Capítulo 4 [II] Resultantes de Sistemas de fuerzas

Estática 2015-1

Profesor Herbert Yépez Castillo

Introducción

4.1 Momento de una fuerza – Formulación Escalar

4.2 Producto Cruz

4.3 Momento de una fuerza – Formulación Vectorial

4.4 Principio de momentos

4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje

4.6 Momento de un par

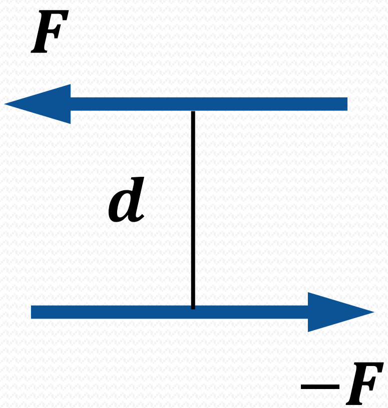
4.7 Sistemas Equivalentes

4.8 Reducción de un Sistema de fuerzas

4.9 Reducciones adicionales de un Sist. de fuerzas

4.6 Momento de un par

4.6 Momento de un par

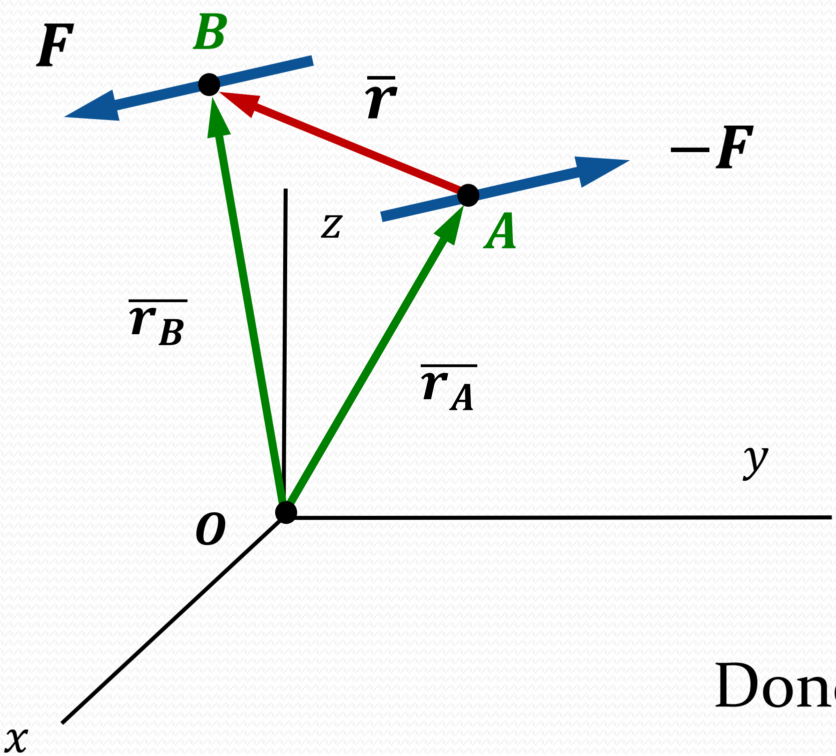


Un **par** se define mediante:

- 2 fuerzas:
  - Paralelas
  - De igual magnitud
  - Dirección opuesta
  - Separadas por una distancia $\boldsymbol{d}$
- $\sum \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$
- Tendencia a **rotar**

Entonces, **Momento de un par** se define como la **suma de momentos de ambas fuerzas** respecto a cualquier **punto arbitrario**.

4.6 Momento de un par



Momento respecto a $\boldsymbol{O}$

$$\overline{M_o} = \overline{r_A} \times -\overline{F} + \overline{r_B} \times \overline{F}$$

$$\overline{M_o} = -\overline{r_A} \times \overline{F} + \overline{r_B} \times \overline{F}$$

$$\overline{M_o} = (\overline{r_B} - \overline{r_A}) \times \overline{F}$$

Son iguales!

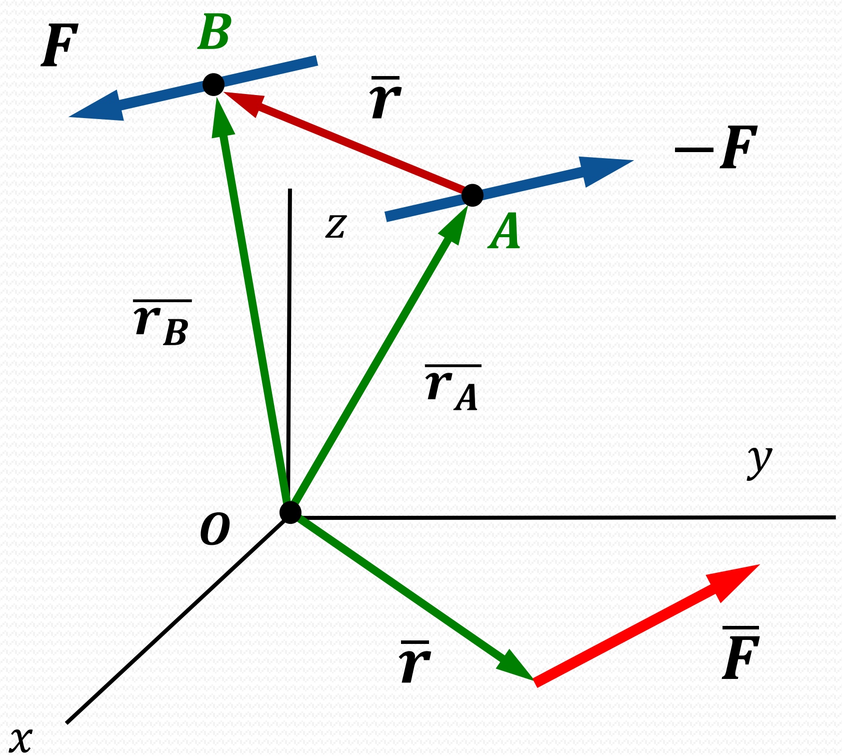
Momento respecto a $\boldsymbol{A}$

$$\overline{M_A} = \bar{r} \times \overline{F} + \mathbf{0} \times -\overline{F}$$

Donde: $\bar{r} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$

$$\overline{M_A} = (\overline{r_B} - \overline{r_A}) \times \overline{F}$$

4.6 Momento de un par



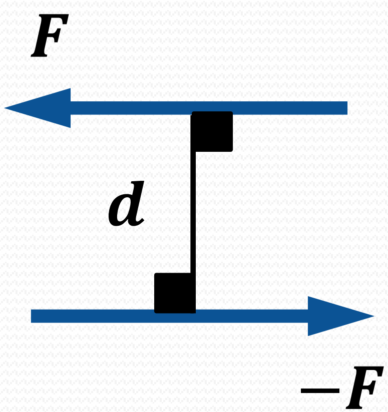
Momento de un par

- **Vector libre**, es decir que puede actuar en **cualquier punto.**
- Depende **únicamente** de $\bar{r}$ y **no** de $\overline{r_A}$ y $\overline{r_B}$
- **Conceptualmente:**

$$\underbrace{\textbf{M de par}}_{\textbf{Libre}} \neq \underbrace{\textbf{M de una fuerza}}_{\textbf{Requiere de un punto o un eje}}$$

4.6 Momento de un par

Análisis Escalar



$$\boxed{M = F.d}$$

$[N.m]$ $[lb.pie]$

Donde:

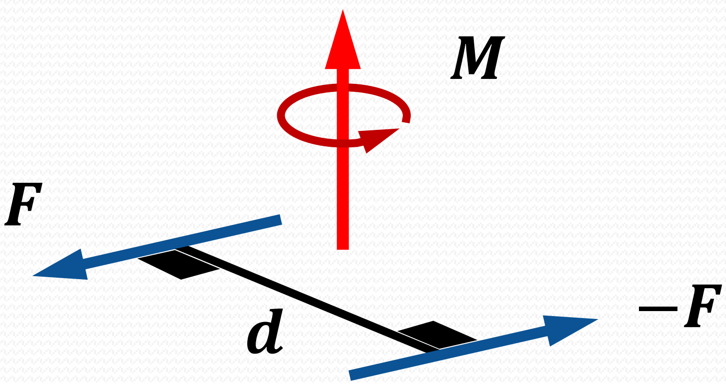
d: Distancia **perpendicular** entre las fuerzas

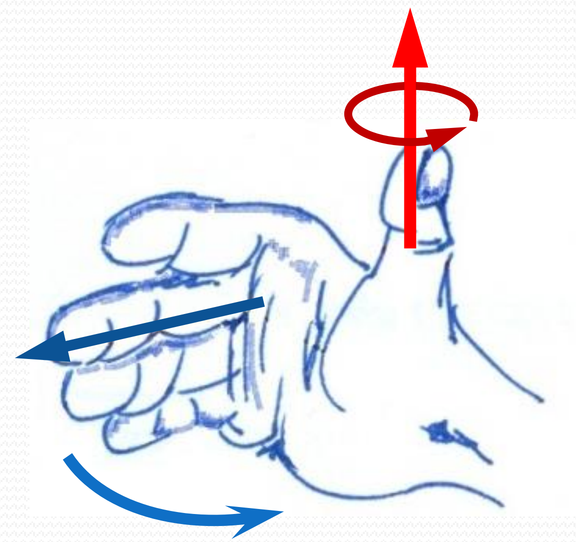
F: **Magnitud** de una de las fuerzas

M: **Momento de par**

4.6 Momento de un par

Análisis Escalar - Dirección

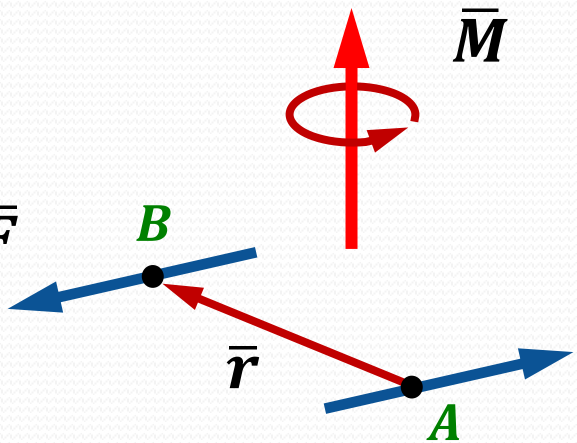


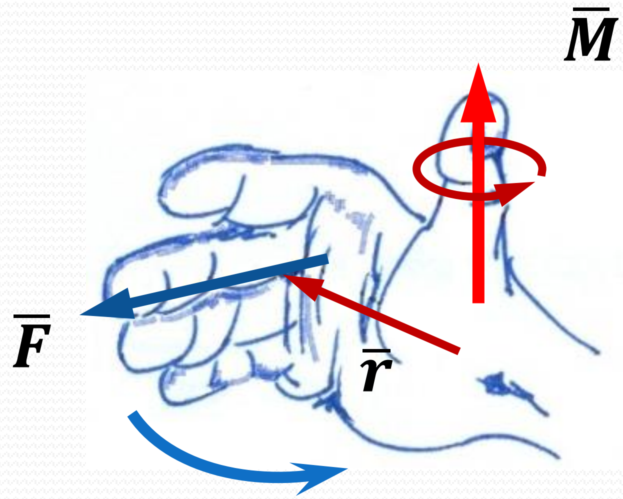


$$\boxed{M = F.d}$$

4.6 Momento de un par

Análisis Vectorial

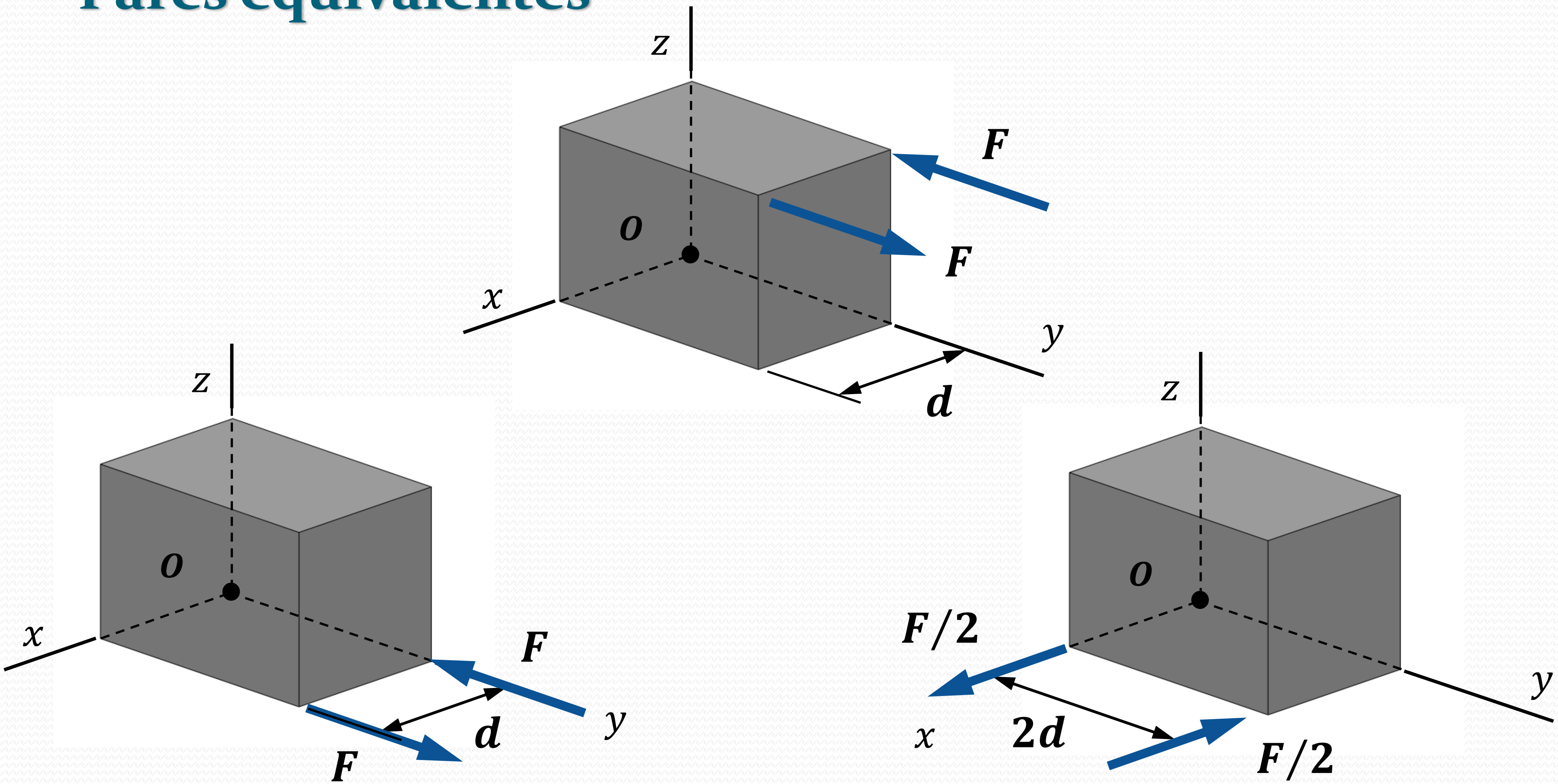




$$\boxed{\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}}$$

4.6 Momento de un par

Pares equivalentes



4.6 Momento de un par

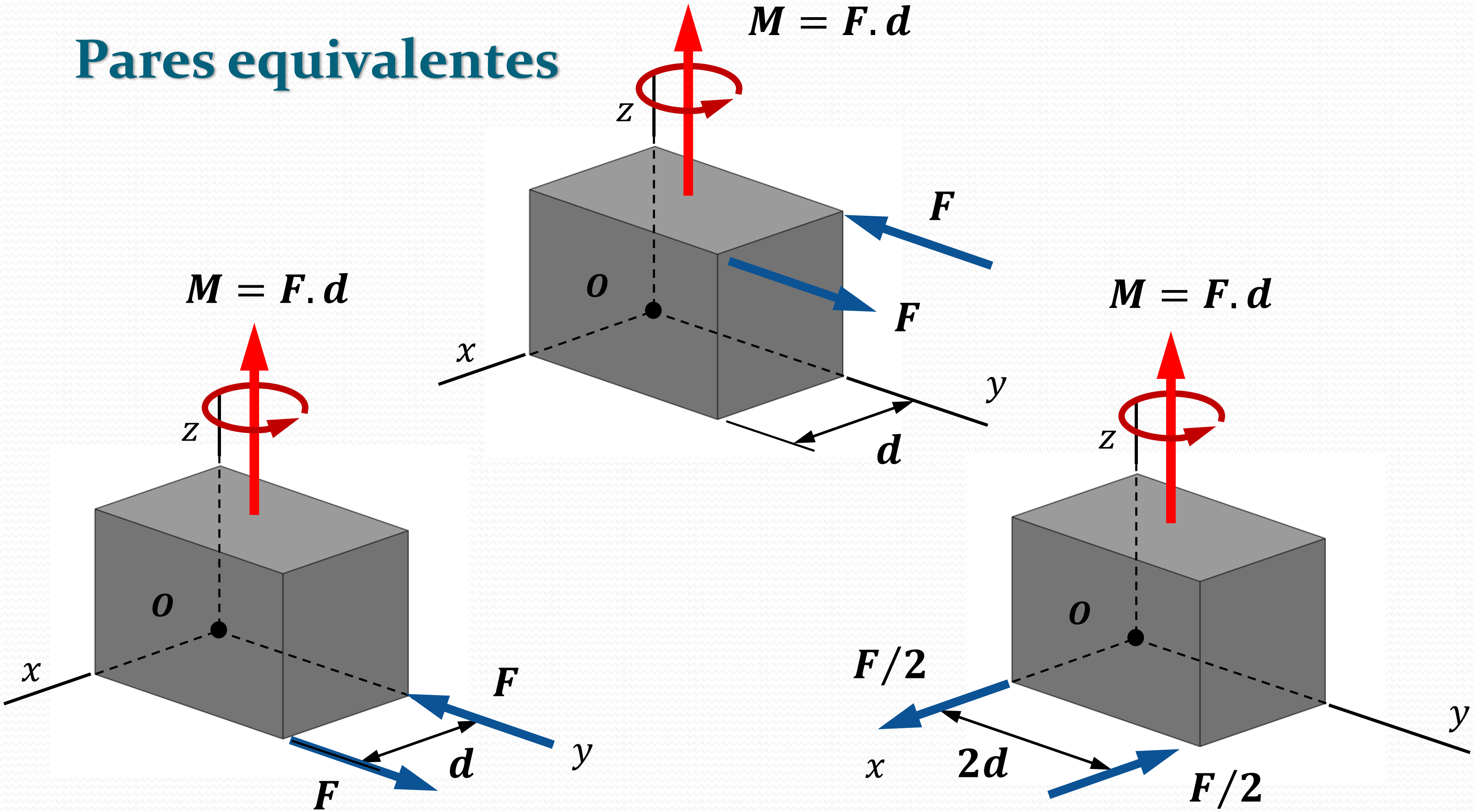
Pares equivalentes

$$\boldsymbol{M = F.d = F/2\,.\,2d}$$

Si dos pares de momentos tienen la **misma magnitud, son equivalentes, siempre que** estén contenidos en el **mismo plano** o en **planos paralelos**

4.6 Momento de un par

Pares equivalentes



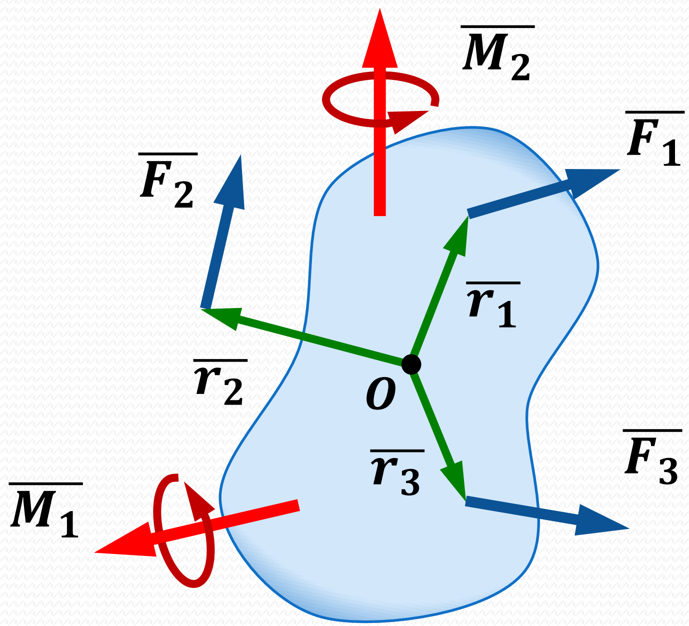
4.7 Sistemas equivalentes

4.7 Sistemas equivalentes

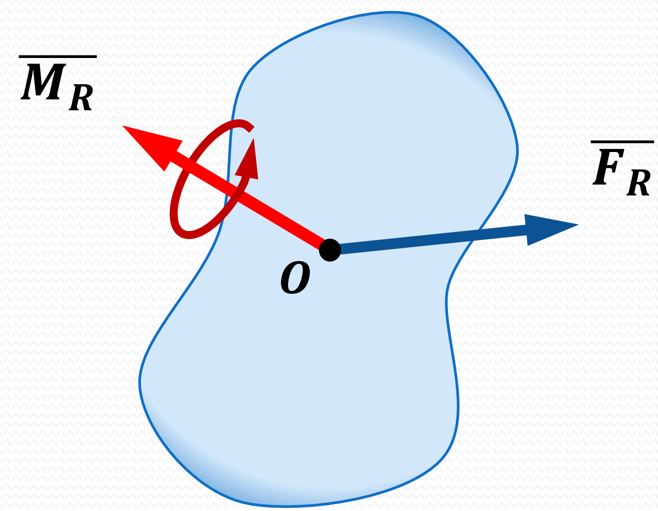
Simplificar sin afectar los efectos externos del cuerpo rígido C.R.

Sistema { Fuerza**s**, Momento**s** de par } ⇨ Sistema { 01 Fuerza ***resultante***, 01 Momento ***resultante*** }

Respecto a un ***punto.***

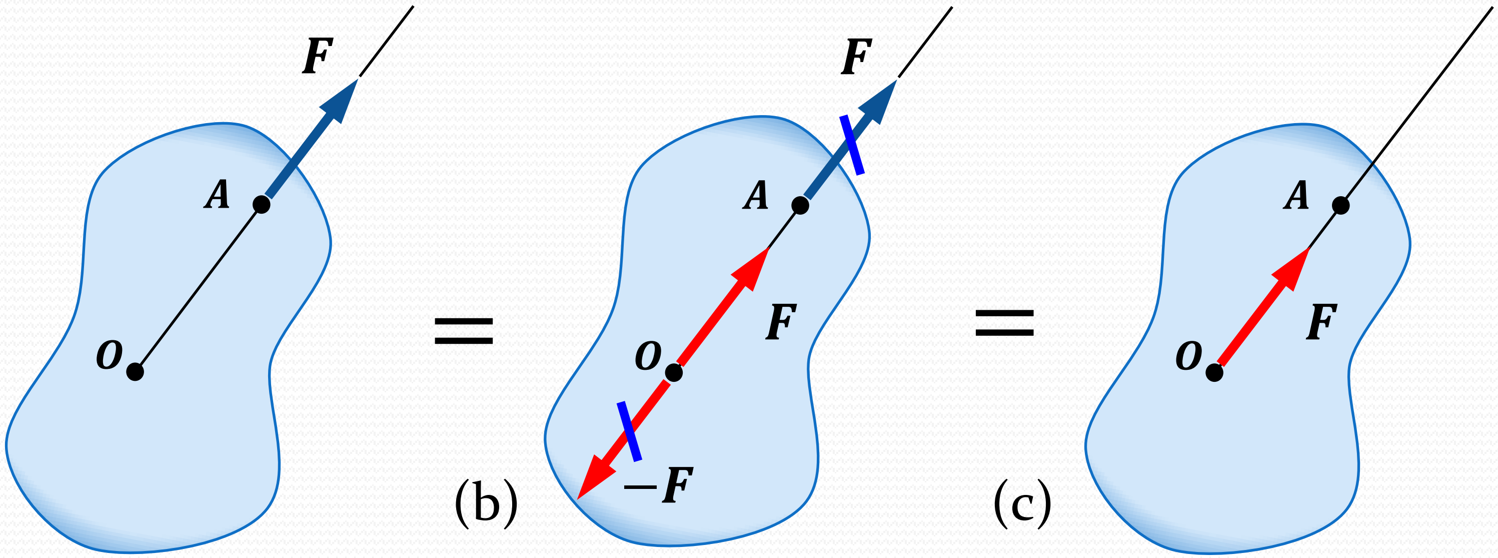


⇨



4.7 Sistemas equivalentes

El punto O está sobre la línea de acción de la Fuerza



(a) (b) (c)

(a) • Se requiere aplicar $\boldsymbol{F}$ en el punto $\boldsymbol{O}$ sin afectar los efectos externos del C.R.

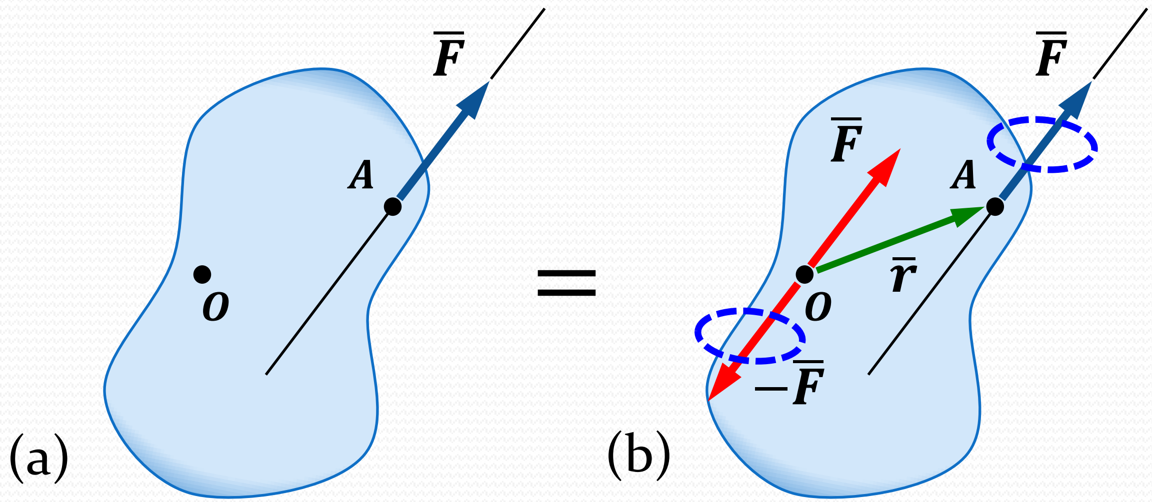
(b) • Aplicaremos fuerzas iguales y opuestas en el punto O.

• $\boldsymbol{F}$ y $-\boldsymbol{F}$ pueden ser cancelados, dejando $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{O}$.

(c) • La fuerza ha sido transmitida (Principio de transmisibilidad)

4.7 Sistemas equivalentes

El punto O NO está sobre la l. de acción de la Fuerza



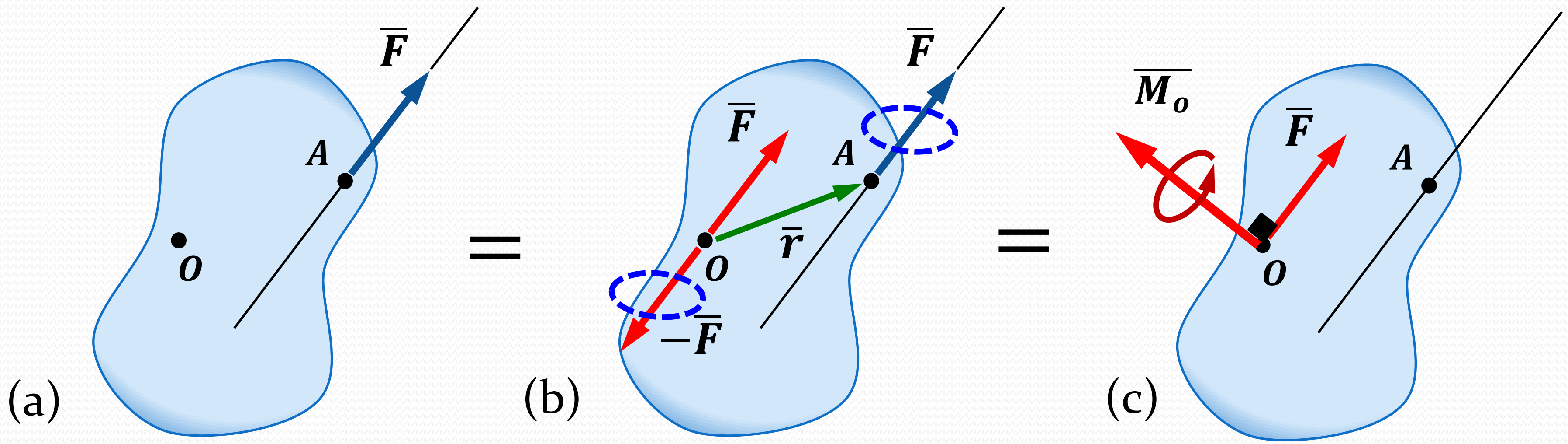
(a) • Se requiere aplicar $\boldsymbol{F}$ en el **punto $\boldsymbol{O}$** sin afectar los efectos externos del **CR**.

(b) • Aplicaremos fuerzas **iguales y opuestas** en el punto $\boldsymbol{O}$.

- El punto $\boldsymbol{A}$ puede ser definido mediante $\overline{\boldsymbol{r}}$ respecto $\boldsymbol{O}$.
- Consecuencia: 01 fuerza en O y 01 un par de fuerzas.
- El par de fuerzas genera un **momento de par**: $\overline{\boldsymbol{M_o}} = \overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}$

4.7 Sistemas equivalentes

El punto O NO está sobre la l. de acción de la Fuerza

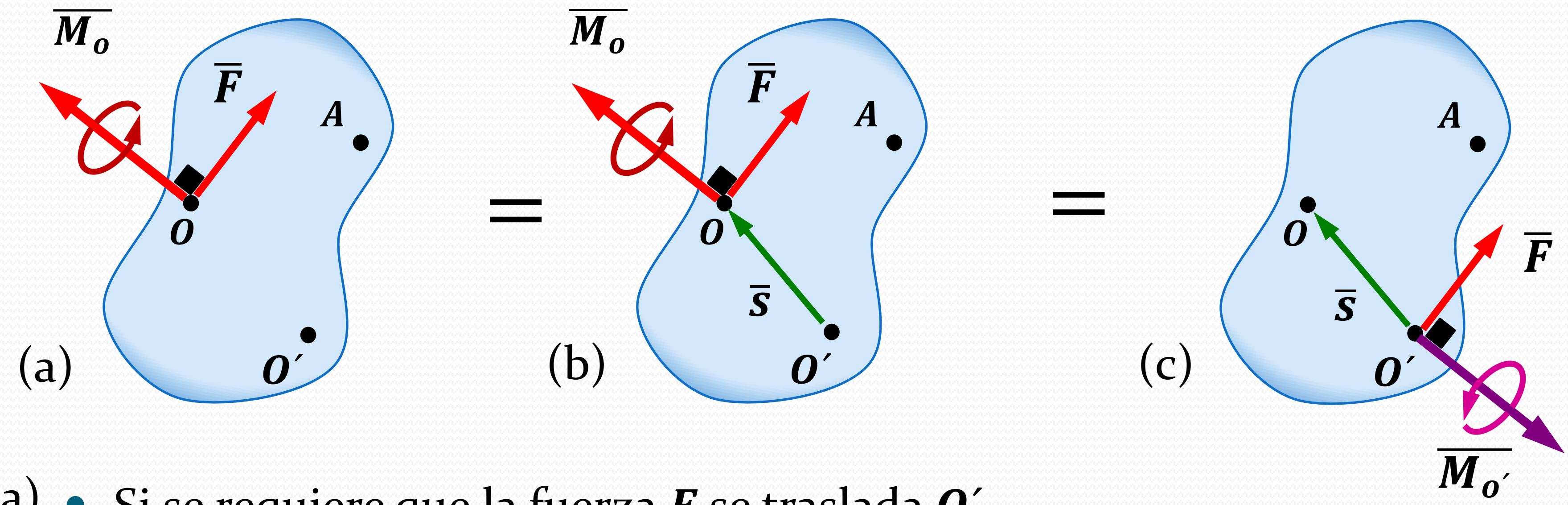


(c)

- Cualquier fuerza $\boldsymbol{F}$ que actúa sobre un CR **puede ser trasladada a un punto arbitrario** $\boldsymbol{O}$, siempre y cuando **se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de** $\boldsymbol{F}$ **con respecto** $\boldsymbol{O}$**.**

4.7 Sistemas equivalentes

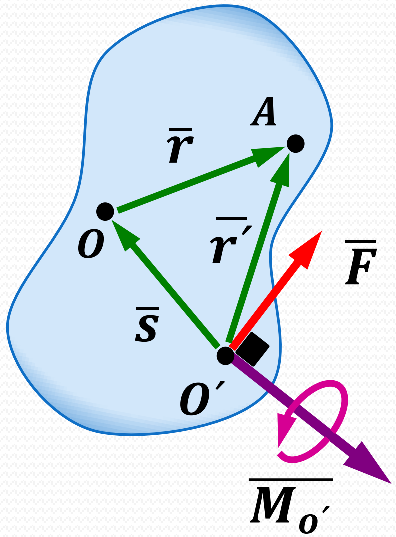
El punto O NO está sobre la l. de acción de la Fuerza



- (a) Si se requiere que la fuerza ***F*** se traslada ***O´***
- (b) El punto ***O´*** puede ser definido mediante $\bar{s}$ respecto a ***O´***.
- (c) Entonces el nuevo **momento es igual a:** $\overline{M_{o'}} = \underbrace{\overline{M_o}}_{\textbf{Existente}} + \underbrace{\bar{s} \times \overline{F}}_{\textbf{Nuevo traslado}}$

4.7 Sistemas equivalentes

El punto *O* NO está sobre la l. de acción de la Fuerza



(c)

- Primera forma:

Traslado de $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{O} \rightarrow \boldsymbol{O}'$

$$\overline{M_{o'}} = \overline{M_o} + \bar{s} \times \bar{F}$$

- Segunda forma:

Traslado de $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{O}'$

$$\overline{M_{o'}} = \bar{r}' \times \bar{F}$$

Donde: $\bar{r}' = \bar{r} + \bar{s}$

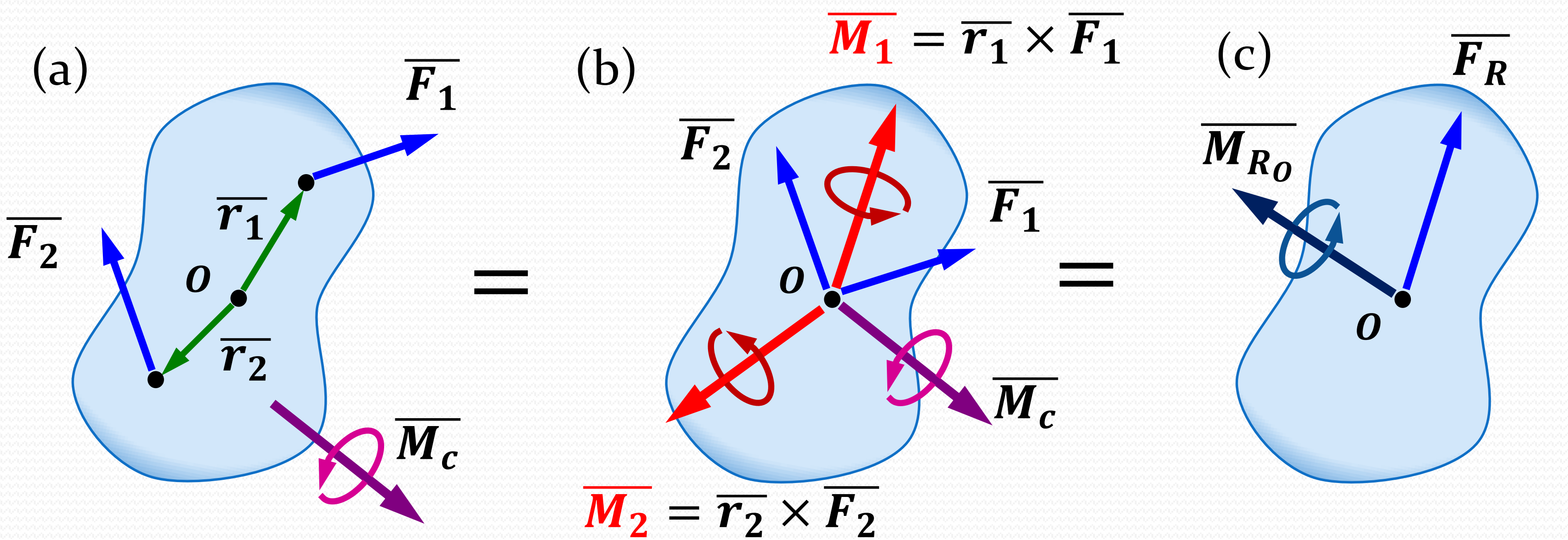
Son iguales!

$$\overline{M_{o'}} = (\bar{r} + \bar{s}) \times \bar{F} = \underbrace{\bar{r} \times \bar{F}}_{\textbf{Existente}} + \overbrace{\bar{s} \times \bar{F}}^{\textbf{Nuevo traslado}}$$

4.8 Reducción de un Sistema de fuerzas

4.8 Reducción de un Sistema de fuerzas

A una fuerza y un momento de par resultante



(a) • Sistema de fuerzas y momentos de par

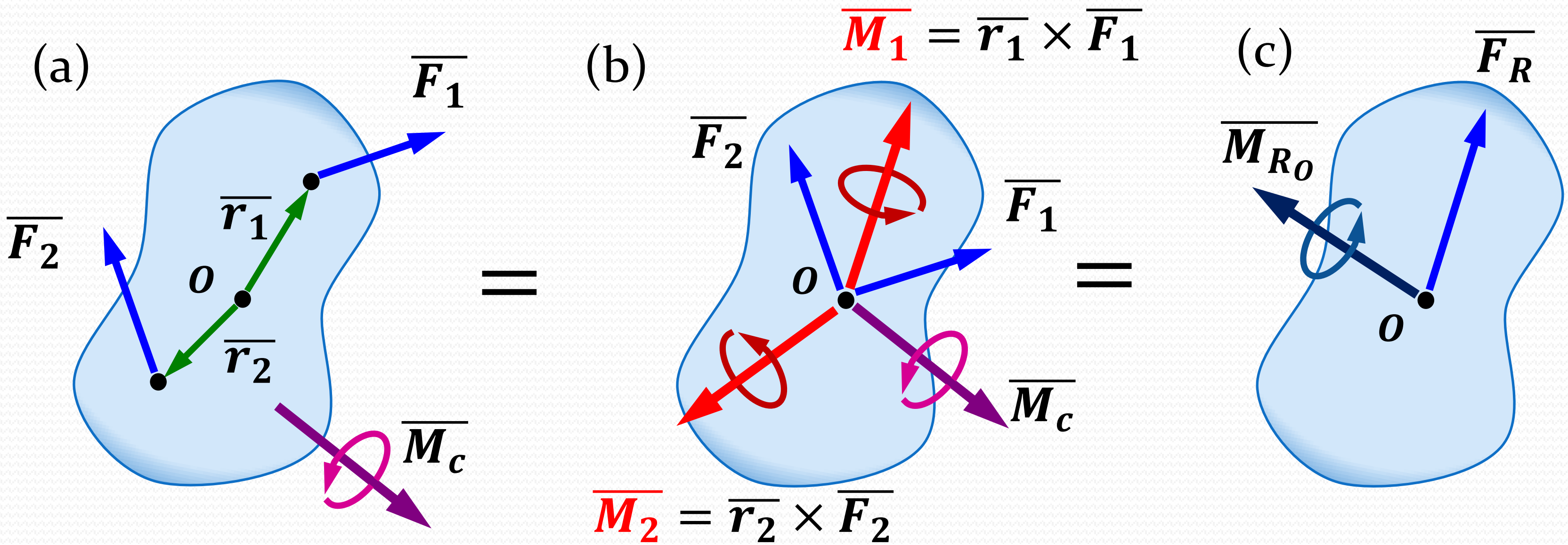
(b) • Se halla los **momentos de fuerza** respecto a $\boldsymbol{O}$.

• Las **fuerzas** y el **momentos de par** son desplazados al punto $\boldsymbol{O}$.

(c) • Por suma vectorial: $\overline{F_R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$, $\overline{M_{R_O}} = \overline{M_c} + \overline{M_1} + \overline{M_2}$

4.8 Reducción de un Sistema de fuerzas

A una fuerza y un momento de par resultante



$$\boxed{\begin{aligned} \overline{F_R} &= \sum \overline{F} \\ \underbrace{\overline{M_{R_O}}}_{\text{Sistema}} &= \underbrace{\sum \overline{M_c} + \sum \overline{M_o}}_{\text{Sistema}} \end{aligned}}$$

Equivalentes!!

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

Reducción de un Sistema

Sistema { Fuerza**s**, Momento**s** de par } ⇨ Sistema { 01 Fuerza ***resultante***, 01 Momento ***resultante*** }

$\underbrace{\hspace{6em}}$ Respecto a un ***punto.***

Reducción adicionales de un Sistema

a) Simplificación a una **sola fuerza resultante**

b) Simplificación a un **torsor** (llave de torsión / momento mínimo)

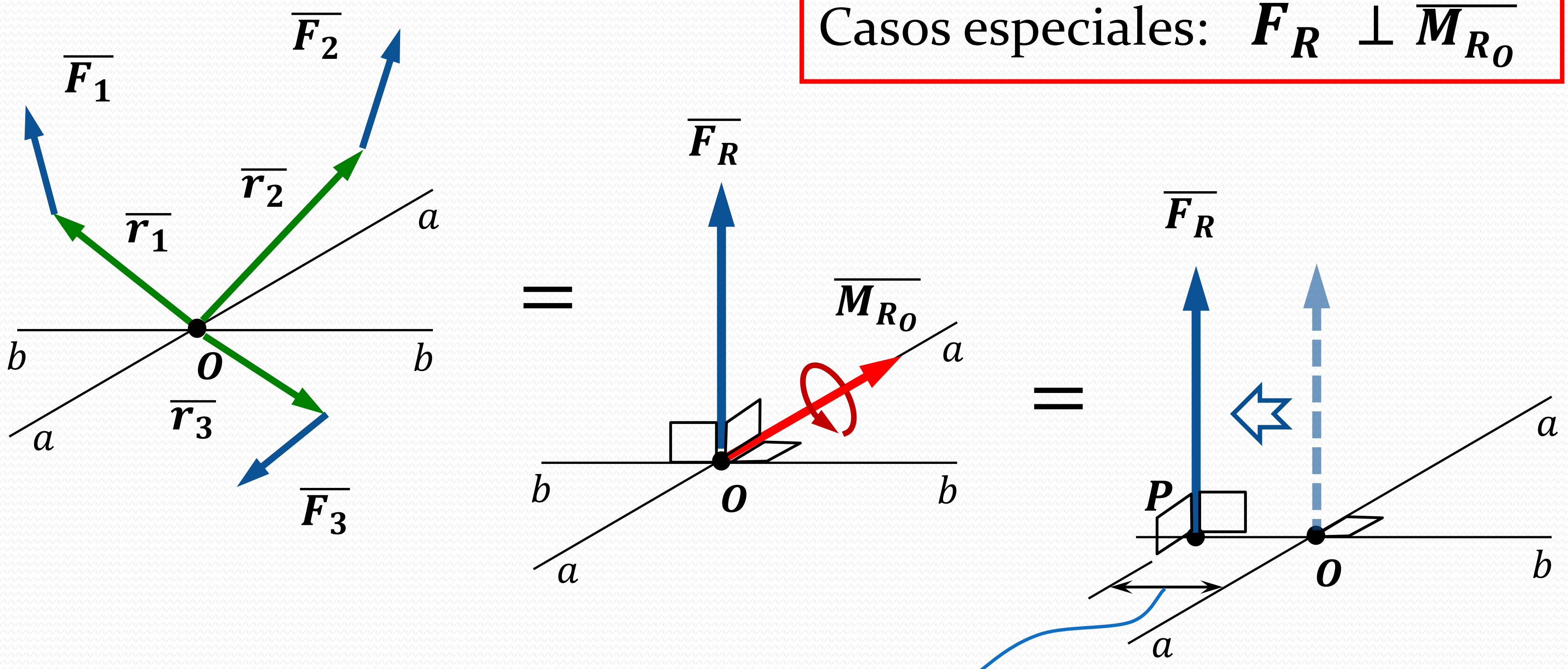
4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

4.9.1 Simplificación a una sola fuerza resultante

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Casos especiales: $\overline{\boldsymbol{F}_R} \perp \overline{\boldsymbol{M}_{R_O}}$



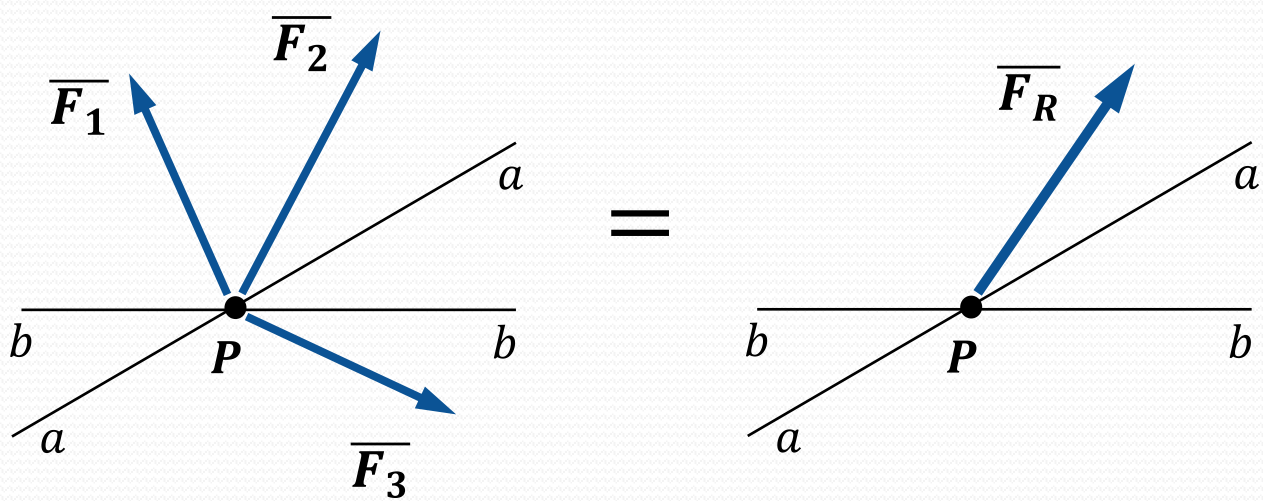
$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{M}_{R_O}}{\boldsymbol{F}_R}$$

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Caso 1: Sist. de fuerzas *concurrentes*

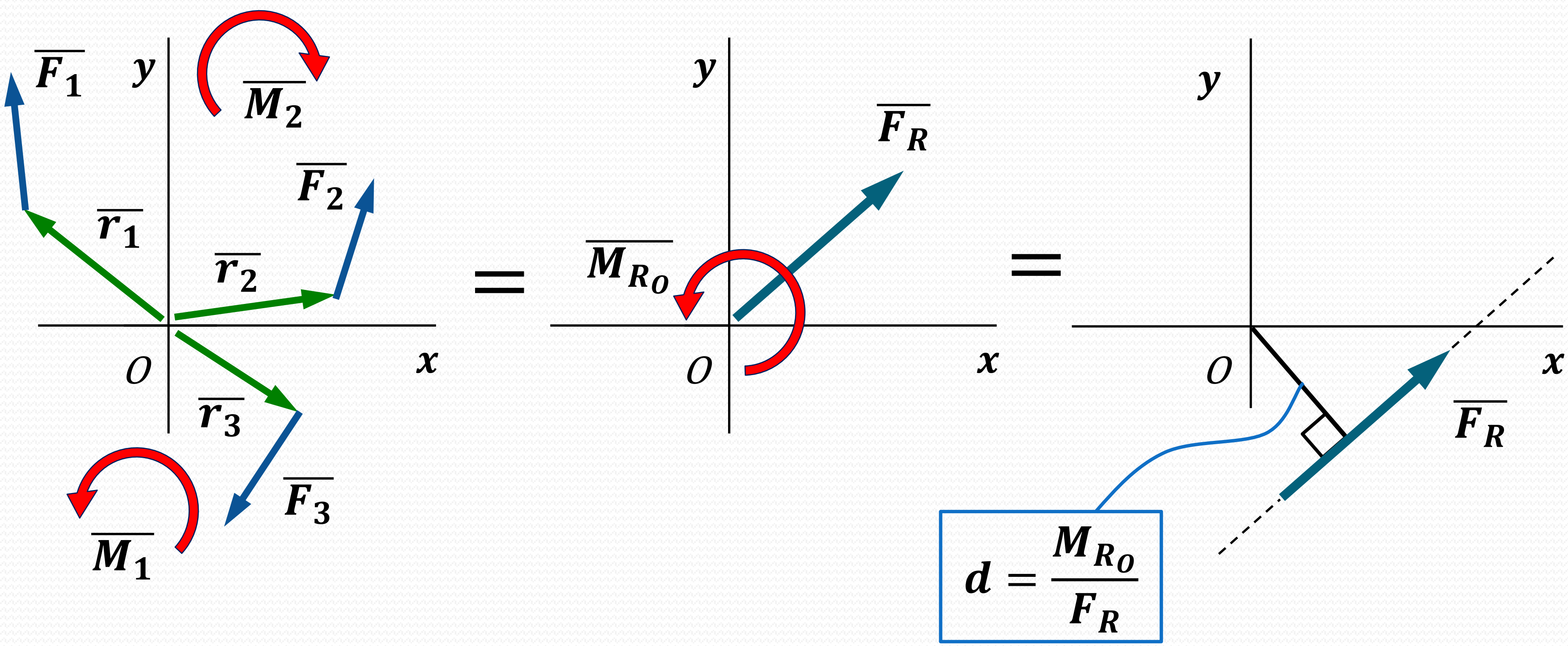
Un sistema de fuerzas que actúan en **P** para el cual **no hay momento de par** resultante, entonces las fuerzas se reducen **a una sola fuerza**



4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Caso 2: Sist. de fuerzas *coplanares*



4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

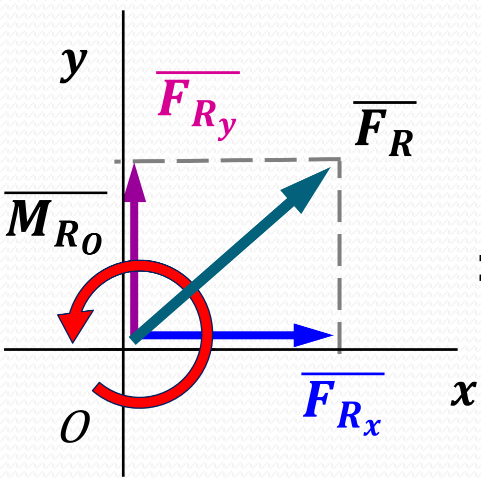
a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Caso 2: Sist. de fuerzas *coplanares*

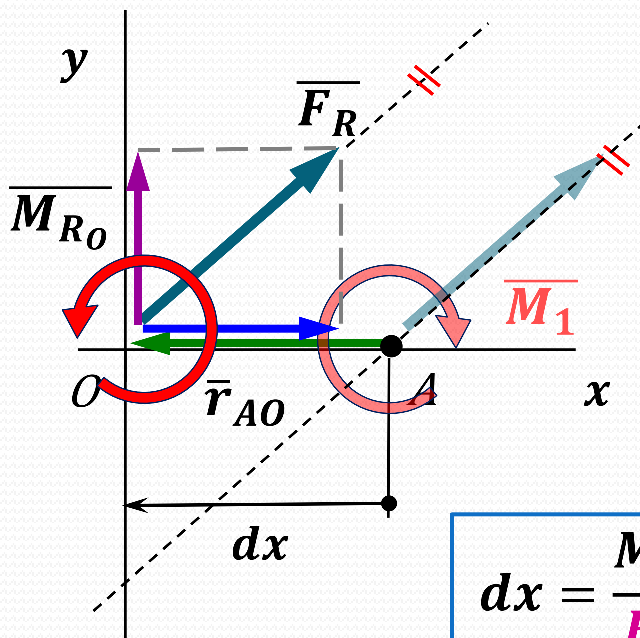
$$\boxed{M_A = ↺ + ↻ = 0}$$

$$\boxed{dx\,.\,F_{R_y} = M_1}$$

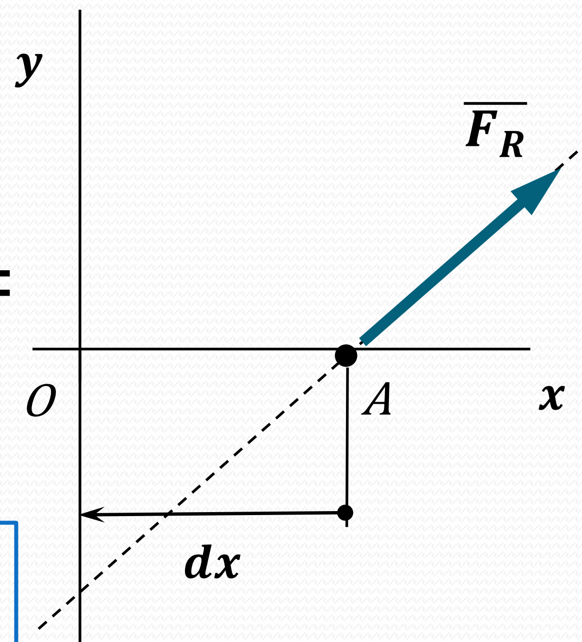
$$\boxed{M_A = M_{R_0} - M_1 = 0}$$



=



=



$$\boxed{dx = \frac{M_{R_O}}{F_{R_y}}}$$

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

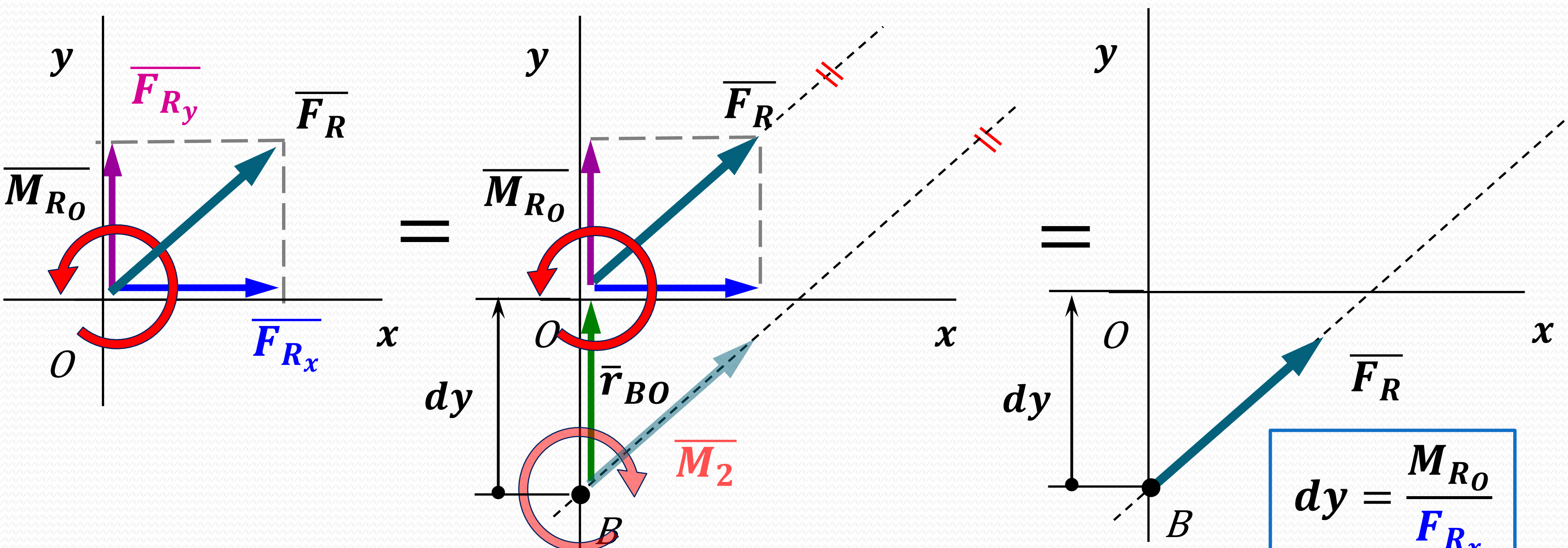
a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Caso 2: Sist. de fuerzas *coplanares*

$$\boxed{M_A = \circlearrowleft + \circlearrowright = 0}$$

$$\boxed{dx\,.\,F_{R_x} = M_2}$$

$$\boxed{M_A = M_{R_0} - M_2 = 0}$$

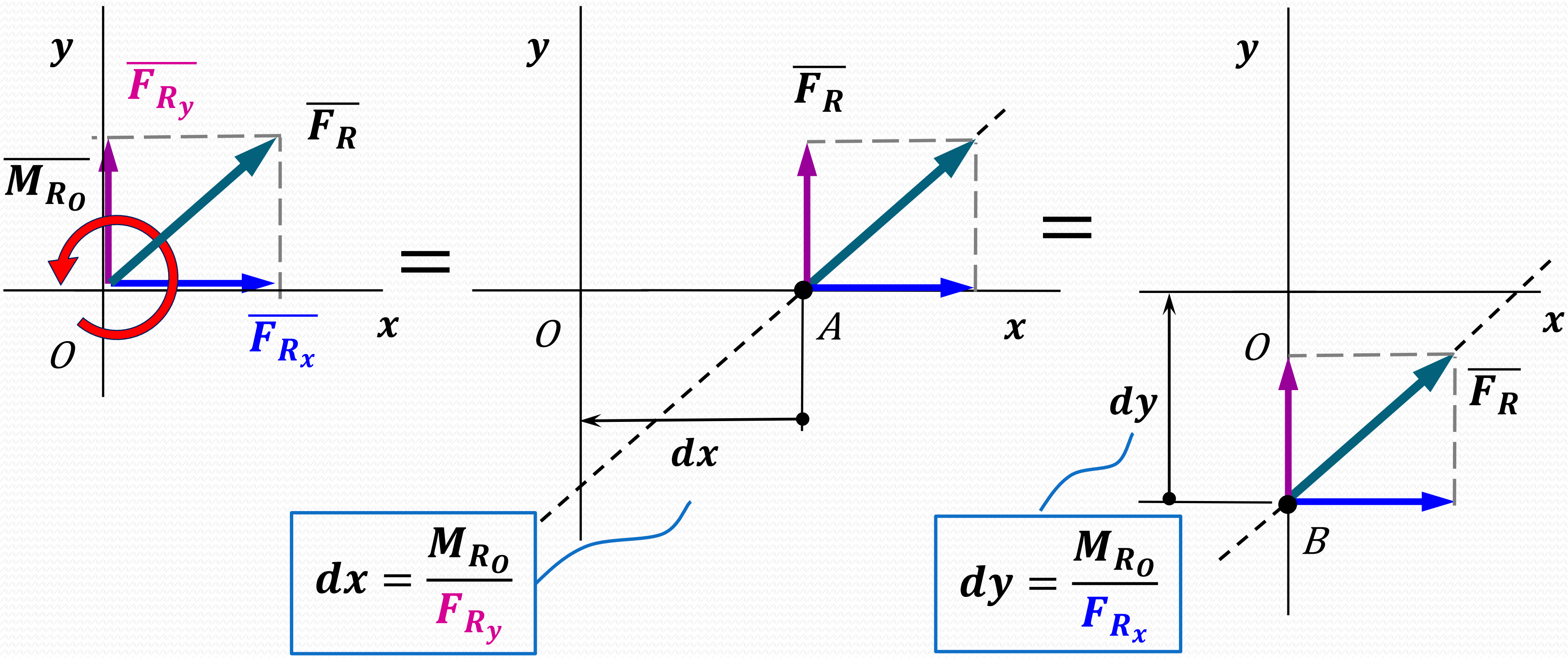


$$\boxed{dy = \frac{M_{R_O}}{F_{R_x}}}$$

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Caso 2: Sist. de fuerzas *coplanares*



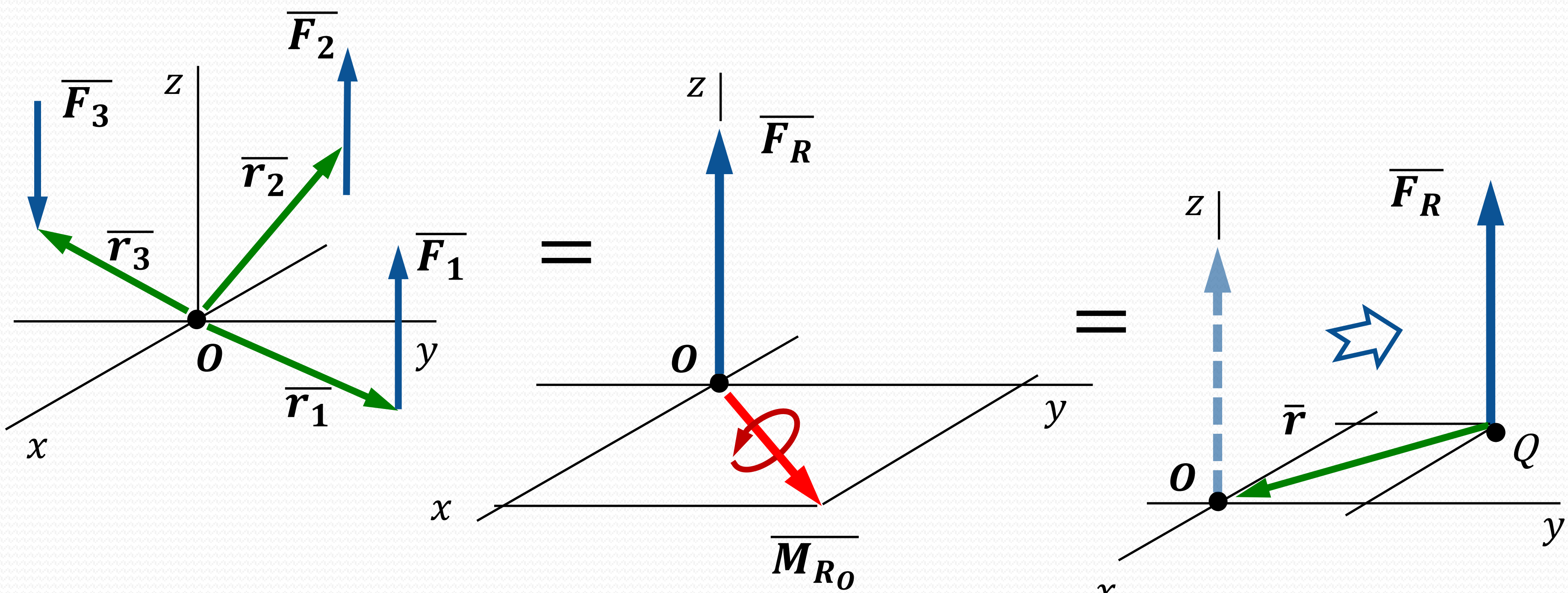
$$dx = \frac{M_{R_O}}{F_{R_y}}$$

$$dy = \frac{M_{R_O}}{F_{R_x}}$$

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Caso 3: Sist. de fuerzas *paralelas*

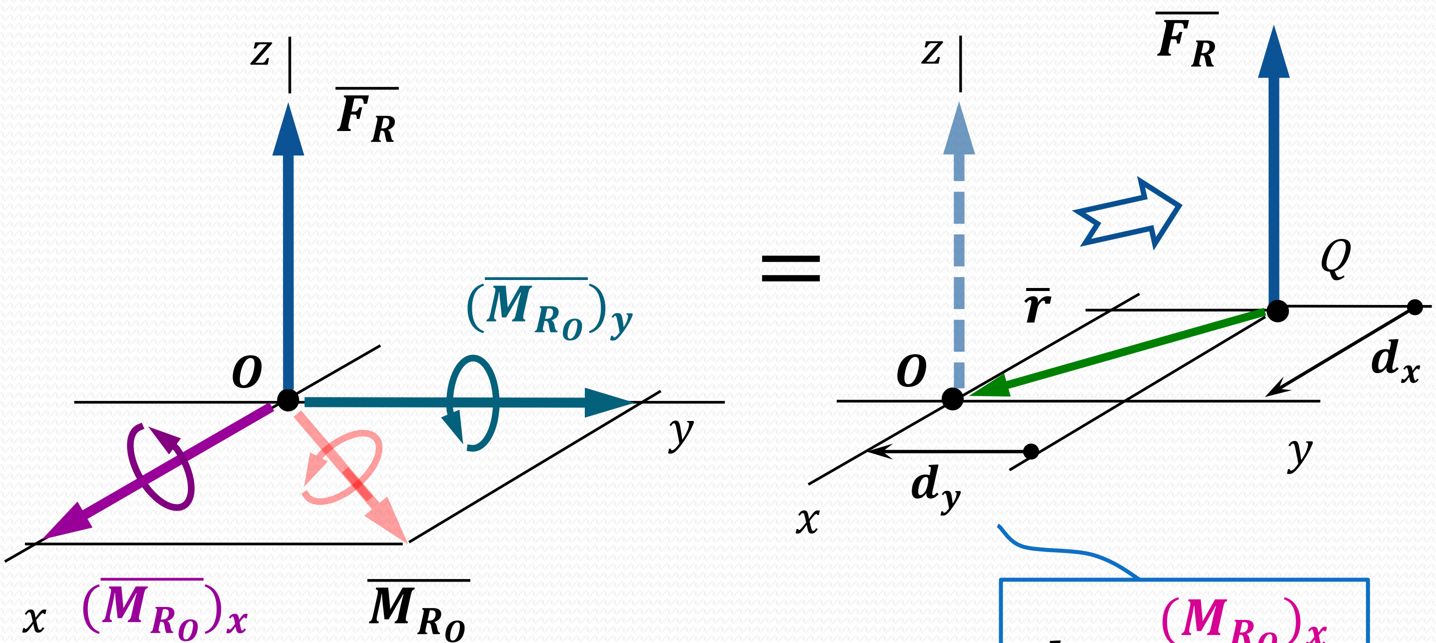


$$-\overline{M_{R_O}} = \bar{r} \times \overline{F_R}$$

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

a) Simplificación a una sola fuerza resultante

Caso 3: Sist. de fuerzas *paralelas*



$$d_y = \frac{(M_{R_O})_x}{F_R}$$

$$d_x = \frac{(M_{R_O})_y}{F_R}$$

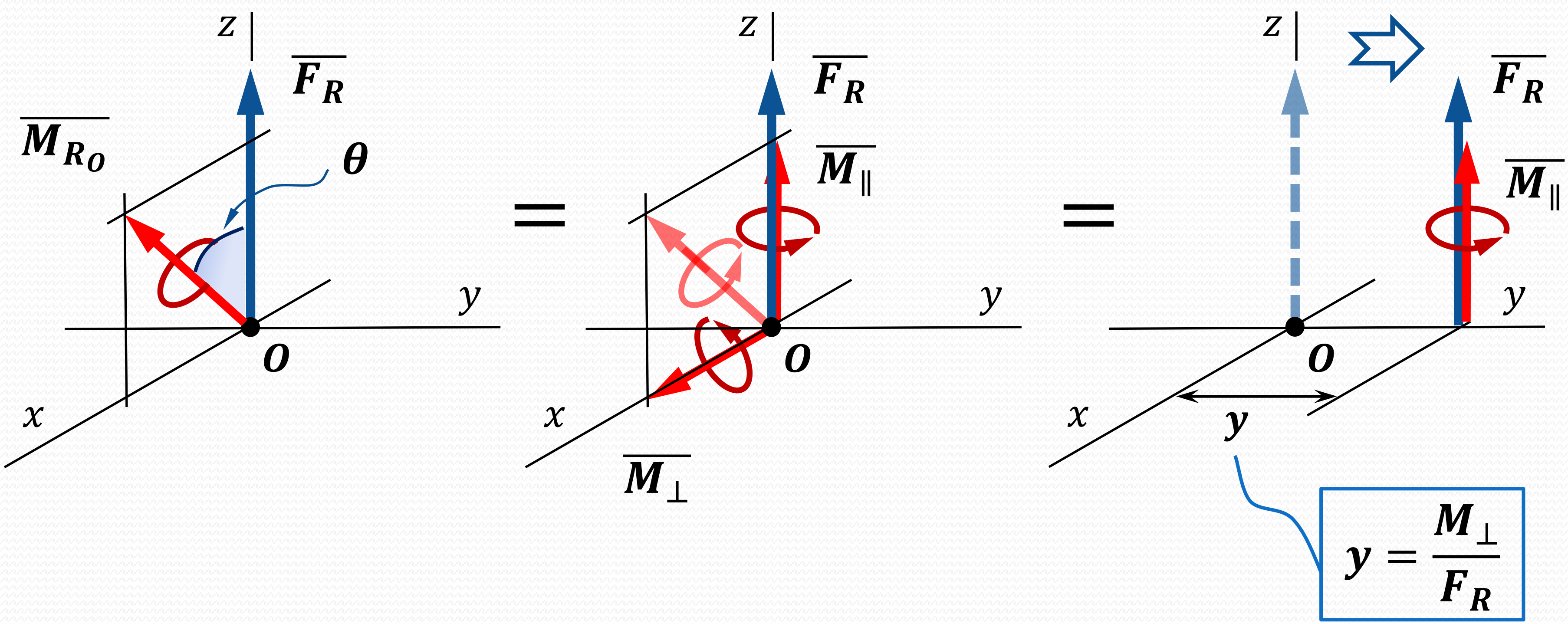
4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

4.9.1 Simplificación a un torsor (llave de torsión)

4.9 Reducción Adicionales de un Sistema de fuerzas

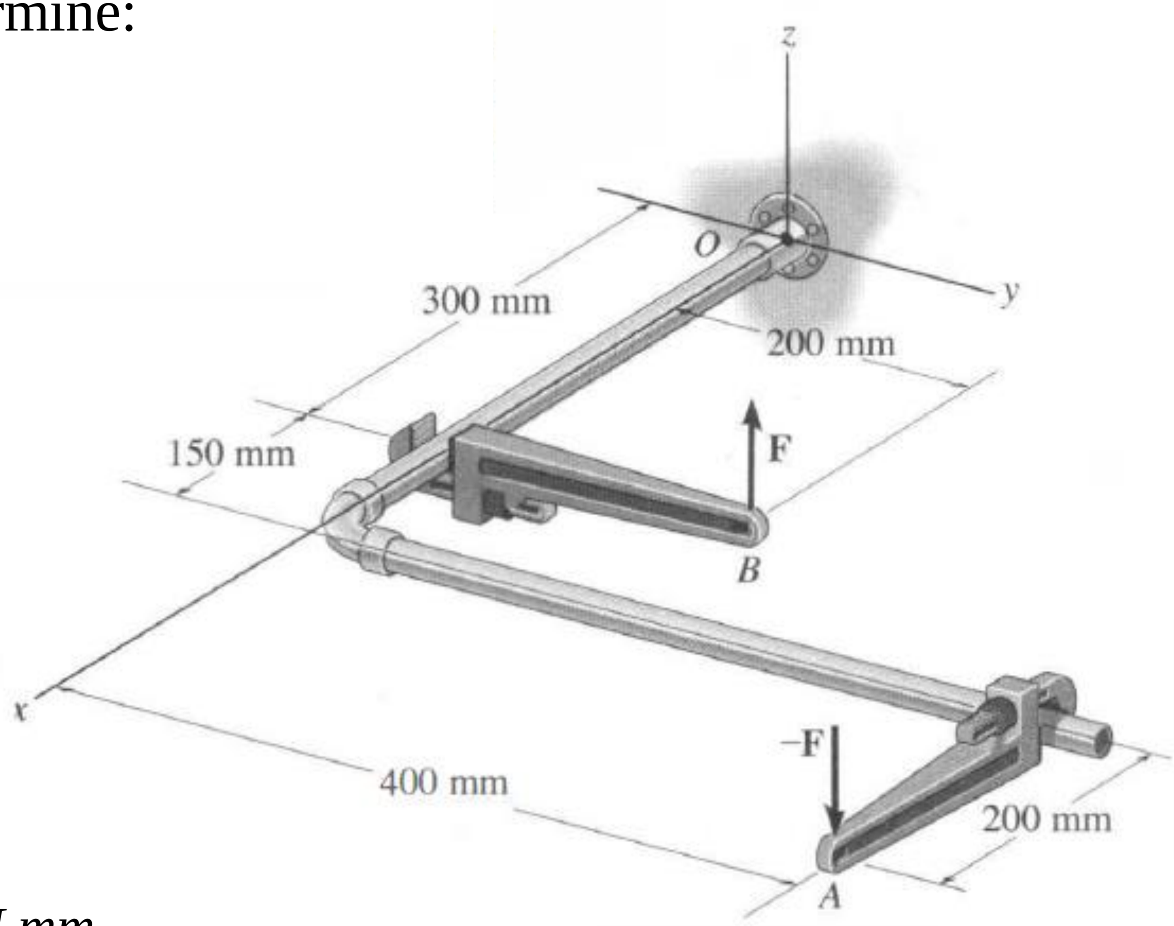
b) Simplificación a un torsor (llave de torsión)

Caso especial: $\overline{\boldsymbol{F_R}} \not\measuredangle \overline{\boldsymbol{M_{R_O}}}$ y $\overline{\boldsymbol{M_{R_O}}} = \overline{\boldsymbol{M_\parallel}} + \overline{\boldsymbol{M_\perp}}$



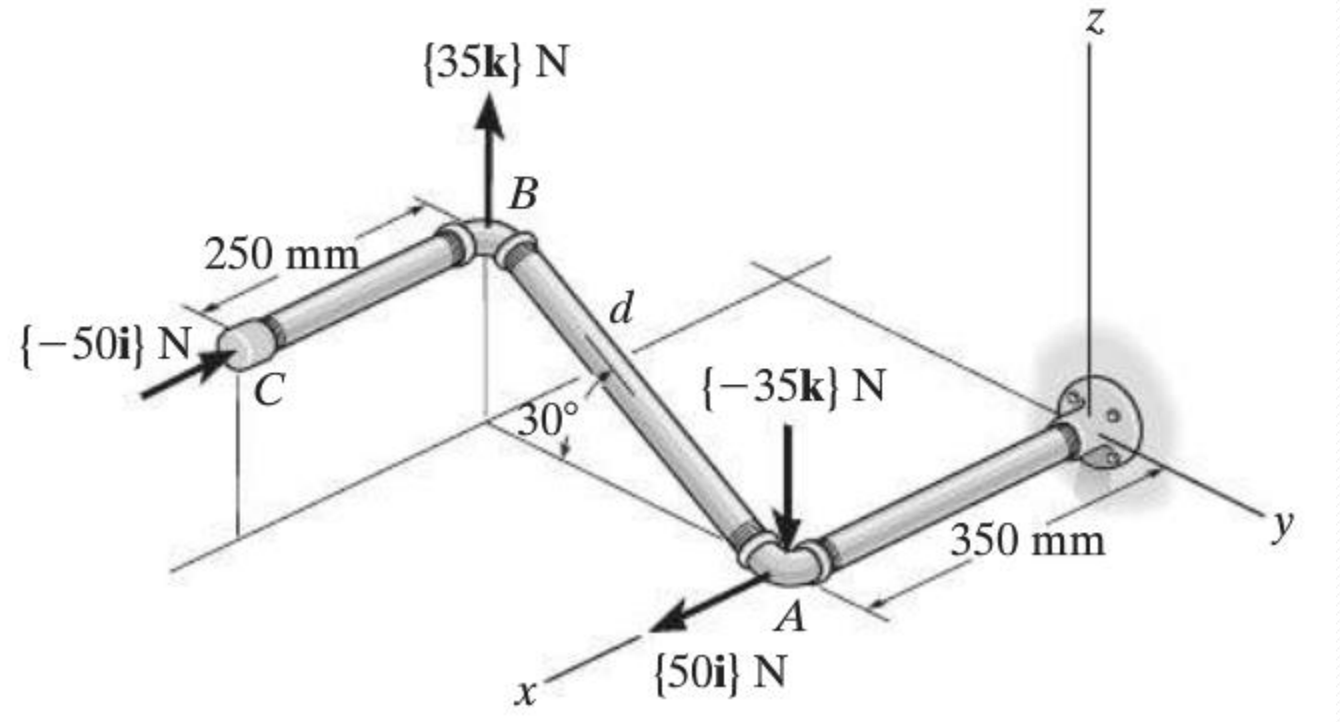
Si F es igual a 25 N, determine:

$a)\ \bar{M}_{par} = \bar{r} \times \bar{F}$
$b)\ \bar{M}_{par} = \bar{M}_{o_1} + \bar{M}_{o_2}$



Rpta: (-5000; 8750; 0) N.mm

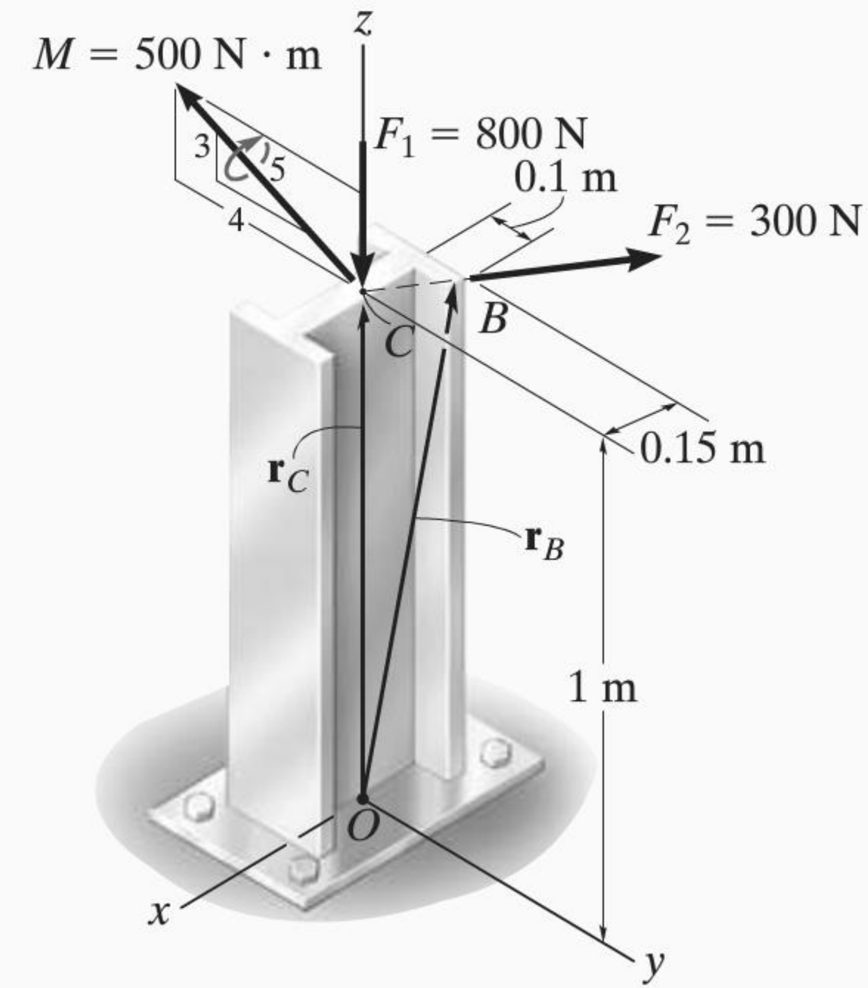
Determine la distancia *d* de modo que el momento resultante sea igual a 20 N.m



Rpta: d=342mm

Remplazar el sistema por una fuerza resultante y un momento resultante:

a) En el punto O.
b) En el punto C.



Rpta:

a) (-249,615; 166.41; -800)N
(-166.41; -649.615; 300)N.m

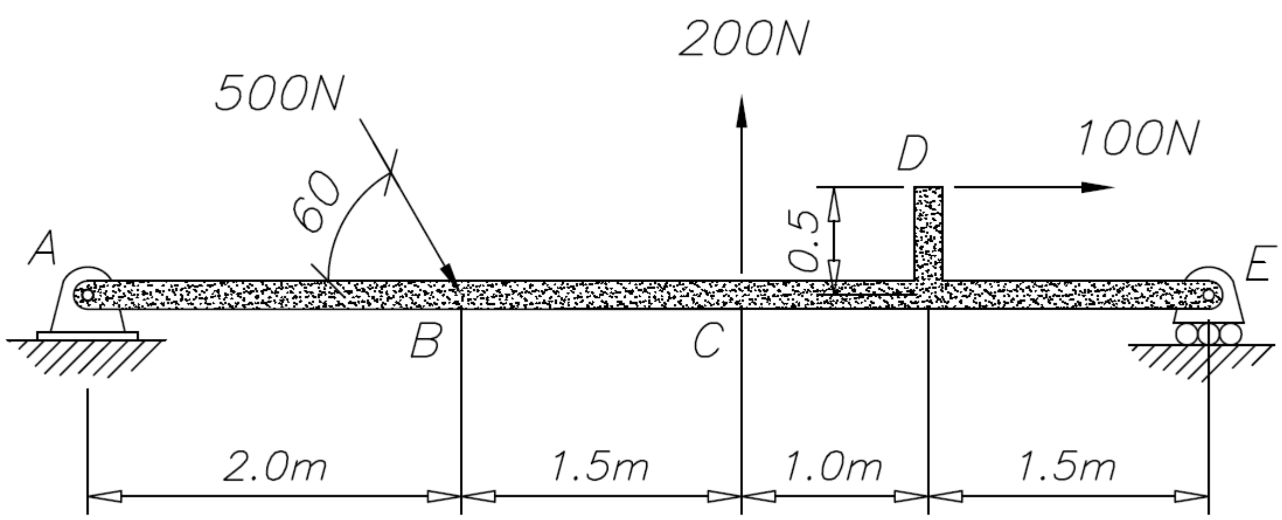
b) (-249,615; 166.41; -800)N
(0; -400; 300)N.m

Remplazar el sistema por una fuerza resultante y un momento resultante:

a) En el punto E.

b) En el punto A.

c) Determinar la magnitud, dirección y la ubicación sobre la viga de una ***fuerza resultante*** medido desde E.



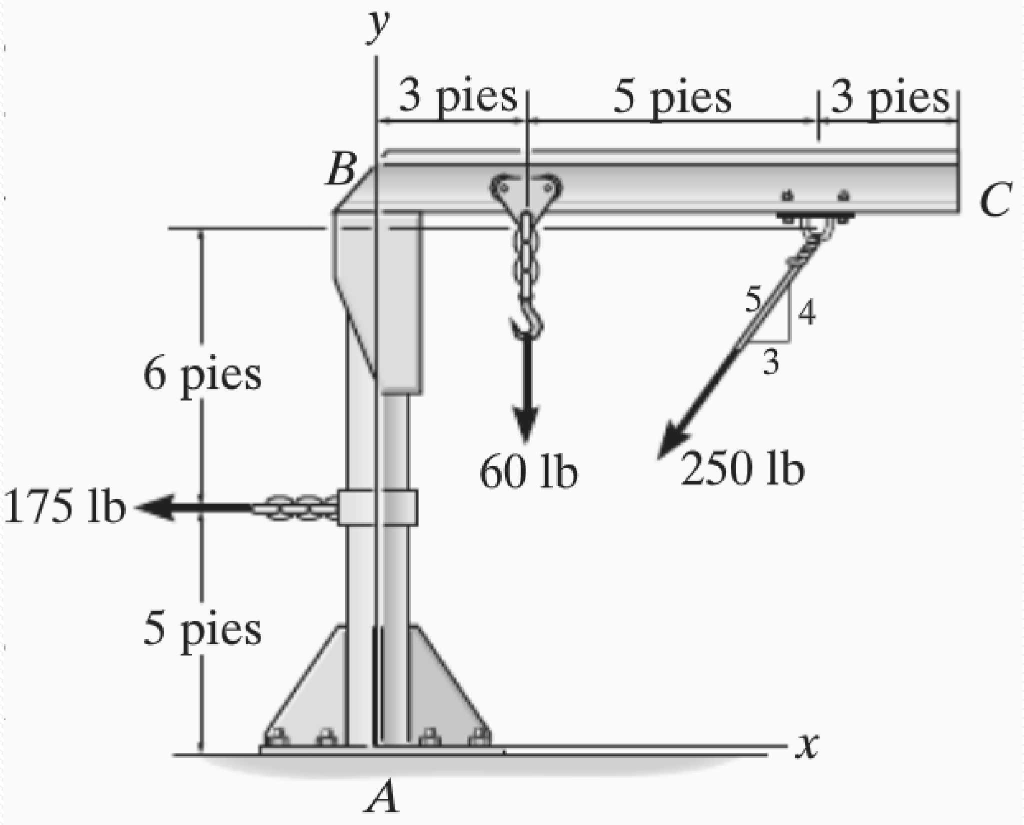
Rpta:

a) 420.46 N y 1182 N.m

b) 420.46 N y -216 N.m

c) 420.46 N ; 33.65° y 5.07 m (a la izquierda de E.)

Remplazar el sistema por una fuerza resultante y un momento resultante: a) en el punto ***A***, b) en el punto ***B*** y c) determinar la magnitud y dirección de una ***fuerza resultante*** y especificar en qué punto la línea de acción de la resultante intersecta la columna AB y el pescante BC.



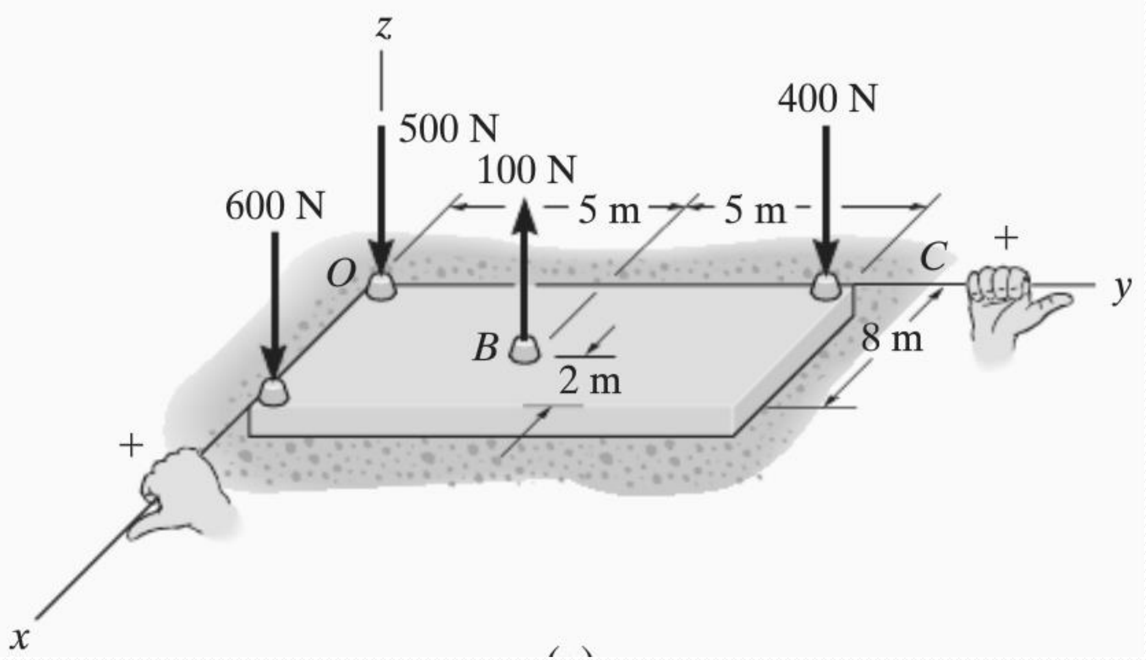
Rpta:

a) 416.2 lb y 745 lb.pie

b) 416.2 lb y -2830 lb.pie

c) 420.46 N ; 38.66°;
(-2.865;0) m; (0; 2.292)m
y (10.885; 11)m

Remplazar el sistema por una fuerza resultante y un momento resultante en el punto origen y determinar la magnitud, dirección y la ubicación del punto de aplicación sobre la plancha de una ***fuerza resultante.***



Rpta:

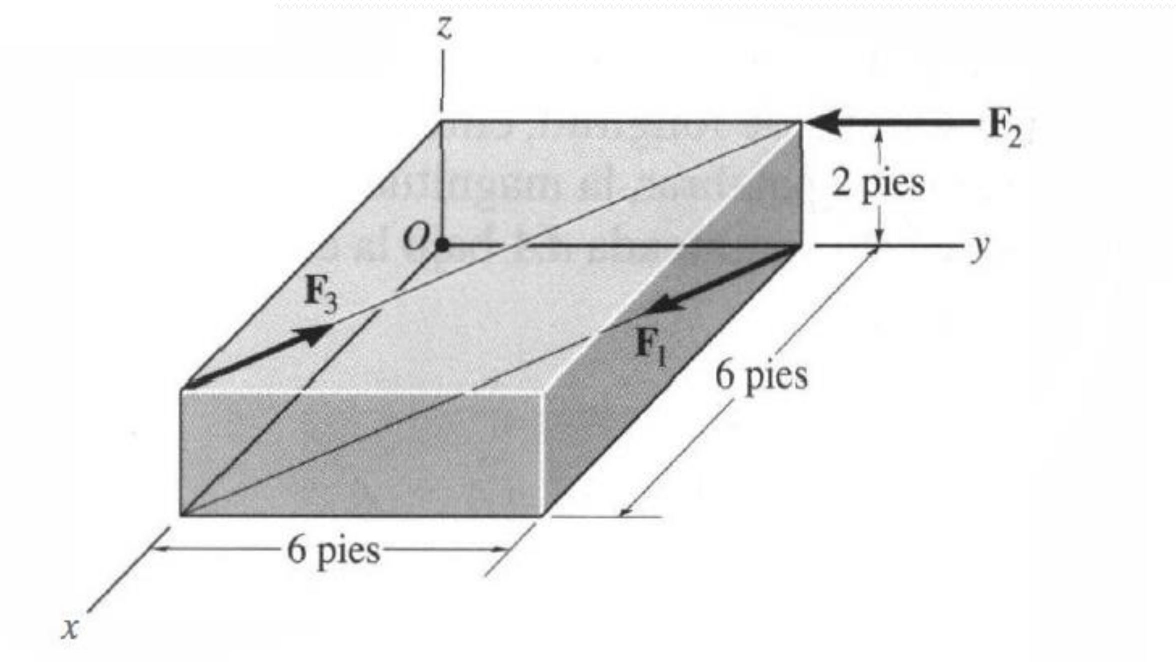
a) (0; 0; -1400) N y (-3500; 4200; 0) N.m

b) 1400 N ; dirección del eje -z; (3; 2.5;0) m

Cada una de las tres fuerzas que actúan sobre el bloque tienen magnitud de 10 lb. Remplazar este sistema por

a) una fuerza y momento resultante y

b) por una llave y especificar el punto donde la llave interseca al eje z, medida esta intersección desde el origen.



Rpta:

a) (0; -10; 0) lb y (5.86; -14.14; 0) lb.pie

b) 0.586 pie