Resistencia de Materiales 1A

Profesor Herbert Yépez Castillo

2015-1

Capítulo 4. Carga axial

1.1 Introducción

- El esfuerzo es un medio para medir la distribución de la fuerza dentro de un cuerpo.
- Deformación unitaria es un medio para medir la deformación de un cuerpo.
- La ley de Hooke es una relación matemática que relaciona el esfuerzo y la deformación unitaria.

1.1 Introducción

- Se requiere de una relación que vincule las cargas con el desplazamiento.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

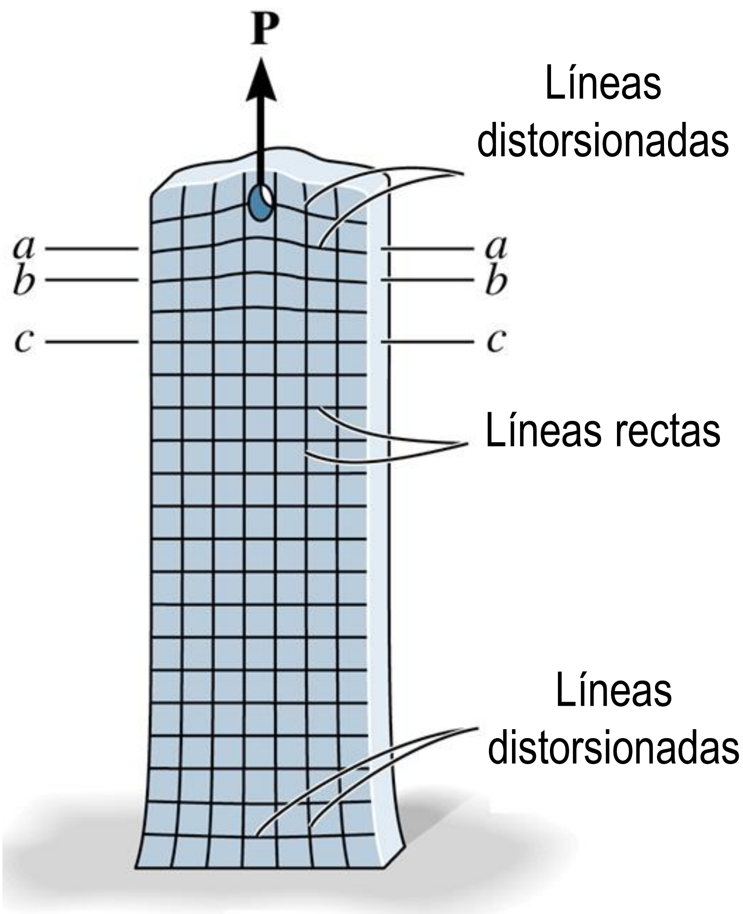
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & P \arrow[d, leftrightarrow] \\
\epsilon \arrow[r, leftrightarrow] & \delta
\end{tikzcd}$$

$$??$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{L}$$

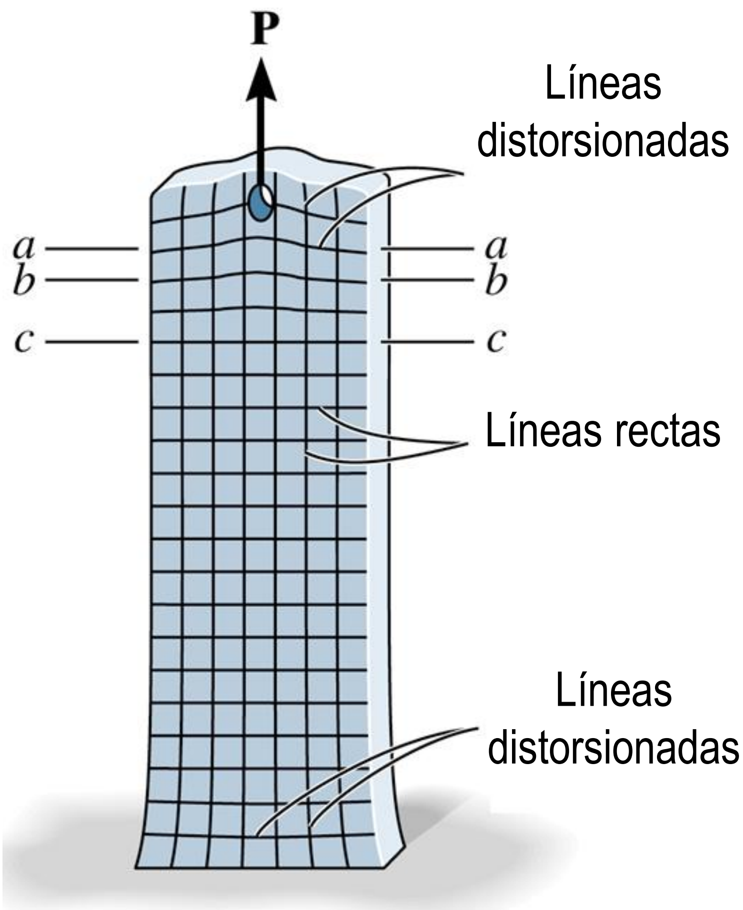
4.2 Principio de Saint-Venant



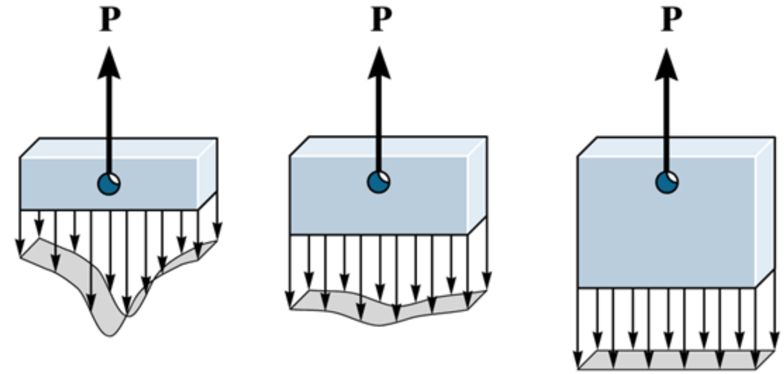
(a)

- Una barra se deforma elásticamente cuando es sometida a una carga P a lo largo de su eje centroidal.
- La barra está fija en un extremo y sometida a la carga P del otro extremo.
- La deformación de la barra se manifiesta mediante la distorsión de la rejilla.
- Se exhibe deformación localizada en los extremos, la cual decrece a medida que se alejan de los mismos.

4.2 Principio de Saint-Venant



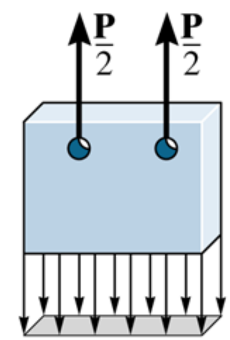
(a)



Sección a-a   *Sección b-b*

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Sección c-c

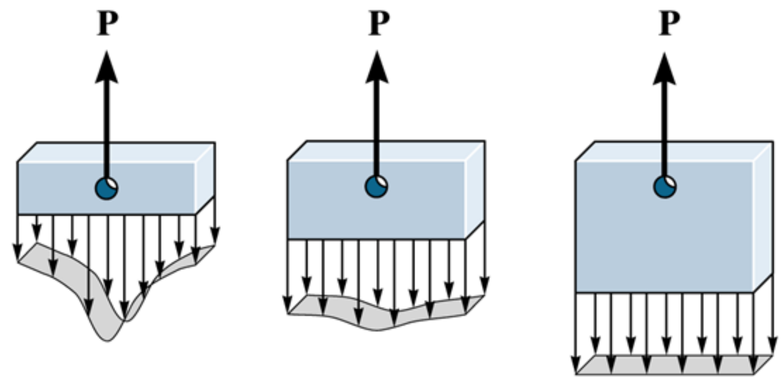


$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Sección c-c

4.2 Principio de Saint-Venant

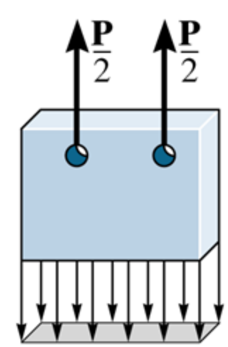
- Como regla general, la distancia mínima desde el extremo de la barra a partir de la cual la deformación local se desvanece es superior o igual a la dimensión mayor de la sección transversal.
- El principio de Saint-Venant postula que los efectos locales se disipan en aquellas regiones que estén lo suficientemente alejadas de los puntos de aplicación de las cargas.



Sección a-a *Sección b-b*

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Sección c-c



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Sección c-c

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

- Utilizando la ley de Hooke, los conceptos de esfuerzo y deformación unitaria, se desarrolla una relación matemática que vincula la carga aplicada con los desplazamientos.

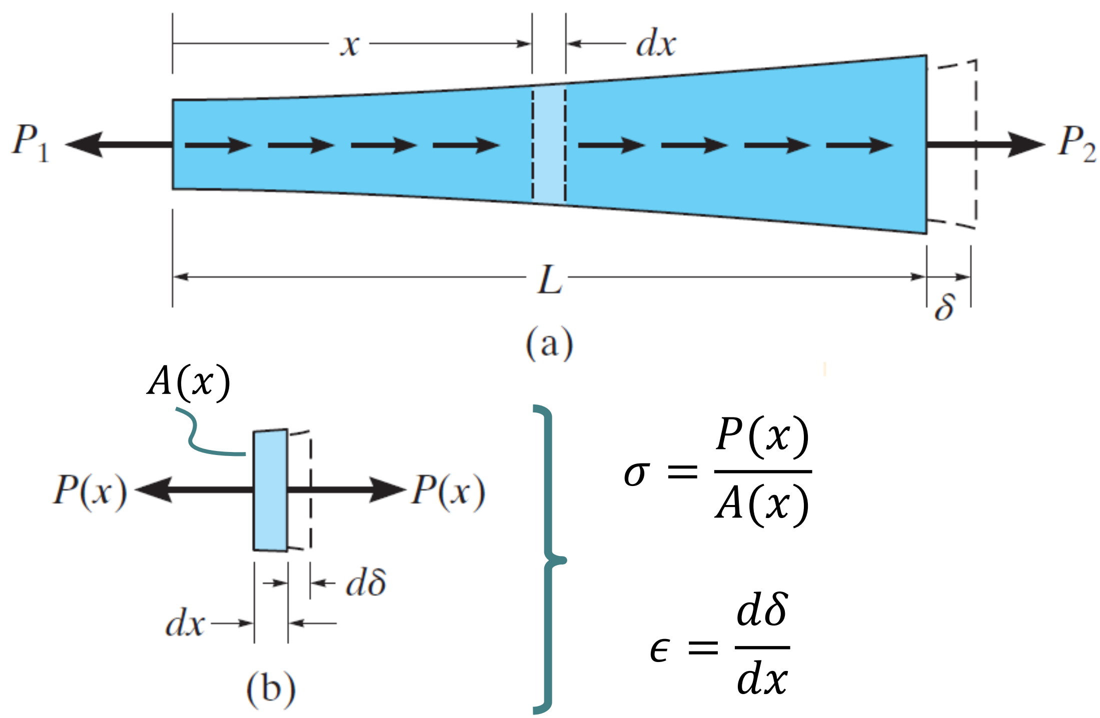
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \qquad \begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & P \arrow[d, leftrightarrow] \\ \epsilon \arrow[r, leftrightarrow] & \delta \end{tikzcd} \qquad ??$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{L}$$

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

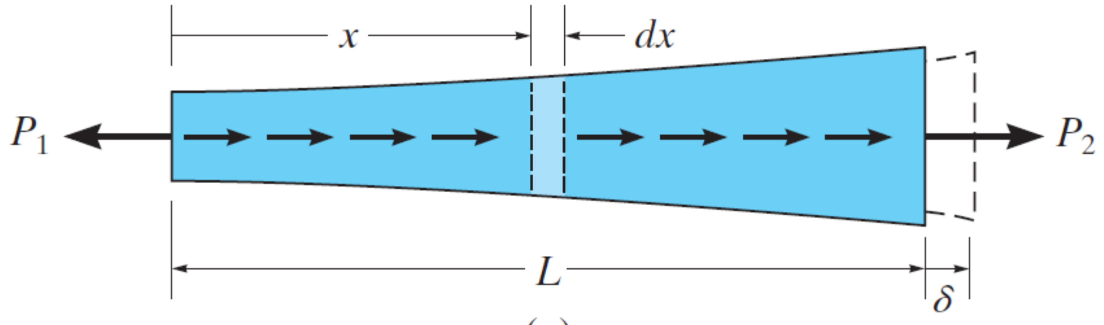
- Se toma una barra de sección variable y carga distribuida
- Se define un diferencial de la barra con la finalidad de determinar el desplazamiento relativo δ de un extremo respecto al otro.



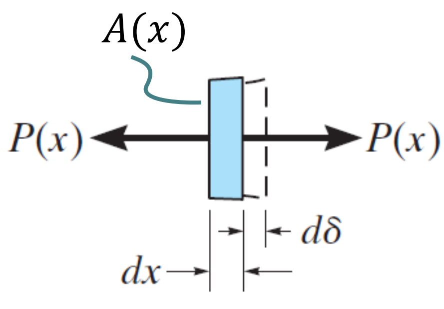
$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)}$$

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente



(a)



(b)

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)}$$

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

$$\sigma = E\,\epsilon$$

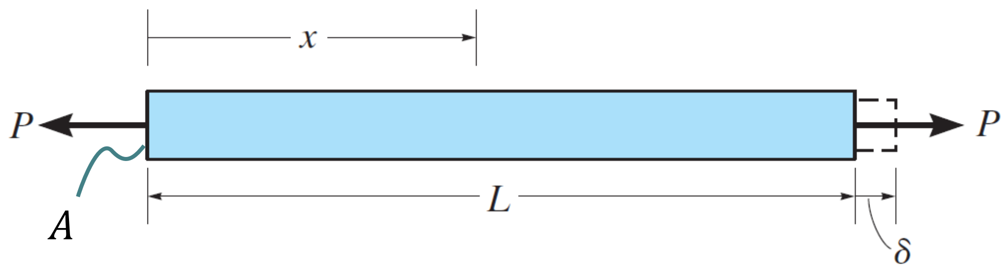
$$\frac{P(x)}{A(x)} = E\,\frac{d\delta}{dx}$$

$$d\delta = \frac{P(x)\,dx}{E\,A(x)}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{E\,A(x)}$$

δ: Desplazamiento relativo de un punto de la barra
L: Longitud original de la barra
$A(x)$: Área de la sección transversal en función de x
E: Módulo de elasticidad del material

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente



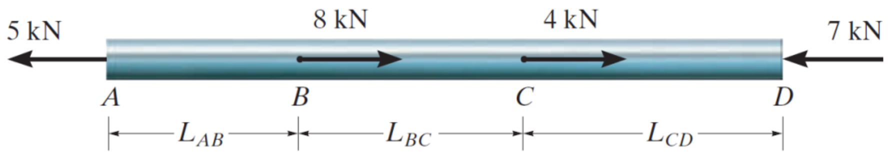
$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{E\,A(x)} = \frac{P}{E\,A}\int_0^L dx = \frac{P\,L}{E\,A}$$

$$\delta = \frac{P\,L}{E\,A}$$

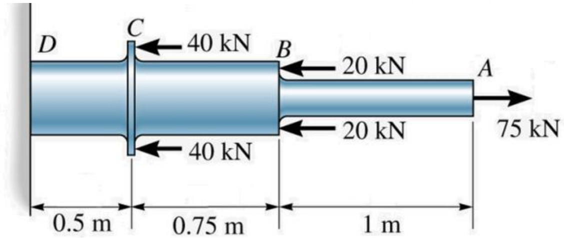
4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

Si la barra se somete a varias cargas diferentes, o el área de la sección transversal o el módulo de elasticidad cambia de un segmento a otro, entonces el desplazamiento se determina de la suma de los desplazamientos extremos de cada segmento.

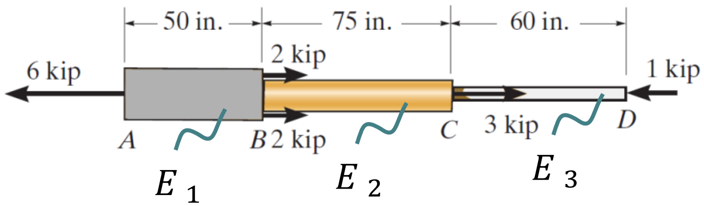
$$\delta = \Sigma \frac{PL}{EA}$$



$$\delta_{D/A} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$



$$\delta_{A/D} = \delta_{A/B} + \delta_{B/C} + \delta_{C/D}$$

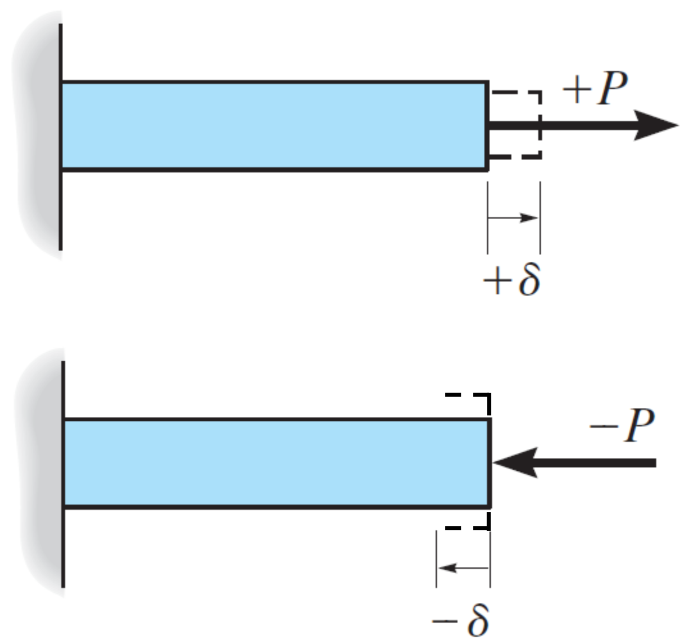


$$\delta_{D/A} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

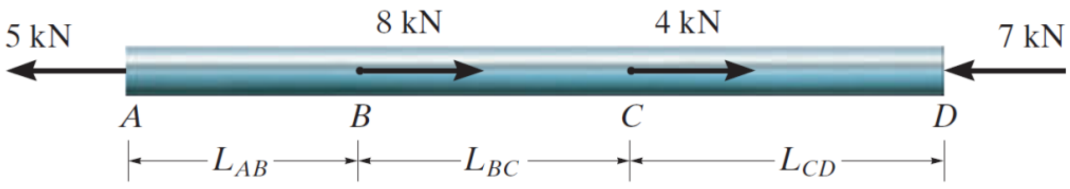
Por convención se determina que:

- La tensión y el alargamiento son positivas
- La compresión y la contracción son negativas



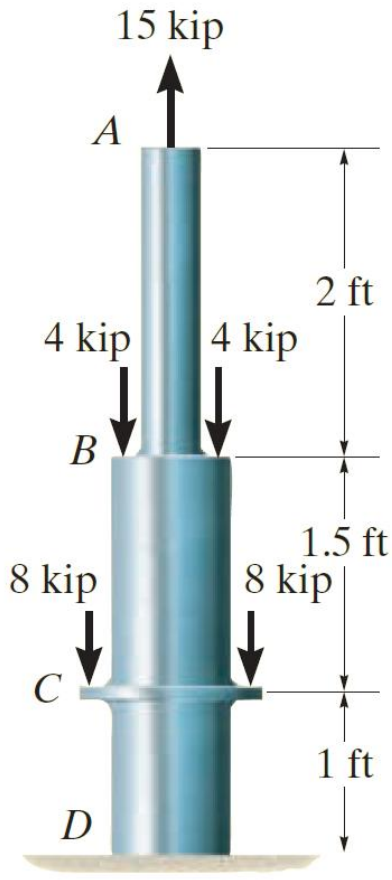
Problema 01 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el desplazamiento de D respecto a A



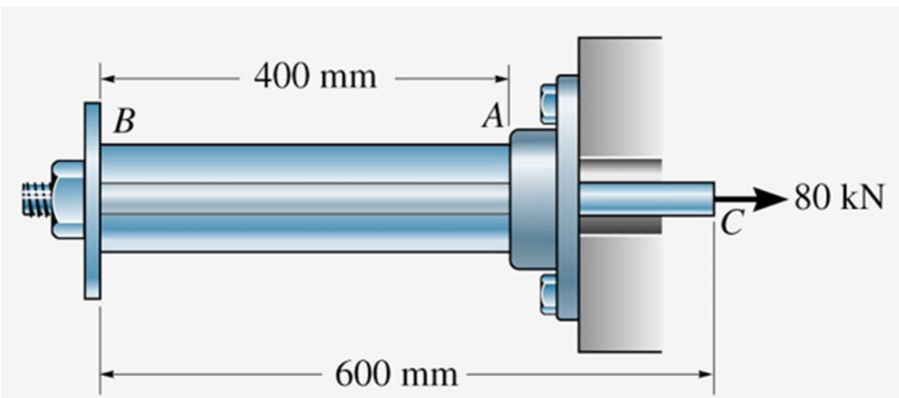
Problema 02 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el desplazamiento de A, si la sección transversal del segmento AB y BD son 1 y 2 in^2, respectivamente. Considerar que la barra de acero tiene un módulo de elasticidad igual a 29(10^3)ksi.



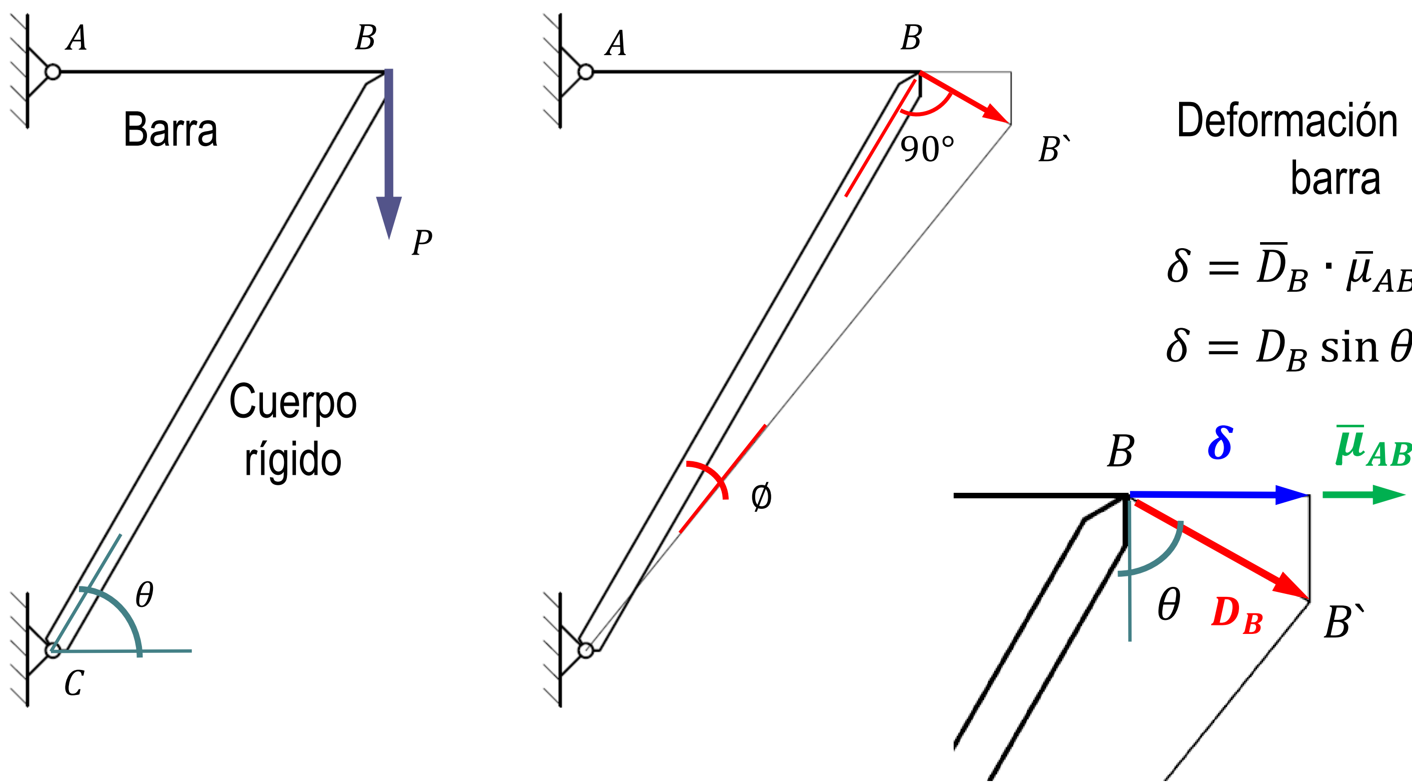
Problema 03 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el desplazamiento de C, si el tubo de aluminio AB tiene una sección de 400 mm^2 y un módulo de elasticidad de 70 GPa, y la barra de acero BC posee un diámetro de 10 mm y un módulo de Young igual a 200 GPa.



4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

Desplazamiento de nodos de sistemas de barras articuladas.



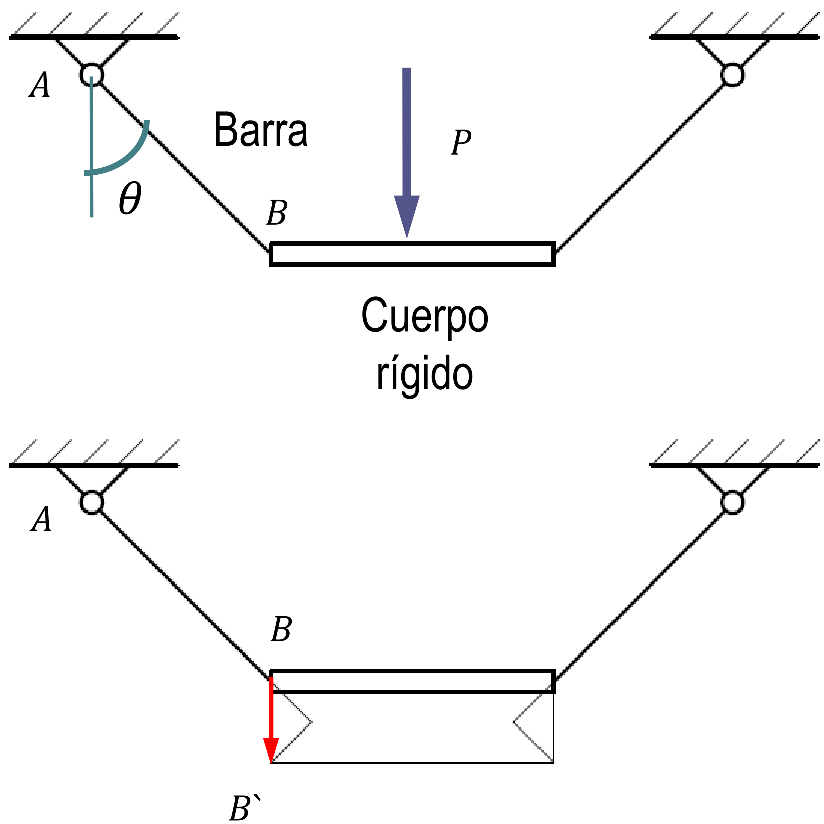
Deformación de la barra

$$\delta = \bar{D}_B \cdot \bar{\mu}_{AB}$$

$$\delta = D_B \sin\theta$$

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

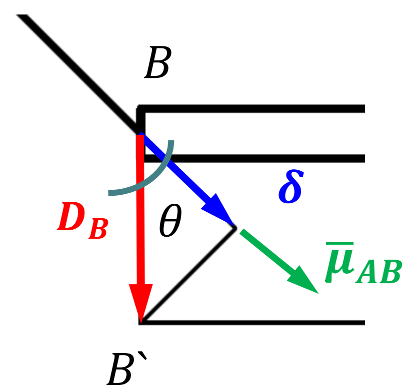
Desplazamiento de nodos de sistemas de barras articuladas.



Deformación de la barra

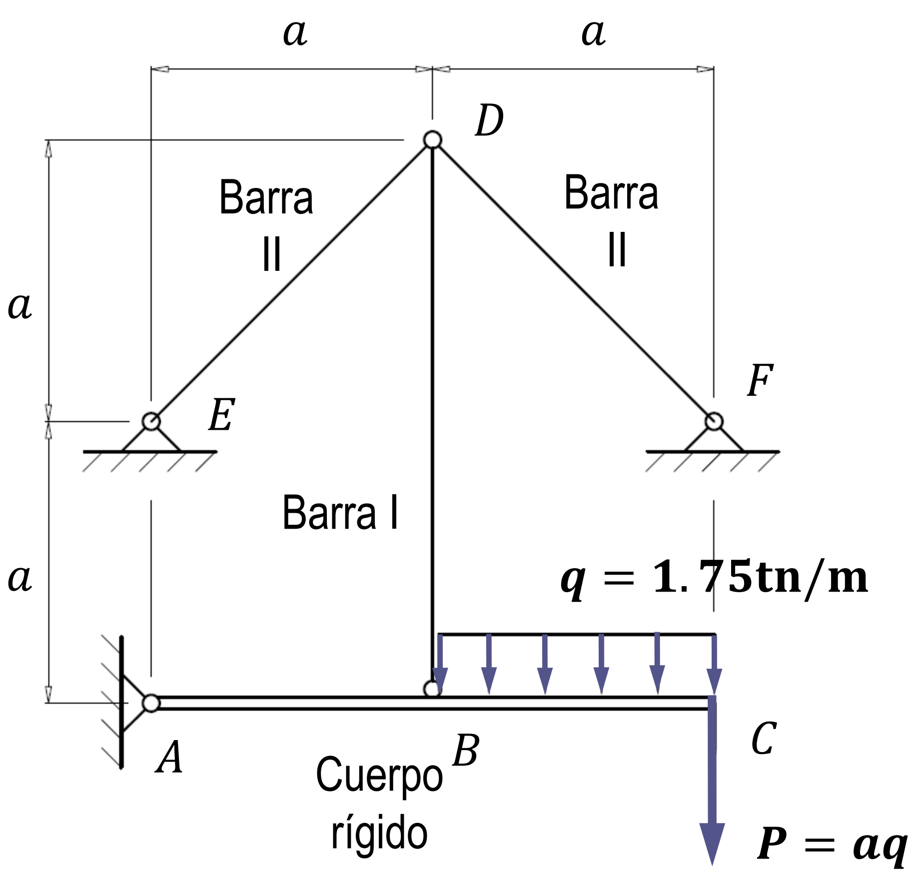
$$\delta = \bar{D}_B \cdot \bar{\mu}_{AB}$$

$$\delta = D_B \cos \theta$$



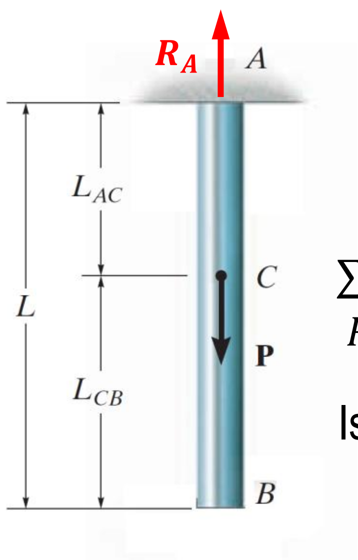
Problema 04

Determinar la fuerza de las barras, la deformación de las mismas y el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P, si E=2x10^6 kg/cm^2, A=1cm^2 y a=1m



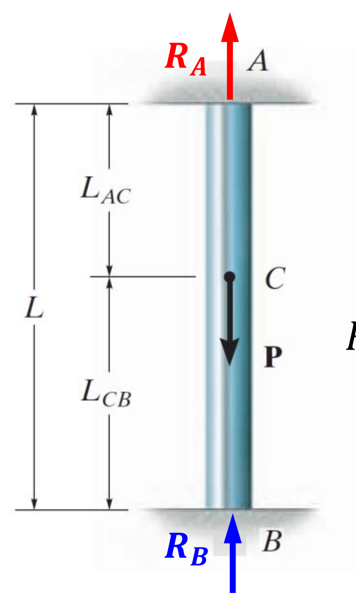
4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- Una barra empotrada en un extremo y sometida a una carga axial, es un problema donde la reacción se puede determinar por las ecuaciones de equilibrio **(Isostático).**
- La misma barra empotrada por sus dos extremos, es un problema donde **las ecuaciones de equilibrio no son suficientes** para determinar las dos reacciones. La barra está estáticamente indeterminada **(hiperestático).**



$$\sum F_y = 0$$
$$R_A = P$$

Isostático

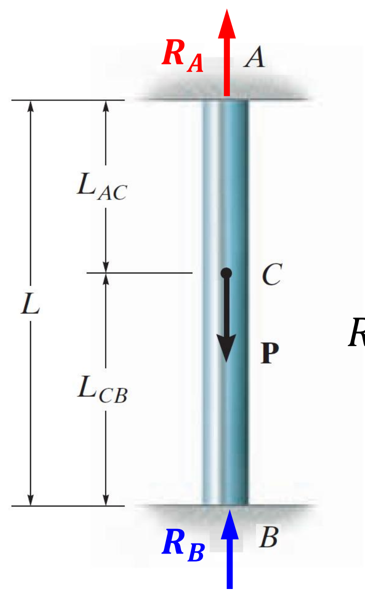


$$\sum F_y = 0$$
$$R_A + R_B = P$$

Hiperestático

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- Con el objetivo de establecer una ecuación adicional necesaria para dar una solución al problema, es preciso considerar la geometría de la deformación.
- Una ecuación que especifique las condiciones para el desplazamiento se llama **ecuación cinemático o de compatibilidad.**



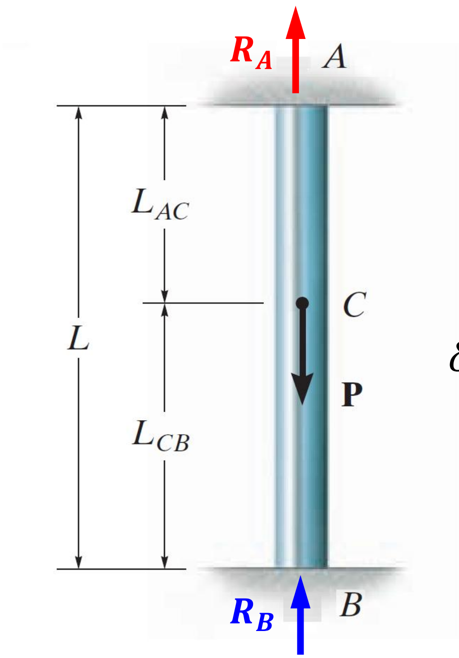
$$\sum F_y = 0$$
$$R_A + R_B = P$$

Hiperestático

Ecuación de equilibrio

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

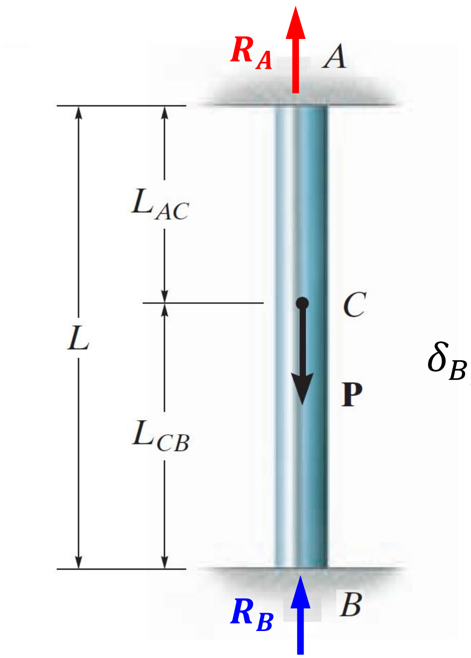
- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$\left.\begin{aligned} \delta_{B/A} &= 0 \\ \delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Ecuación de compatibilidad}$$

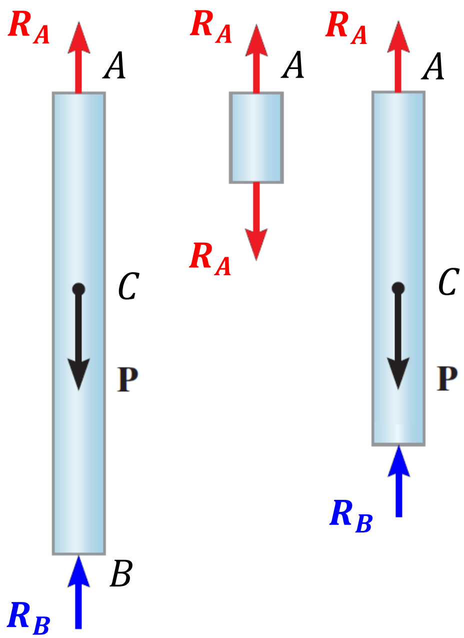
4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



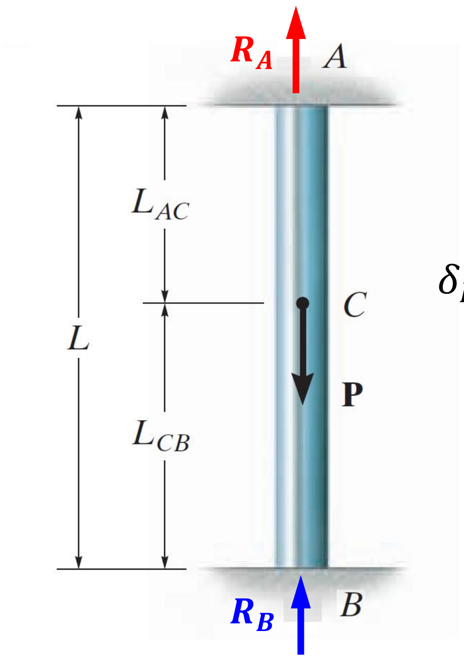
$$\delta_{B/A} = 0$$

$$\delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} = 0$$



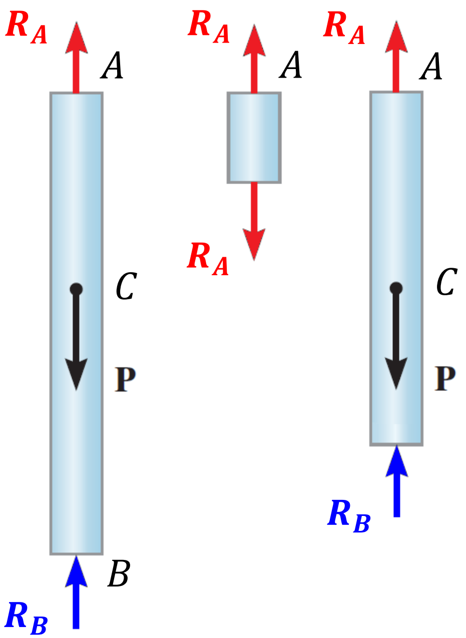
4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



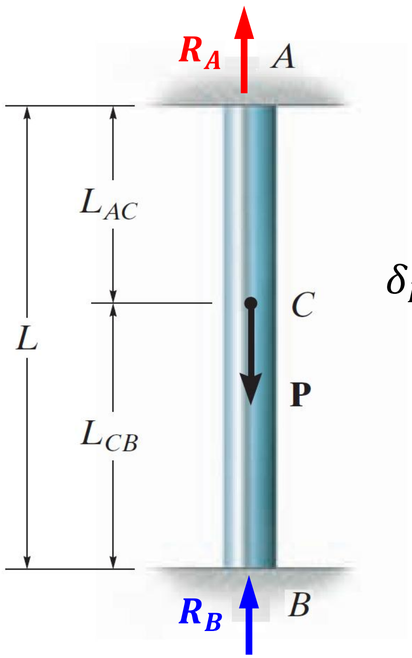
$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$



4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



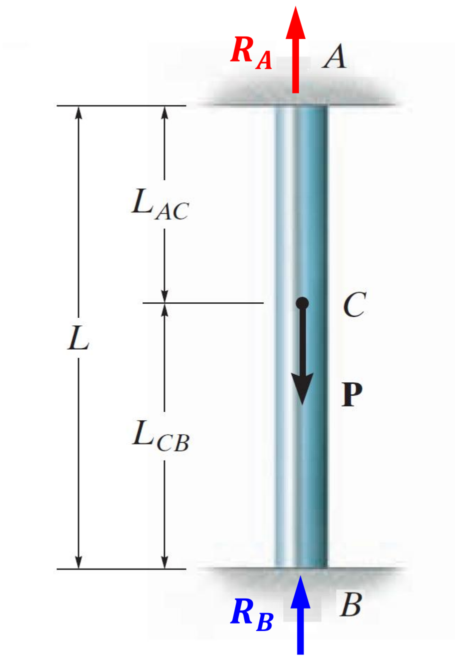
$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$

Ecuación constitutivas

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$R_A + R_B = P$$

Ecuación de equilibrio

$$\delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} = 0$$

Ecuación de compatibilidad

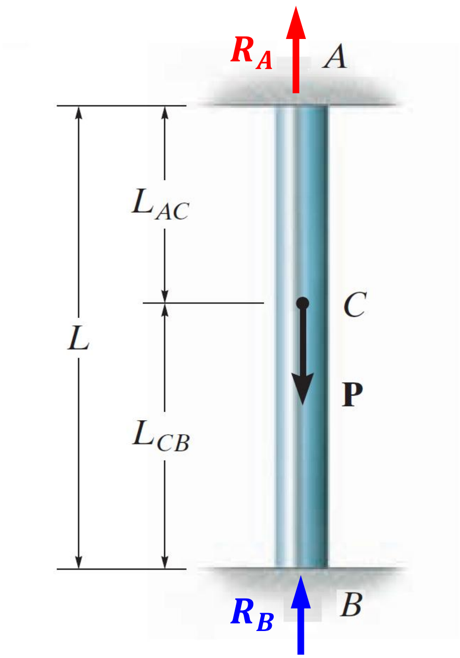
$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$

Ecuaciones constitutivas

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$R_A + R_B = P$$

$$\delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} = 0$$

$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$

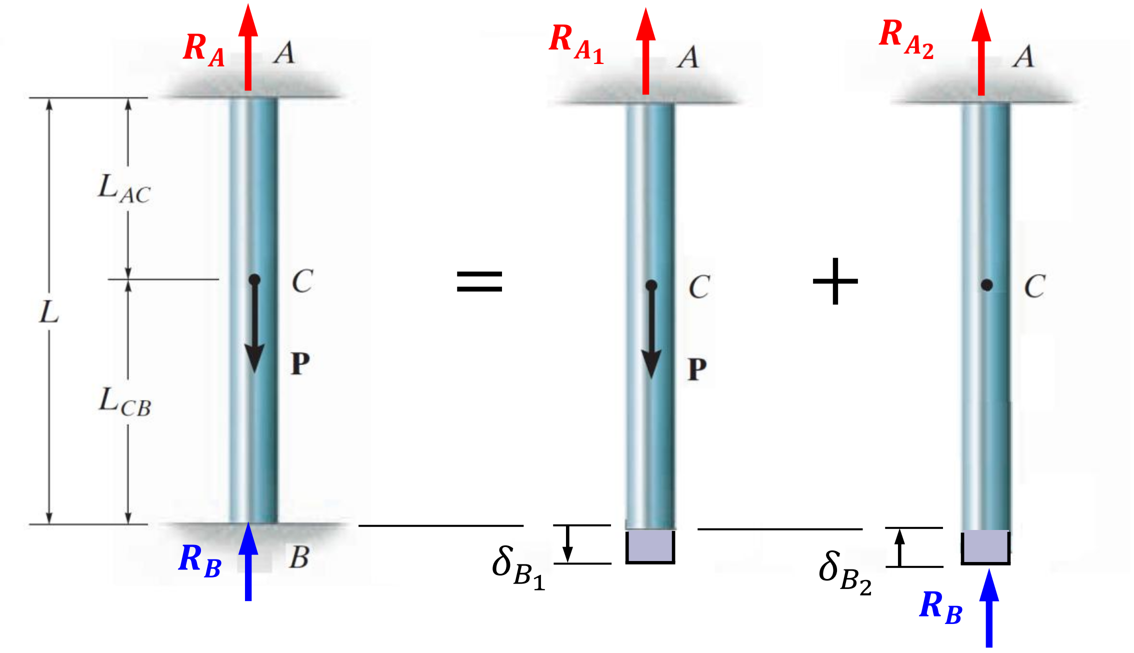
$$R_A = P\frac{L_{BC}}{L}$$

$$R_B = P\frac{L_{AC}}{L}$$

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

Superposición de fuerzas

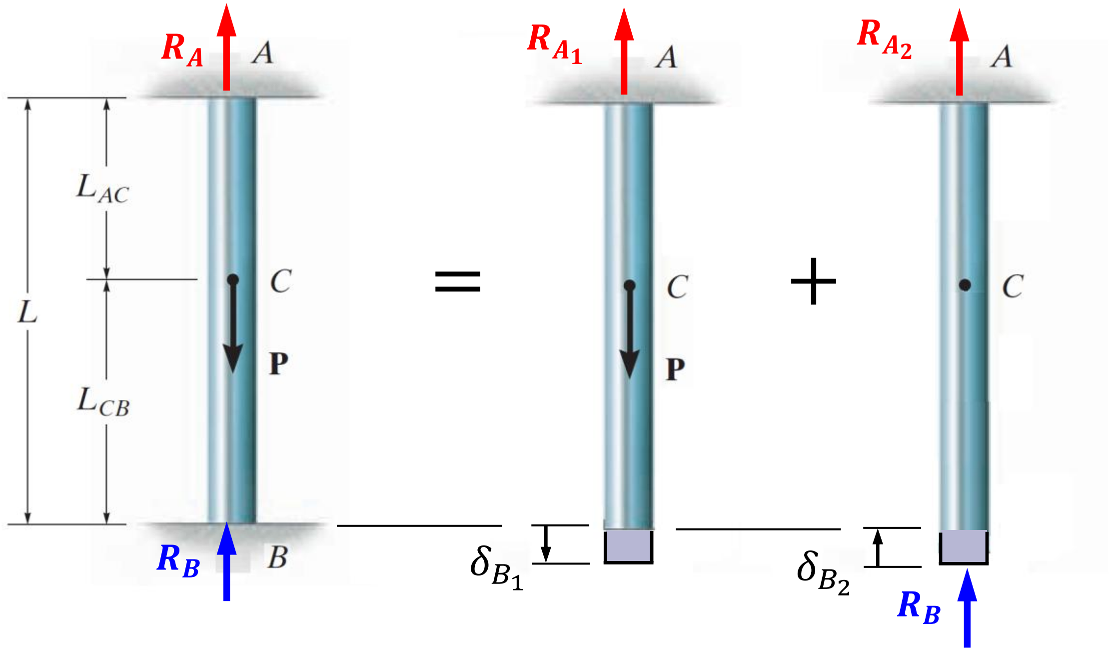
- En problemas estáticamente indeterminados puede ser más fácil plantear la ecuación de compatibilidad usando la superposición de fuerzas.
- Se subdivide la carga en componentes que actúan separadamente, sumando la contribuciones causadas por cada componente.



4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

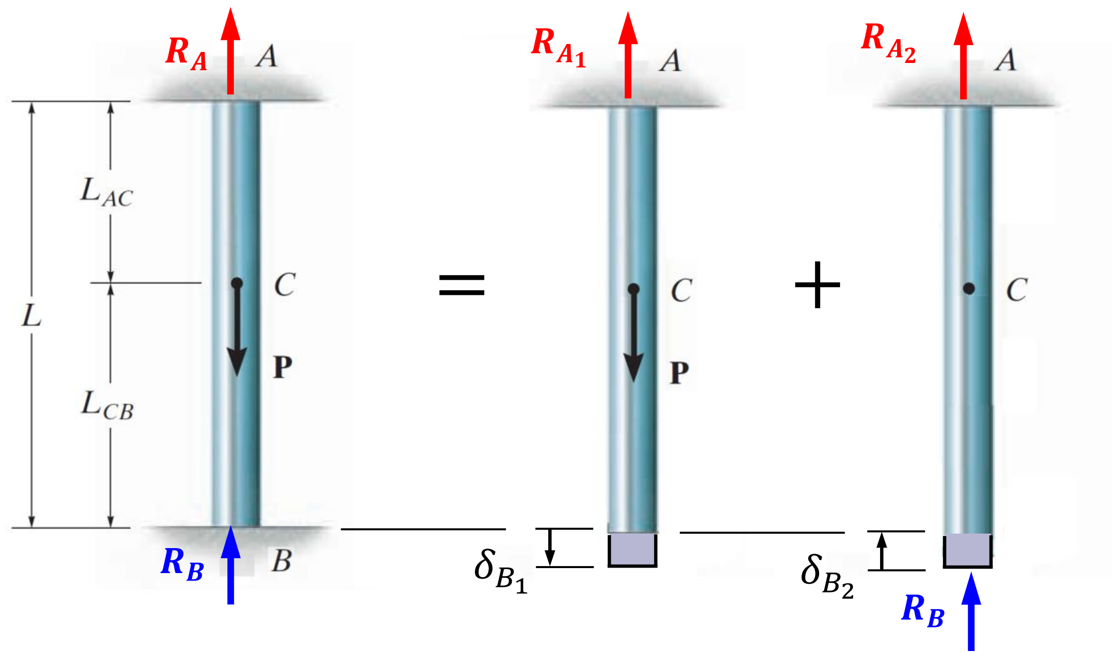
Superposición de fuerzas

- Se elige el apoyo B como “redundante” y se quita temporalmente. Redundante por que no es necesario para mantener el equilibrio.
- La barra original es igual a la barra sometida solo a la carga P más la barra sometida solo a la carga redundante en B.



4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

Superposición de fuerzas



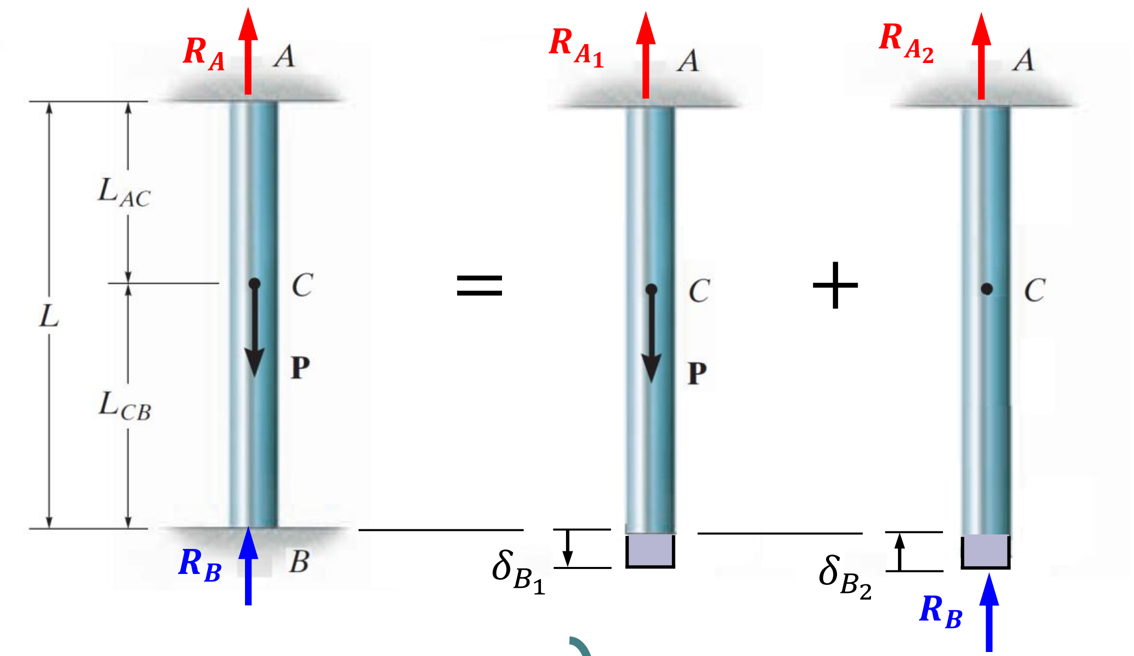
$$R_A = P - R_B$$

$$R_{A_1} = P \qquad R_{A_2} = -R_B$$

$$\underbrace{R_{A_1} + R_{A_2}}_{} = P - R_B$$

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

Superposición de fuerzas



$$\delta_{B_1} - \delta_{B_2} = 0$$

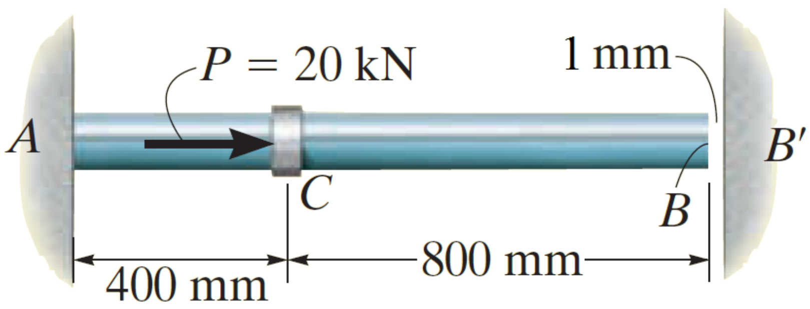
$$\frac{PL_{AC}}{EA} - \frac{R_B L}{EA} = 0$$

$$R_A = P\frac{L_{BC}}{L}$$

$$R_B = P\frac{L_{AC}}{L}$$

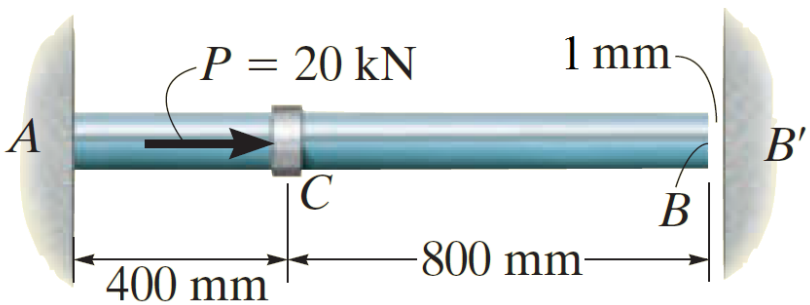
Problema 05 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

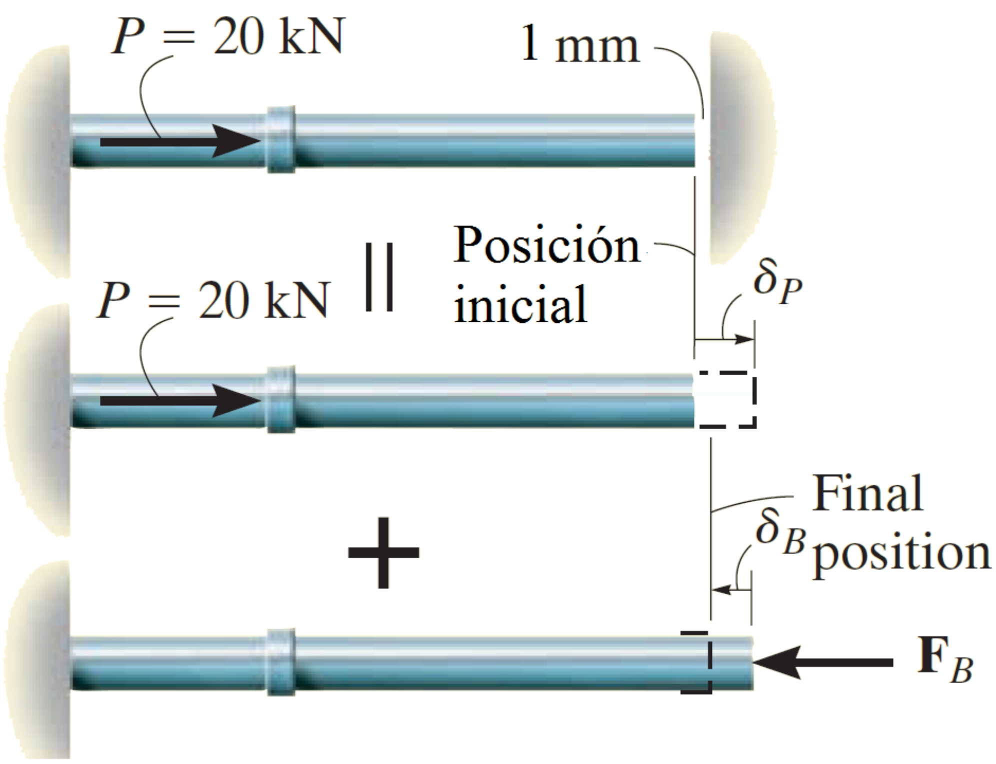
La barra tiene un diámetro de 5 mm ya antes de ser cargada existe un claro de 1 mm. Determinar las reacciones en A y B` cuando la barra esta sometida a la carga P. Considerar E=200 GPa.



Problema 05 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

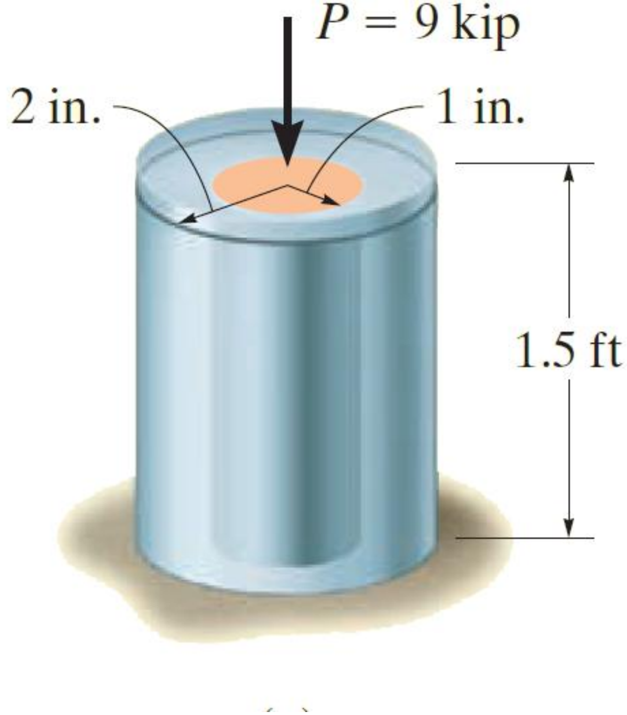
La barra tiene un diámetro de 5 mm ya antes de ser cargada existe un claro de 1 mm. Determinar las reacciones en A y B` cuando la barra esta sometida a la carga P. Considerar E=200 GPa.





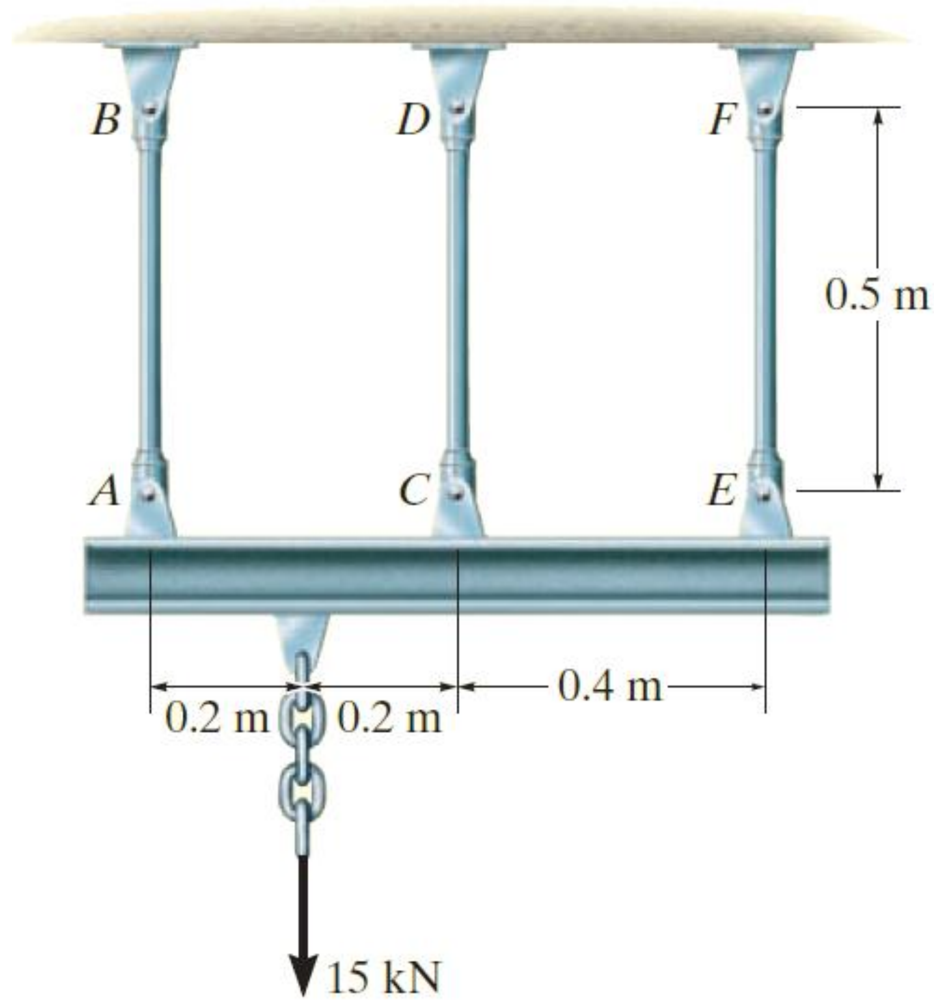
Problema 06 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Un cilindro de aluminio y su núcleo de bronce son sometidos a una carga axial *P*. Determinar el esfuerzo normal de cada uno de ellos, si $E_{aluminio}$=10x10^3 ksi y E_{bronce}=15x10^3 ksi.



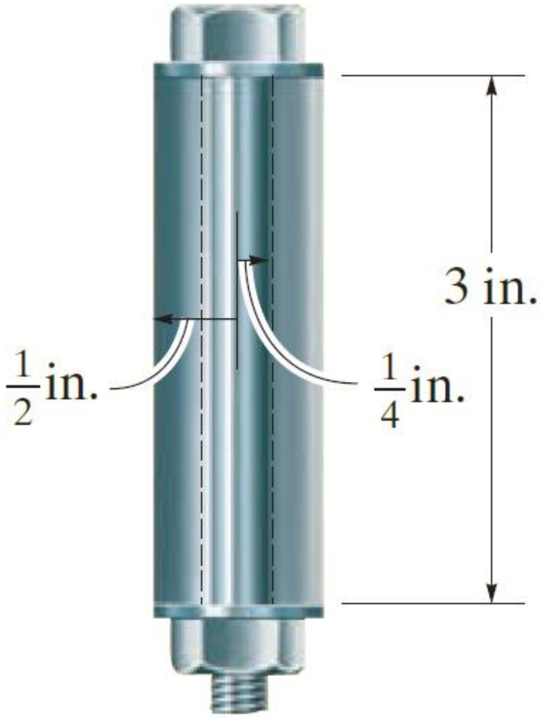
Problema 07 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Tres barras de acero están unidas a un cuerpo rígido. Determinar la fuerza sobre cada barra, si AB y EF poseen cada una un área en su sección transversal de 25 mm². y CD, un área de 15 mm². Considerar E_{acero}=200 GPa.



Problema 08 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Un perno de una aleación de aluminio y un cilindro de una aleación de magnesio inicialmente son apretadas a mano. Luego, mediante una llave la tuerca es apretada una media vuelta. Si el tornillo tiene 16 hilos por pulgada, determinar el esfuerzo al que se encuentra sometido. Considerar $E_{aluminio}$=10x10^3 ksi y $E_{magnesio}$=6.5x10^3 ksi.



4.5 Esfuerzo térmico

- El cambio de temperatura ocasiona cambios dimensiones en algunos materiales
- **Incremento** de la temperatura produce que el material se **dilate**.
- **Decrecimiento** de la temperatura ocasiona que el material se **contraiga**.
- Si el material es homogéneo e isotrópico se establece la siguiente relación:

$$\delta_T = \alpha \, \Delta T \, L$$

δ_T: Cambio de longitud

α: Coeficiente de expansión térmica $[1/°C]$, $[1/K]$, $[1/°F]$

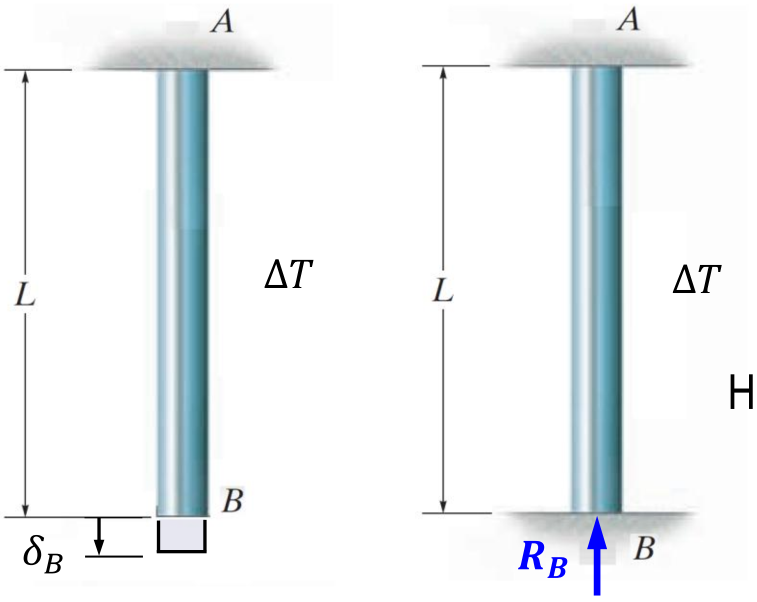
ΔT: Cambio de temperatura

L: Longitud inicial

4.5 Esfuerzo térmico

- En casos **isostáticos**, el cambio de longitud producto del cambio de temperatura puede ser calculado mediante la expresión mencionada.
- En problemas **hiperestáticos**, los desplazamientos térmicos pueden ser impedidos por soportes y apoyos ocasionando esfuerzos térmicos.

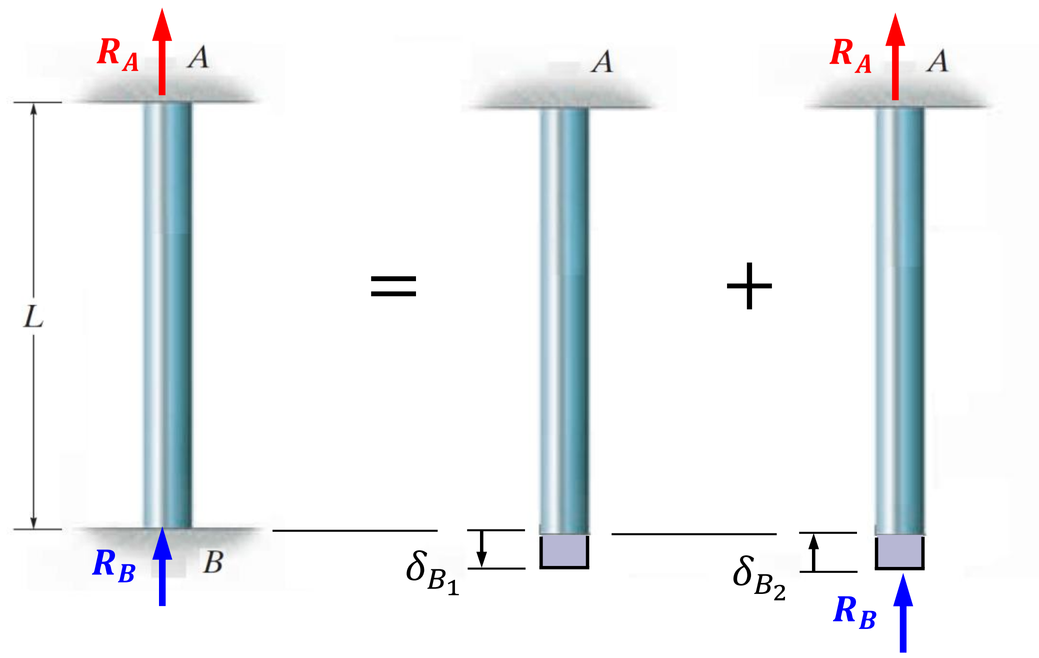
Isostático



Hiperestático

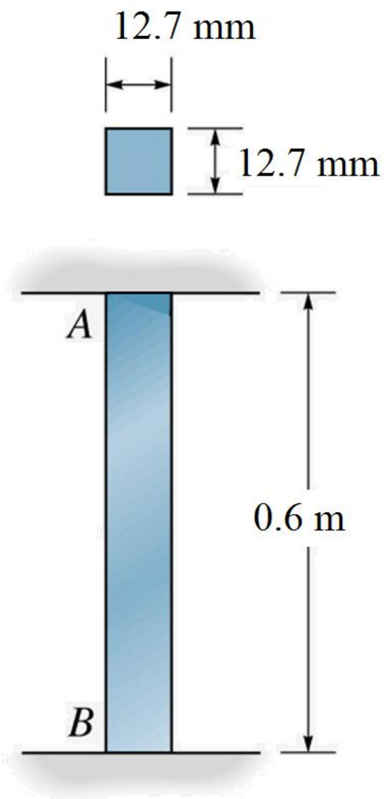
4.5 Esfuerzo térmico

- En casos **isostáticos**, el cambio de longitud producto del cambio de temperatura puede ser calculado mediante la expresión mencionada.
- En problemas **hiperestáticos**, los desplazamientos térmicos pueden ser impedidos por soportes y apoyos ocasionando esfuerzos térmicos.



Problema 09 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el esfuerzo térmico de la barra cuando la temperatura es de 48.89 °C, si ésta encaja de forma justa a una temperatura de 15.56 °C. Tomar en cuenta que modulo de elasticidad es igual a 200 GPa y el coeficiente de expansión térmica igual a 11.7×10^{-6} /°C.



Problema 10 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

La viga rígida está fija a los tres postes cilíndricos y cuando la carga no está aplicada la temperatura es de 20 °C. Determinar la fuerza sobre cada poste cuando la carga actúa sobre la viga y la temperatura se eleva a 80°C. Considerar:

E_{acero}=200 GPa

α_{acero}=12x10^{-6} /°C

E_{aluminio}=70 GPa.

α_{aluminio}=23x10^{-6} /°C