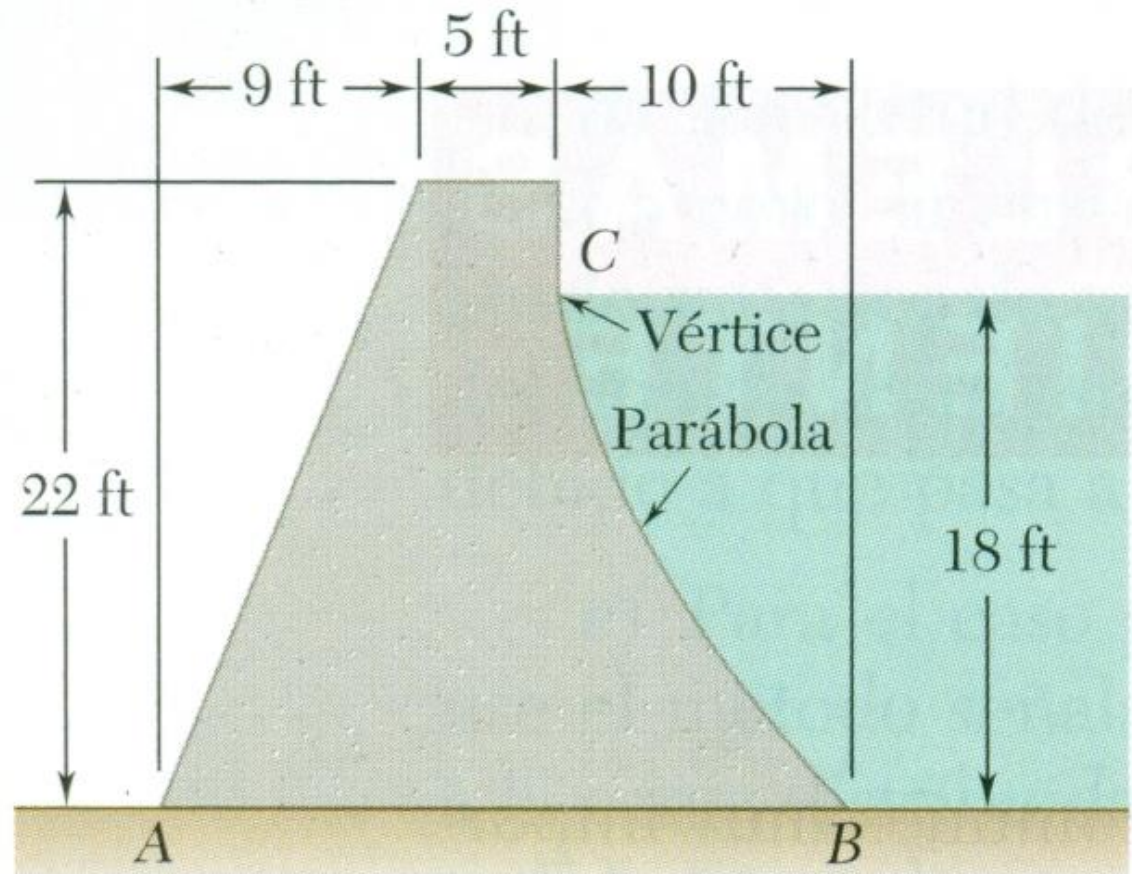
[2]

9-114. La compuerta AB tiene 8 m de ancho. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre el pasador en B y la reacción vertical en el soporte liso A . $\rho_{\text{agua}} = 1.0 \text{ Mg/m}^3$.



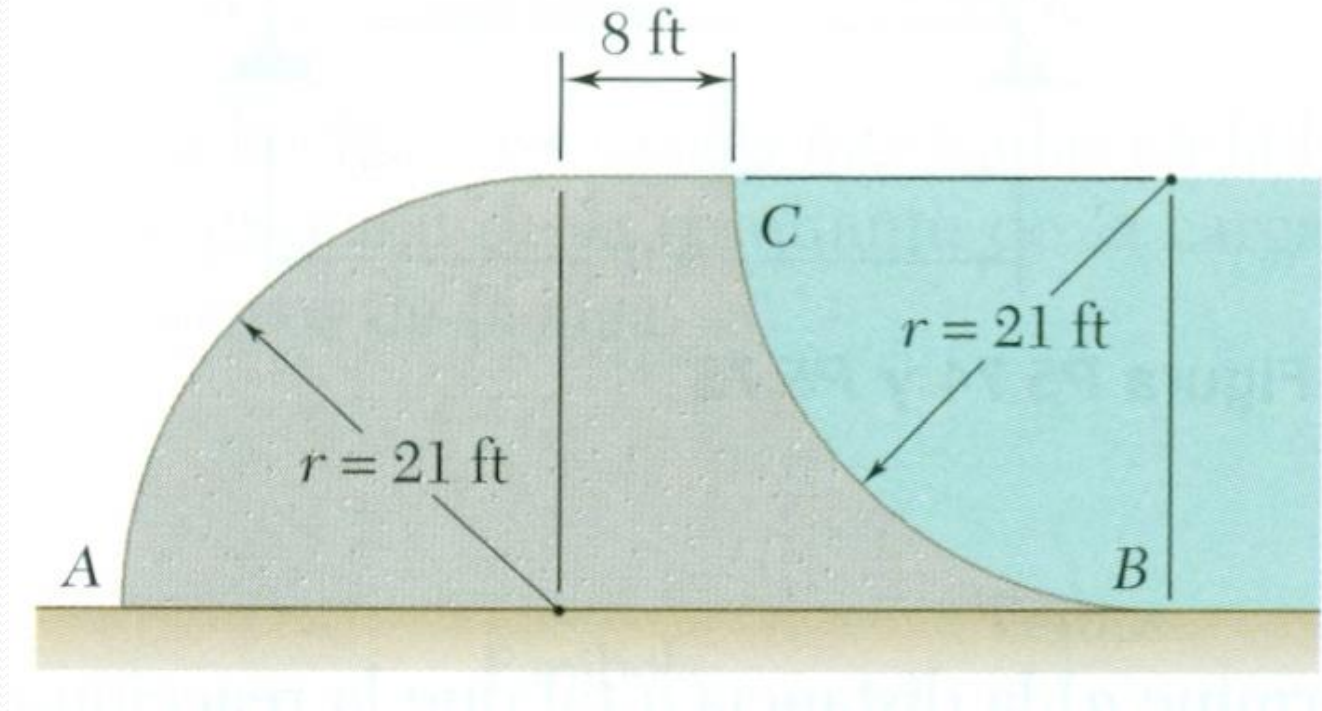
[2]

Determinar la dirección de la resultante de las fuerzas de presión



Rpta. : 36.53°

Determinar la dirección de la resultante de las fuerzas de presión

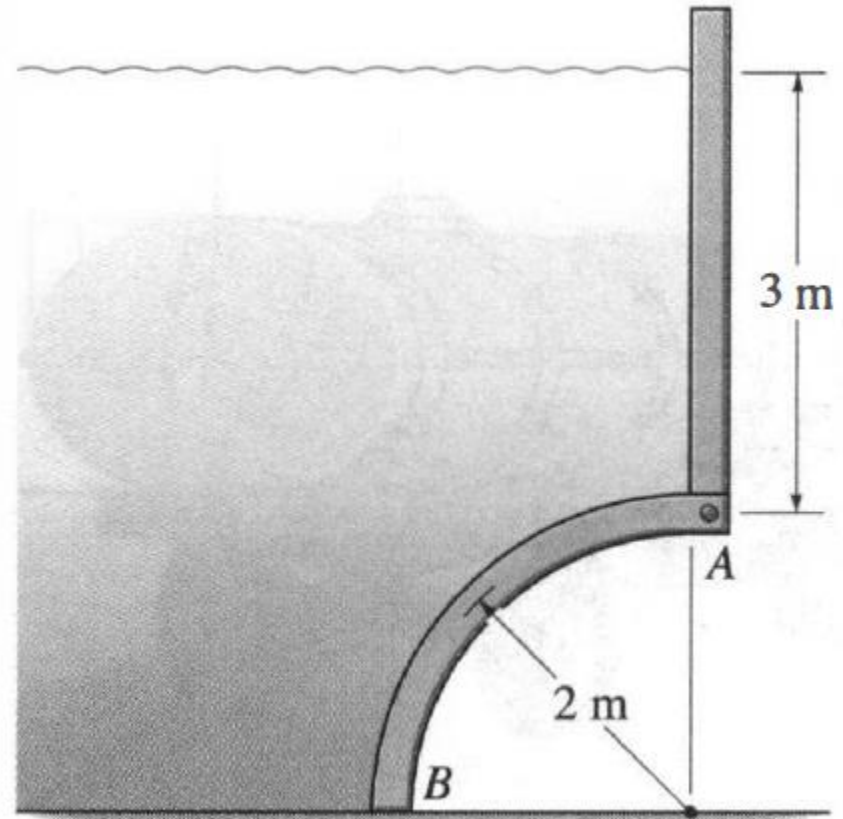


Rpta. : 57.5°

Pregunta 1.

La superficie AB en arco tiene la forma de un cuarto de círculo. Si mide 8 metros de longitud (profundidad), determinar las componentes horizontales y verticales de la fuerza resultante causada por el agua actuando sobre dicha superficie.

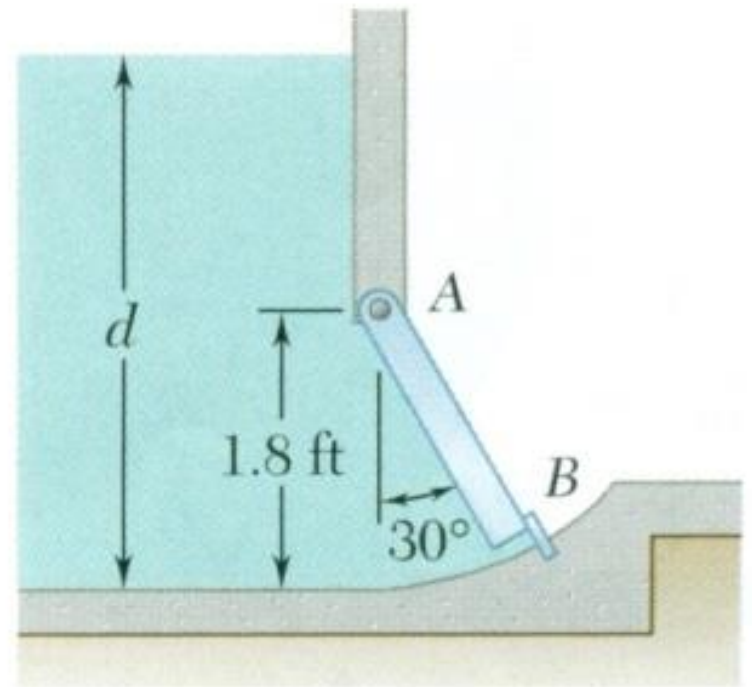
Rpta: $F_{Rx} = 627.8 \text{ kN}$



Pregunta 2.

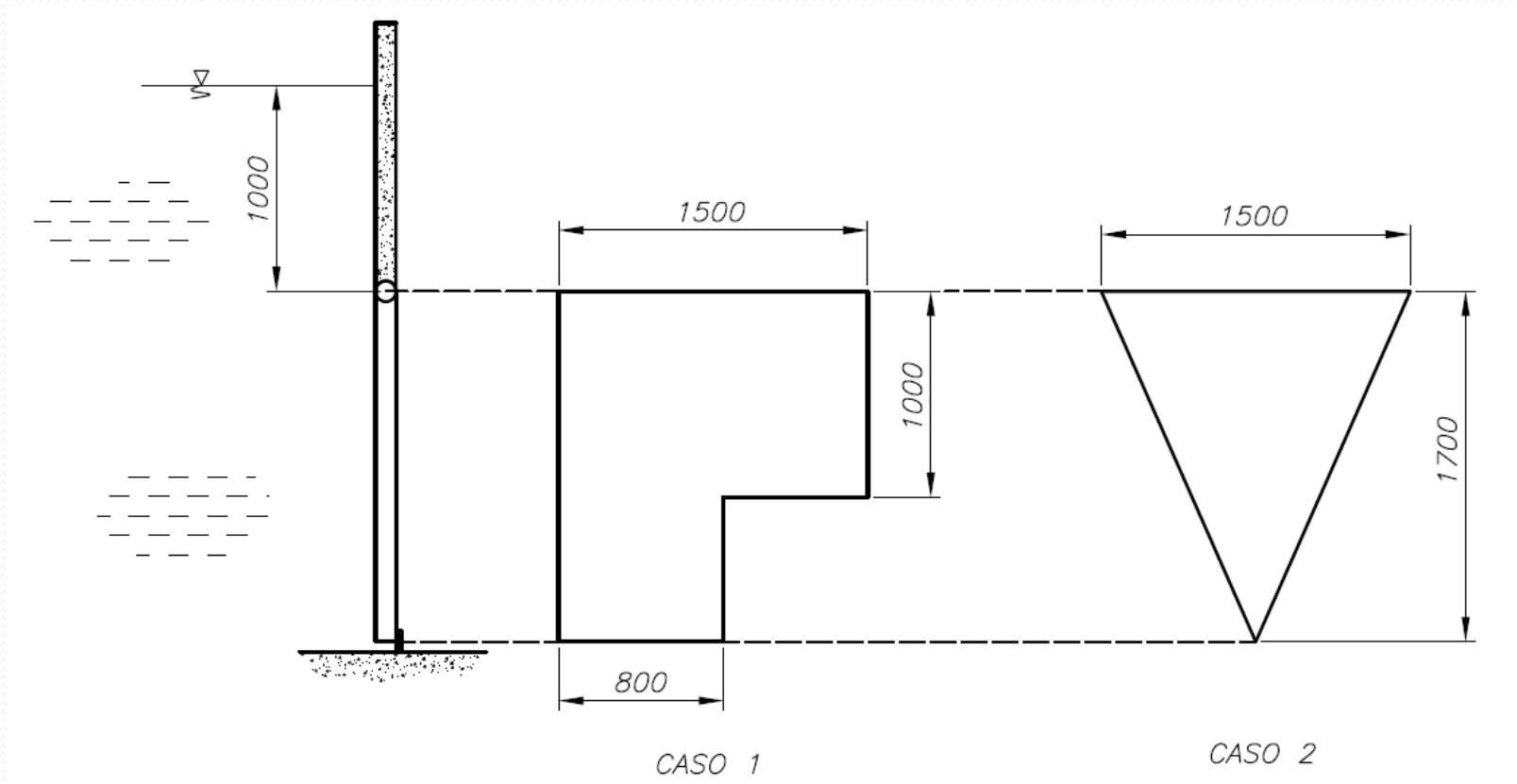
La compuertas cuadrada AB se mantiene en la posición mostrada en la figura mediante bisagras a lo largo de su extremo superior A y por medio de un pasador cortante en B. Determinar la fuerza ejercida por el pasador sobre la compuerta si la profundidad del agua es $d = 3.5$ ft.

Rpta: $R_B = 276.9$ lb



Pregunta 3.

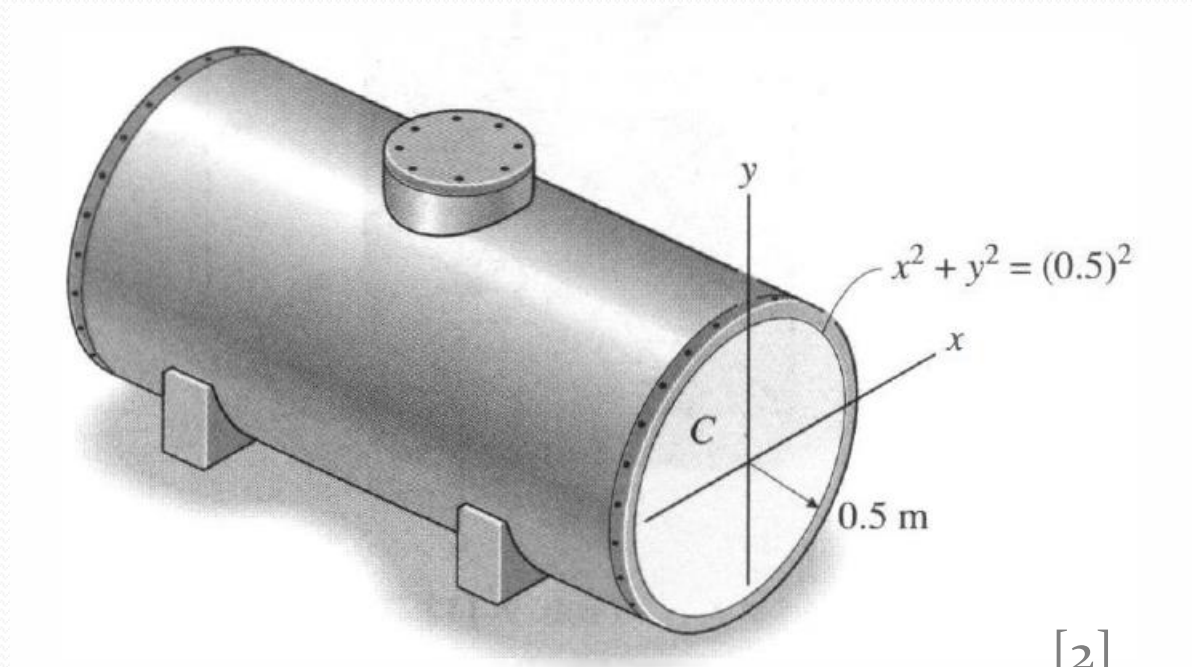
Determinar el centro de presión del agua sobre la compuerta en cada caso.
Medidas en mm. Rpta: Caso 1: 0.844m medido desde el fondo.



Pregunta 4.

El tanque está lleno hasta el tope ($y=0.5$ m) con agua cuya densidad es de 1.0 Mg/m^3 . Determinar la fuerza resultante de la presión del agua que actúa sobre la placa C plana del extremo del tanque.

Rpta: $F = 3.85 \text{ kN}$

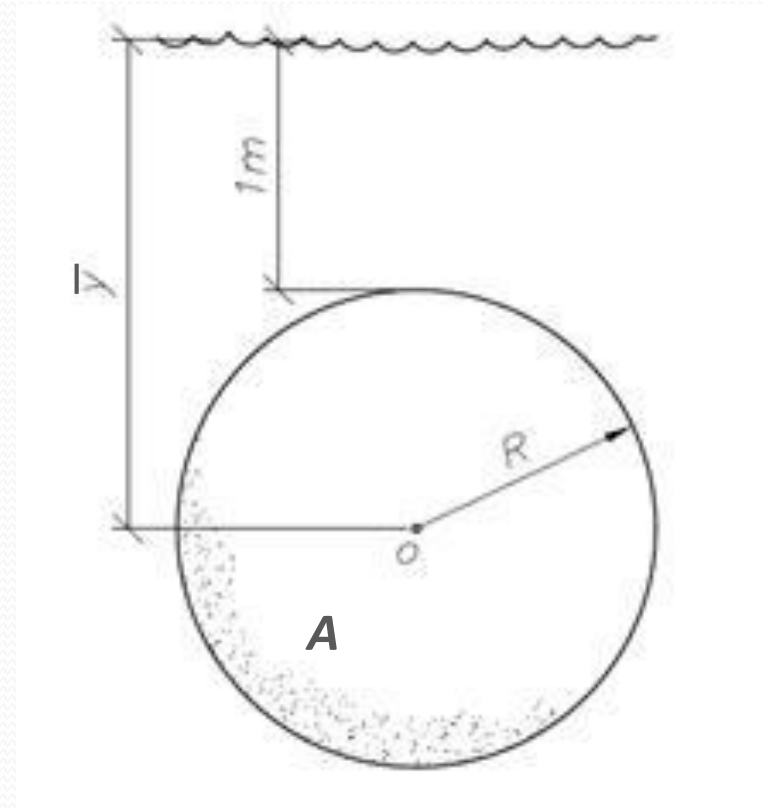


[2]

Pregunta 5.

Calcular el radio de la ventana circular sumergida para lograr que la fuerza ejercida debido al agua sobre dicha ventana sea igual a 6.28 toneladas

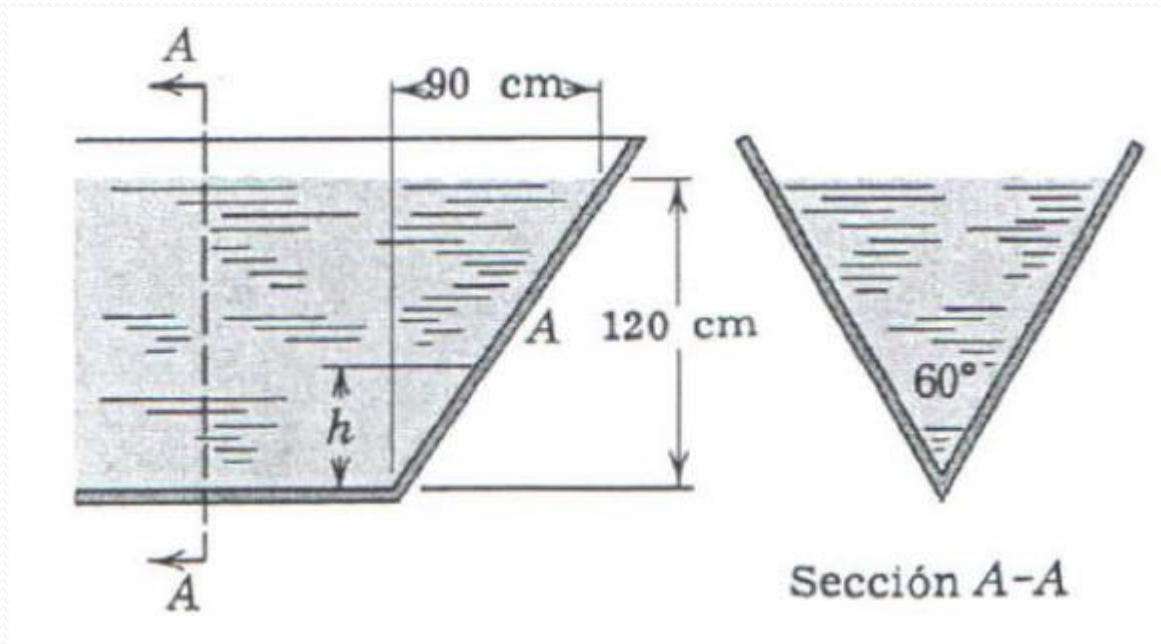
Rpta: $F = 3.14 \gamma (R + 1)R^2$



Pregunta 6.

En el canal de sección triangular de la figura se fija la placa triangular inclinada A. Calcular la resultante R de las fuerzas ejercidas sobre A por el agua y la altura h del centro de presión.

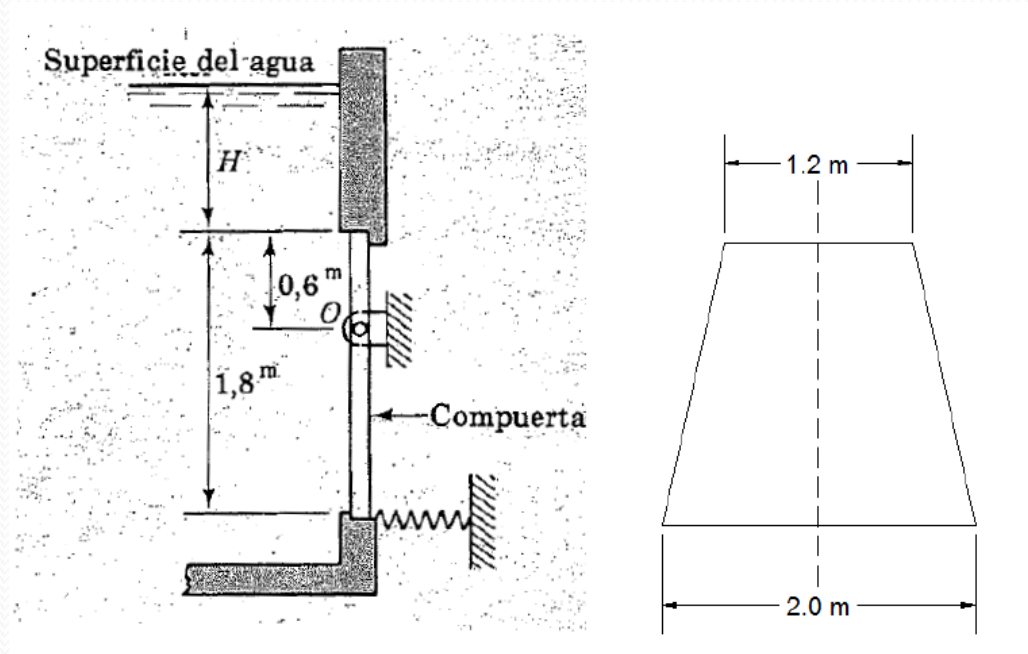
Rpta: $h = 60\text{ cm}$

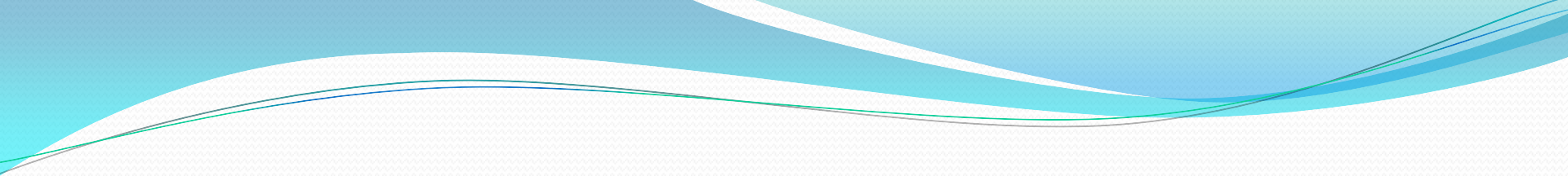


Pregunta 7.

La compuerta trapezoidal representada en la figura tiene un resorte que se encarga de mantenerla cerrada. Cuando la compuerta está cerrada la fuerza de compresión sobre el resorte vale 15 kN. Calcule el valor de H para que la compuerta empiece a abrirse, si O es un punto de articulación de la compuerta.

.Rpta: $H = 2\text{ cm}$





Imágenes tomadas de las siguiente bibliografía:

- [1] Hibbeler R.C. (2010). Estática. Ed. 12.
- [2] Hibbeler R.C. (2004). Estática. Ed. 10.
- [3] Bedford A. (2006). Estática. Ed. 5.
- [4] Meriam J.L. (2006). Estática. Ed. 7.