Capítulo 4 [I] Resultantes de Sistemas de fuerzas

Estática 2015-1

Profesor Herbert Yépez Castillo

Introducción

4.1 Momento de una fuerza – Formulación Escalar

4.2 Producto Cruz

4.3 Momento de una fuerza – Formulación Vectorial

4.4 Principio de momentos

4.5 Momento de una fuerza respecto a un eje

4.6 Momento de un par

4.7 Sistemas Equivalentes

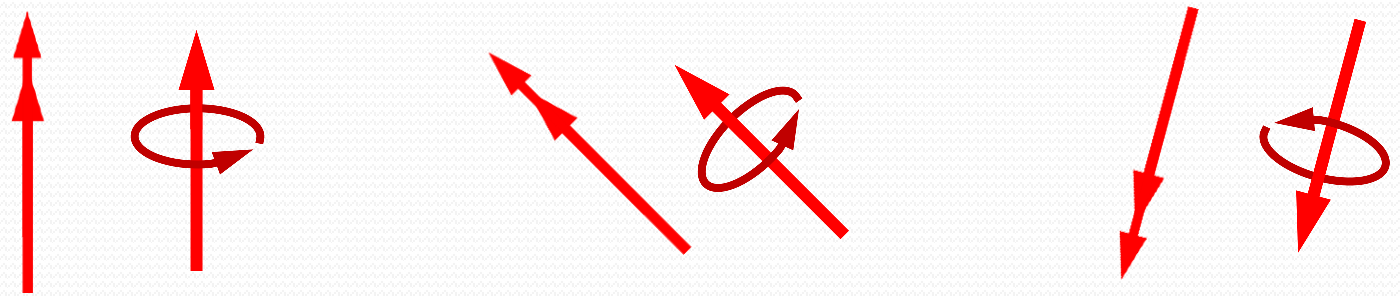
4.8 Reducción de un Sistema de fuerzas

4.9 Reducciones adicionales de un Sist. de fuerzas

4.1 Momento de una fuerza – Formulación Escalar

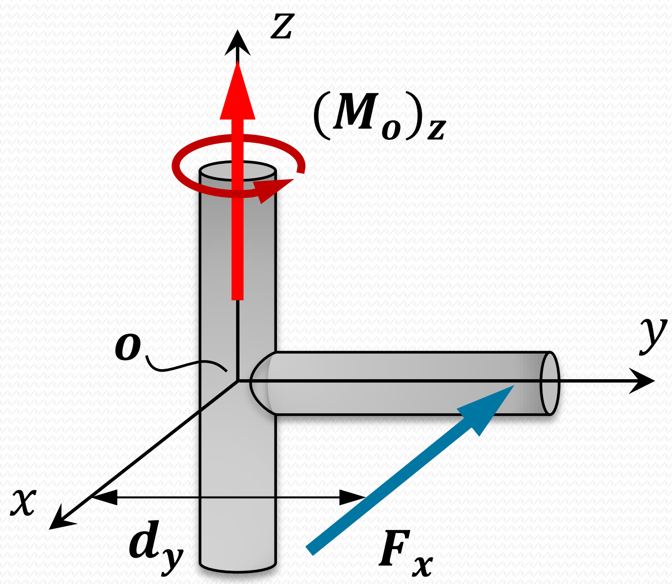
4.1 Momento de una fuerza – formulación Escalar

Momento de una fuerza puede ser representado gráficamente de dos formas:



4.1 Momento de una fuerza – formulación Escalar

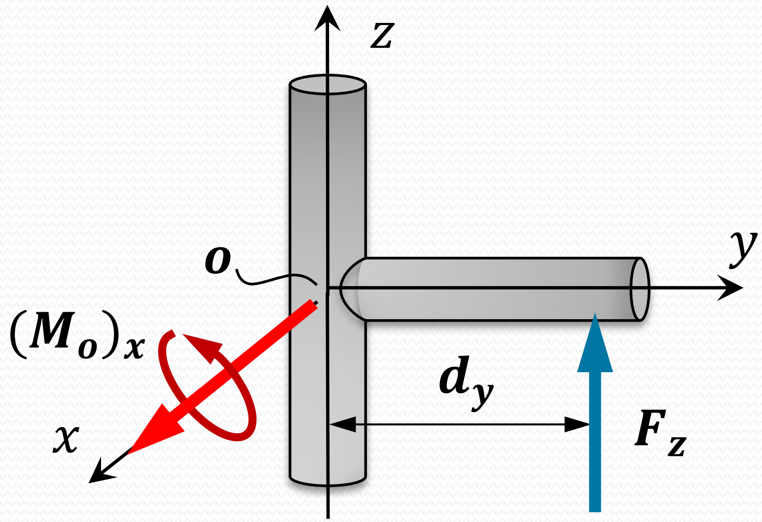
Momento de una fuerza **respecto a un punto o eje** es la **tendencia** de la fuerza a ocasionar que el cuerpo **gire** alrededor del mismo punto o eje.



$$\bar{F}_x \in XY$$
$$d_y \perp \bar{F}_x$$
$$\Longrightarrow (\overline{M_o})_z \perp XY$$

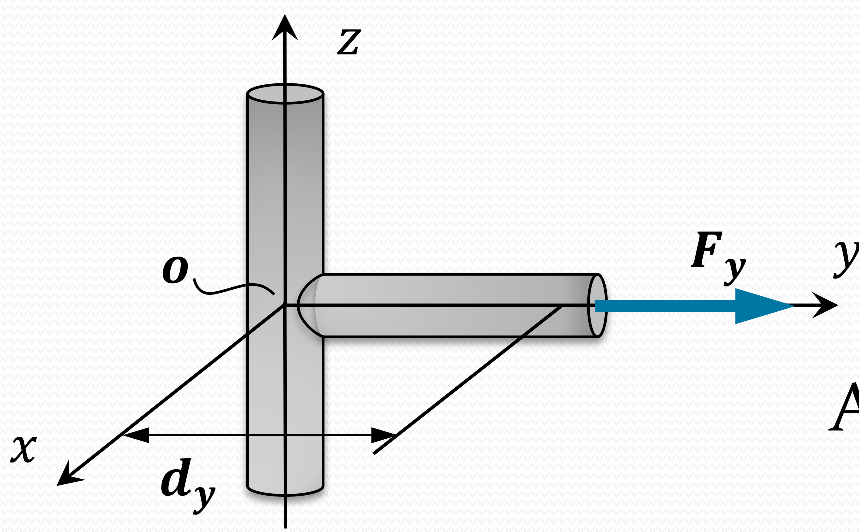
Tendencia a **girar** el tubo sobre el eje z

4.1 Momento de una fuerza – formulación Escalar



$$\bar{F}_z \in YZ$$
$$d_y \perp \bar{F}_z$$
$$\Longrightarrow (M_o)_x \perp YZ$$

Tendencia a "**girar**" el tubo sobre el eje x



$$\bar{F}_y \in XY$$
$$d_y \parallel \bar{F}_y$$
$$\Longrightarrow \nexists(\overline{M_o})_{x,y,z}$$

Ausencia de **giro**

4.1 Momento de una fuerza – formulación Escalar

Formulación Escalar

$$\boxed{\boldsymbol{M_o = F.d}} \qquad [\boldsymbol{N.m}] \quad [\boldsymbol{lb.pie}]$$

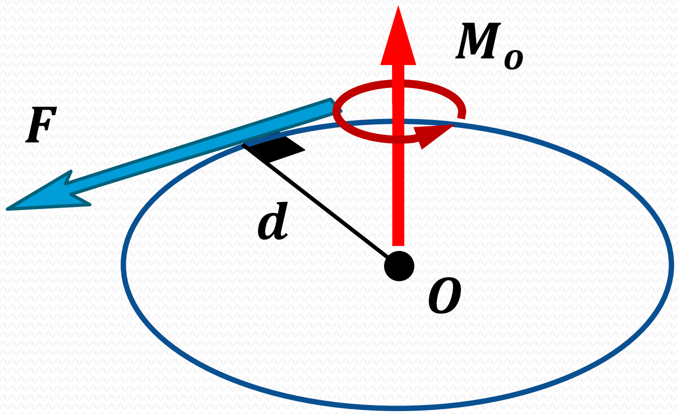
Donde:

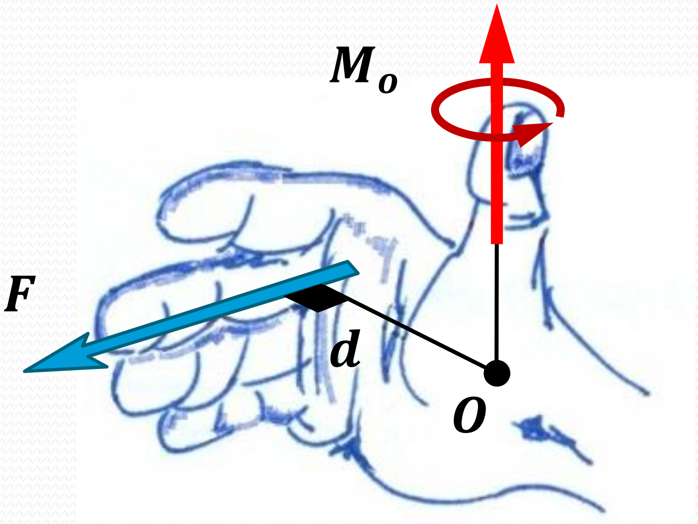
d: Distancia **perpendicular** del eje, que pasa por $\boldsymbol{O}$ y va a la **línea de acción de la fuerza**

F: Fuerza aplicada

M_o: Momento respecto a $\boldsymbol{O}$

4.1 Momento de una fuerza – formulación Escalar

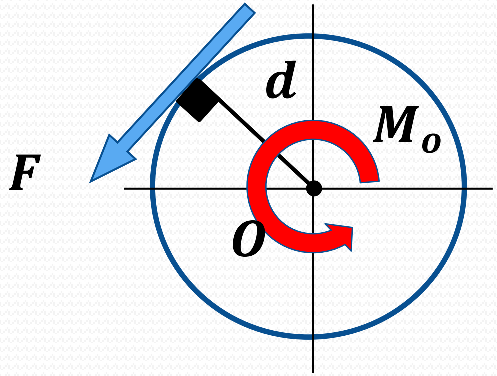


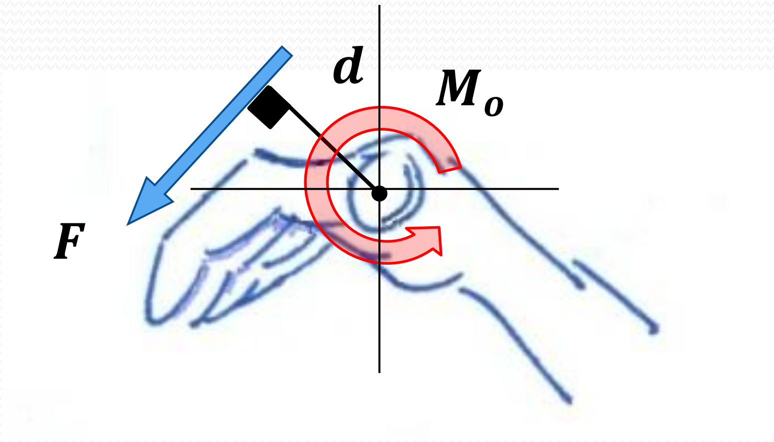


Dirección

- **Pulgar** especifica la dirección y sentido del **vector momento**
- **Los dedos** siguen primero la trayectoria de la **distancia (d)** y posteriormente siguen el **sentido de la fecha**

4.1 Momento de una fuerza – formulación Escalar





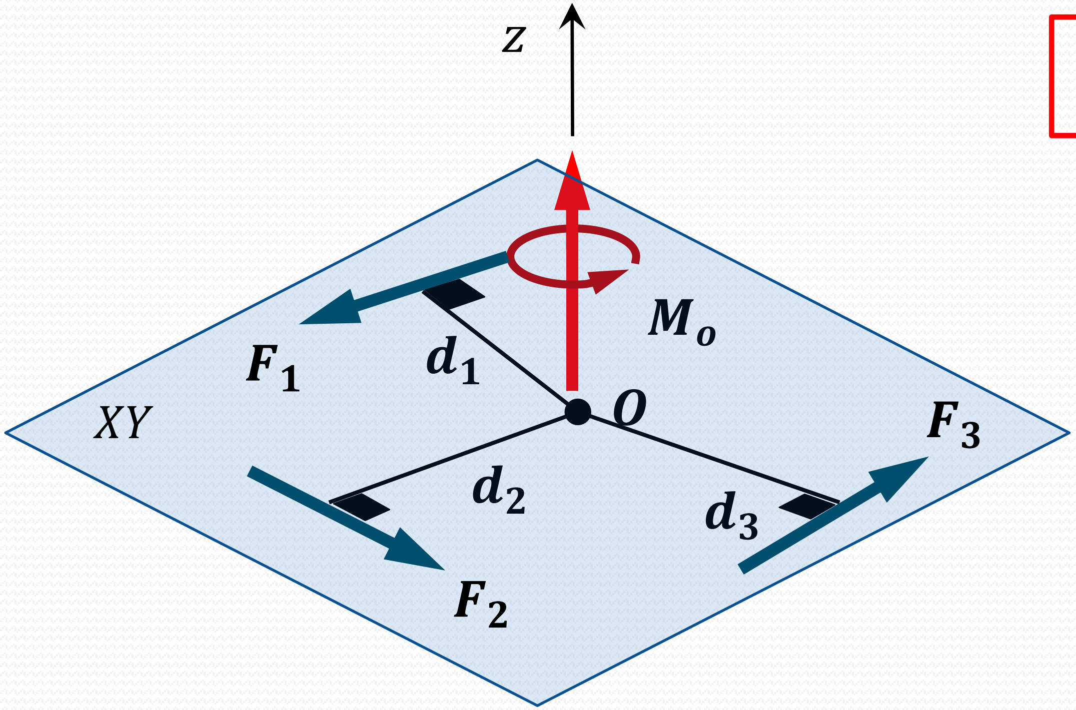
Dirección

- **Pulgar** especifica la dirección y sentido del **vector momento**
- **Los dedos** siguen primero la trayectoria de la **distancia (d)** y posteriormente siguen el **sentido de la fecha**

4.1 Momento de una fuerza – formulación Escalar

Momento resultante de un sistema de fuerzas coplanares

$F_1\ , F_2\ y\ F_3\ \in\ plano\ XY$



$$\boxed{M_{R_o} = \sum F.d}$$

4.2 Producto Cruz

4.2 Producto Cruz

Formulación vectorial cartesiana

$$\bar{A} = (A_x , A_y , A_z)$$
$$\bar{B} = (B_x , B_y , B_z)$$

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \;(2)\;(1) = i(A_y.B_z - A_z.B_y)$$

ojo!

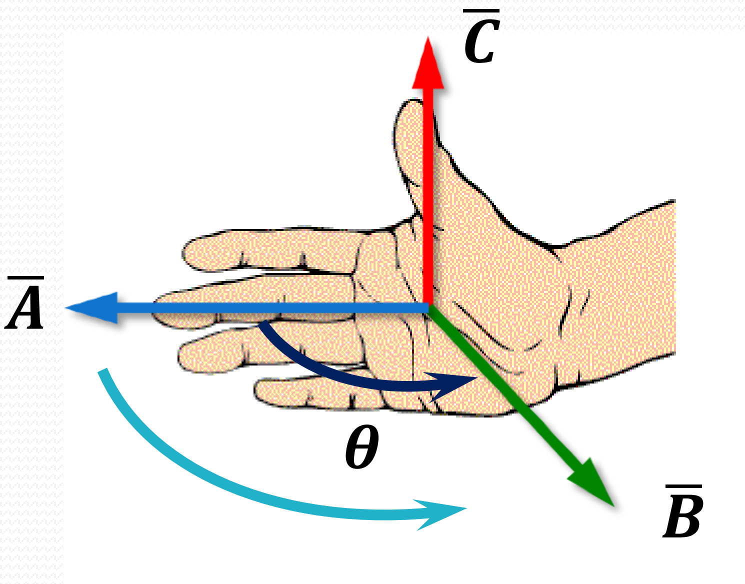
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \;(2)\;(1) = -j(A_x.B_z - A_z.B_x)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \;(2)\;(1) = k(A_x.B_y - A_y.B_x)$$

4.2 Producto Cruz

El producto cruz de dos vectores define un **nuevo vector**.

$$\boxed{\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B}}$$

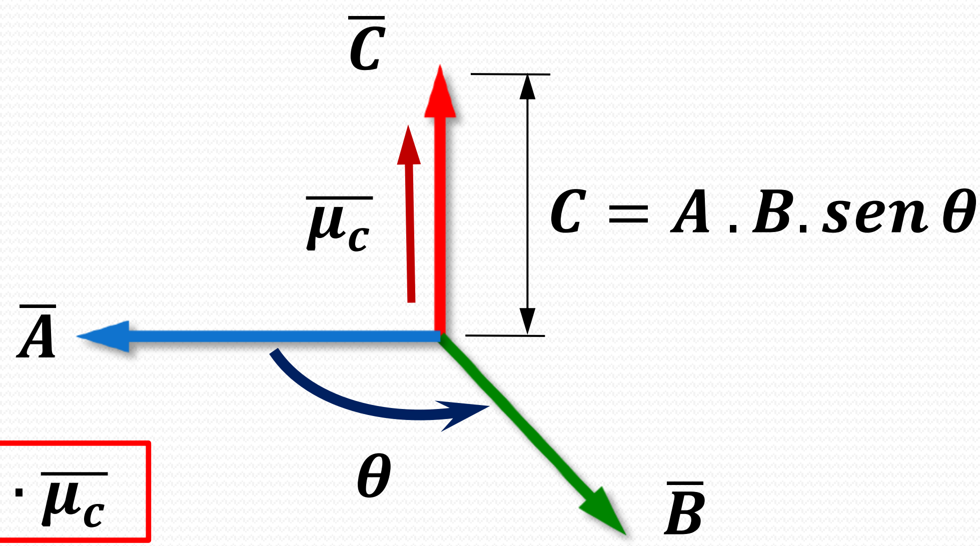


Magnitud

$$C = A\,.\,B.\,sen\,\theta \qquad 0° \leq \theta \leq 180°$$

Dirección

Mano derecha

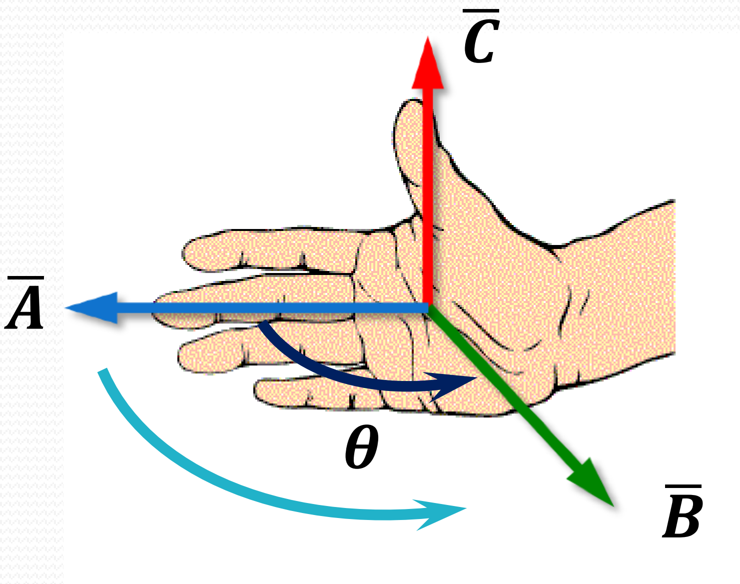


$$\boxed{\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B} = (A\,.\,B.\,se\,n\,\theta) \cdot \overline{\mu_c}}$$

4.2 Producto Cruz

El producto cruz de dos vectores define un **nuevo vector**.

$$\boxed{\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}}$$



$$\begin{aligned} \bar{A} &= (1, 0, 0) \\ \bar{B} &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B} = (0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1, 0, 0) \\ \bar{y} &= (0, 1, 0) \\ \bar{z} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

4.2 Producto Cruz

Formulación vectorial cartesiana

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y.B_z - A_z.B_y)\boldsymbol{i} - (A_x.B_z - A_z.B_x)\boldsymbol{j} + (A_x.B_y - A_y.B_x)\boldsymbol{k}$$

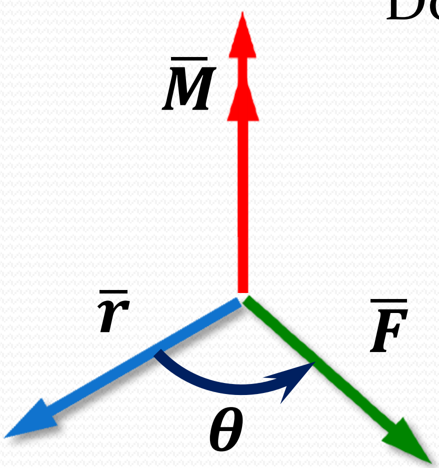
ojo!

4.3 Momento de una fuerza – Formulación Vectorial

4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

Formulación Vectorial

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{M_o}} = \bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{F}}} \quad [\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{m}] \ \ [\boldsymbol{lb} \cdot \boldsymbol{pie}]$$



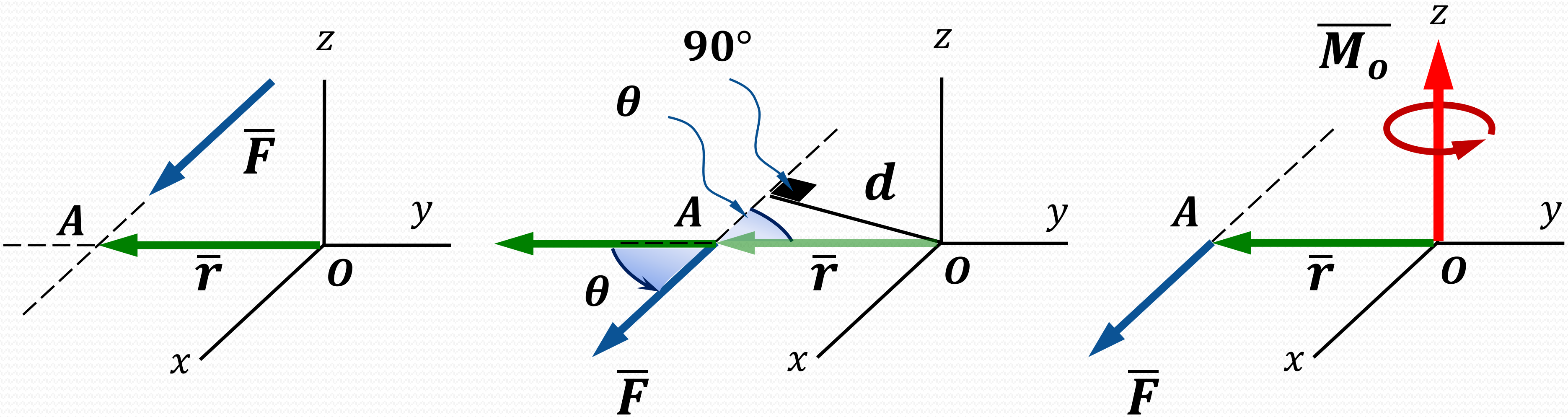
Donde:

$\bar{r}$:	Vector posición desde $\boldsymbol{O}$ hasta cualquier punto que se encuentre sobre la línea de acción de $\bar{\boldsymbol{F}}$
$\bar{F}$:	Fuerza vectorial
$\overline{M_o}$:	Momento de una fuerza respecto a un punto $\boldsymbol{O}$

4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

Magnitud y Dirección

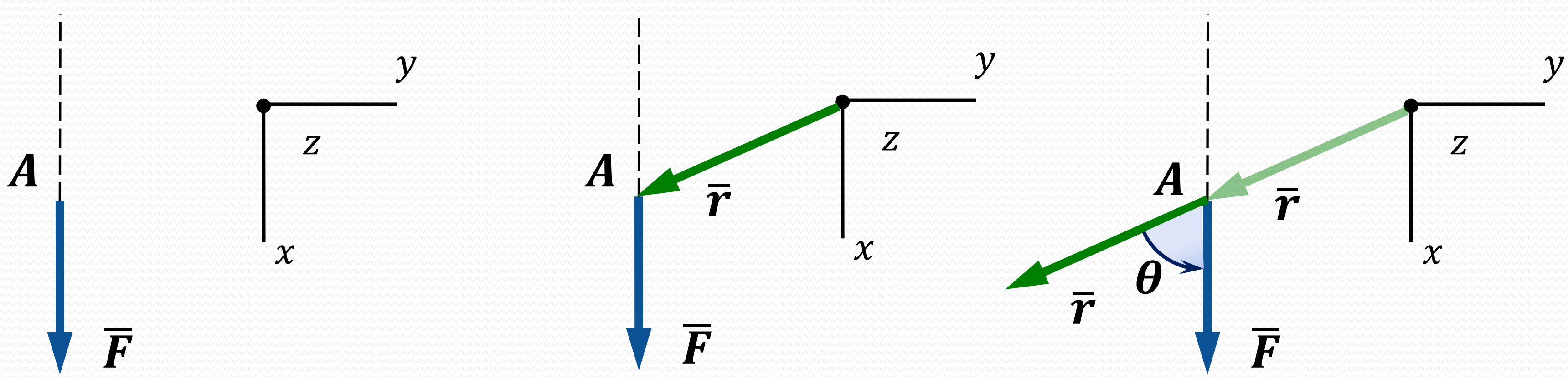
$$M_o = r.F.sen\,\theta = F(r.sen\,\theta) = F.d$$



4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

Magnitud y Dirección

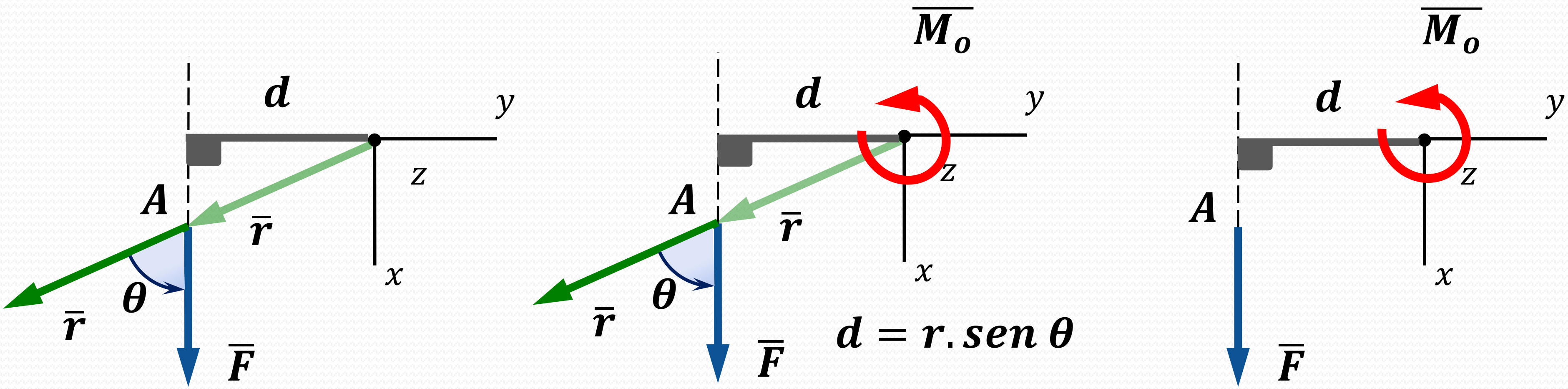
$$\boldsymbol{M_o = r.F.sen\,\theta = F(r.sen\,\theta) = F.d}$$



4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

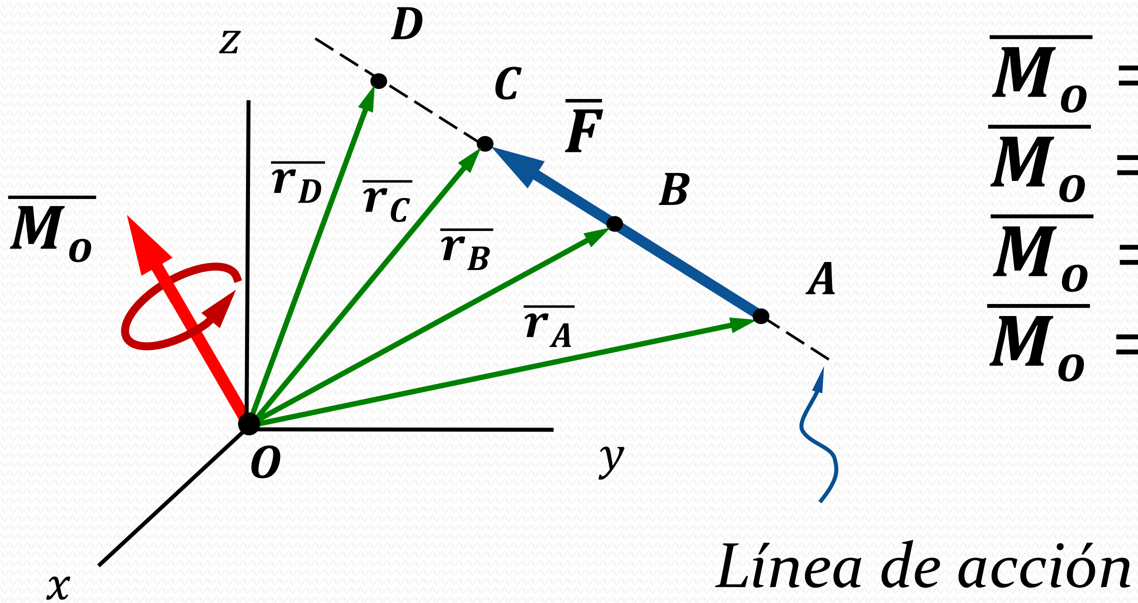
Magnitud y Dirección

$$M_o = r.F.sen\,\theta = F(r.sen\,\theta) = F.d$$



4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

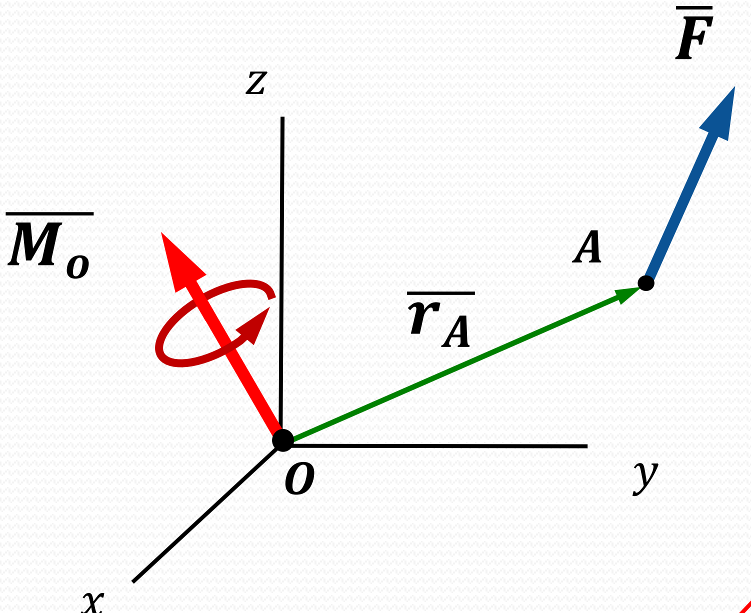
Principio de transmisibilidad



$$\left.\begin{aligned}\overline{M_o} &= \overline{r_A} \times \overline{F}\\ \overline{M_o} &= \overline{r_B} \times \overline{F}\\ \overline{M_o} &= \overline{r_C} \times \overline{F}\\ \overline{M_o} &= \overline{r_D} \times \overline{F}\end{aligned}\right\} \textit{Iguales}$$

4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

Formulación vectorial cartesiana



$$\overline{M_o} = (M_{o_x}\,,\, M_{o_y}\,,\, M_{o_z}\,)$$

$$\overline{M_o} = \overline{r_A} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

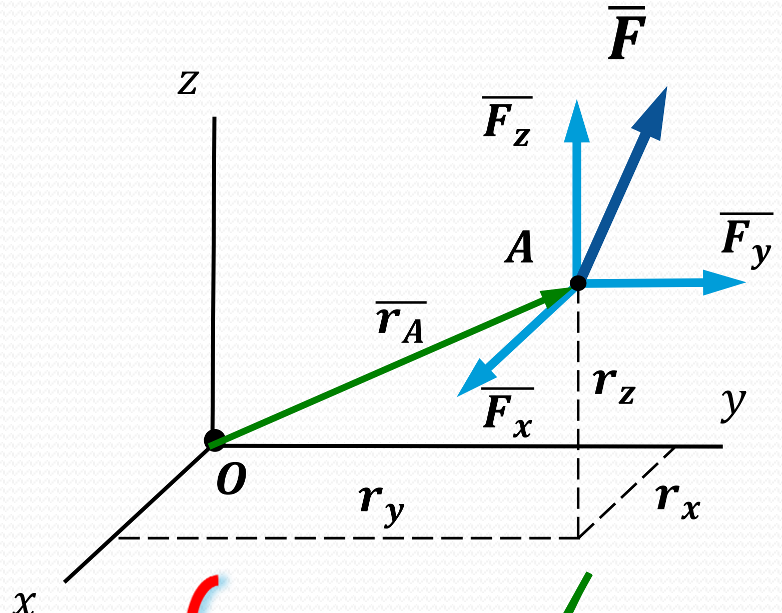
ojo!

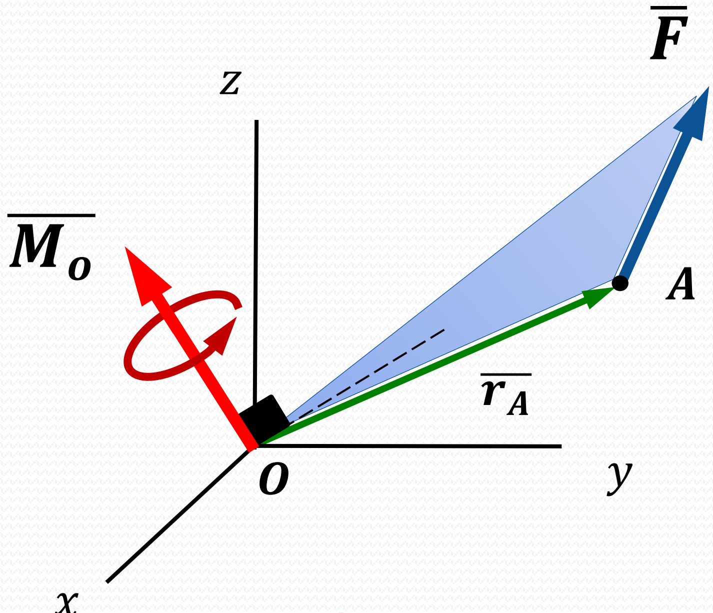
$$\overline{M_o} = (r_y.F_z - r_z.F_y)\boldsymbol{i} - (r_x.F_z - r_z.F_x)\boldsymbol{j} + (r_x.F_y - r_y.F_x)\boldsymbol{k}$$

$$= (\,r_y.F_z - r_z.F_y\;;\quad r_z.F_x - r_x.F_z\;;\quad r_x.F_y - r_y.F_x)$$

4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

Formulación vectorial cartesiana



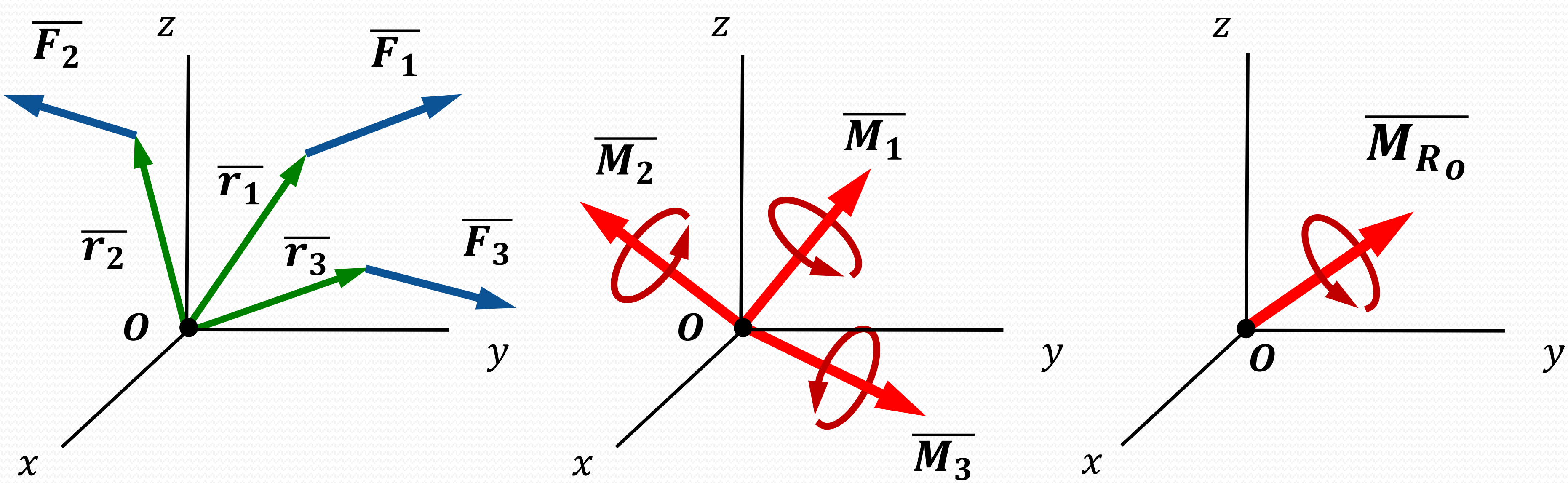


$$M_{o_x}\begin{cases} F_z \text{ y } r_y \\ F_y \text{ y } r_z \\ F_x \end{cases}$$

$$\overline{M_o} = \overline{r_A} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

4.3 Momento de una fuerza – formulación Vectorial

Momento resultante de un sistema de fuerzas

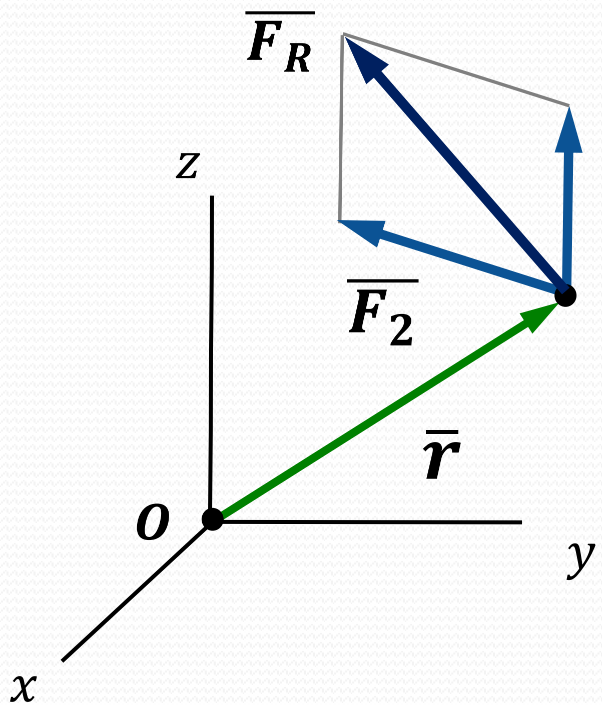


$$\boxed{\overline{M_{R_O}} = \sum(\bar{r} \times \bar{F})}$$

4.4 Principio de momentos

4.4 Principio de momentos

Teorema de Varignon (matemático francés)



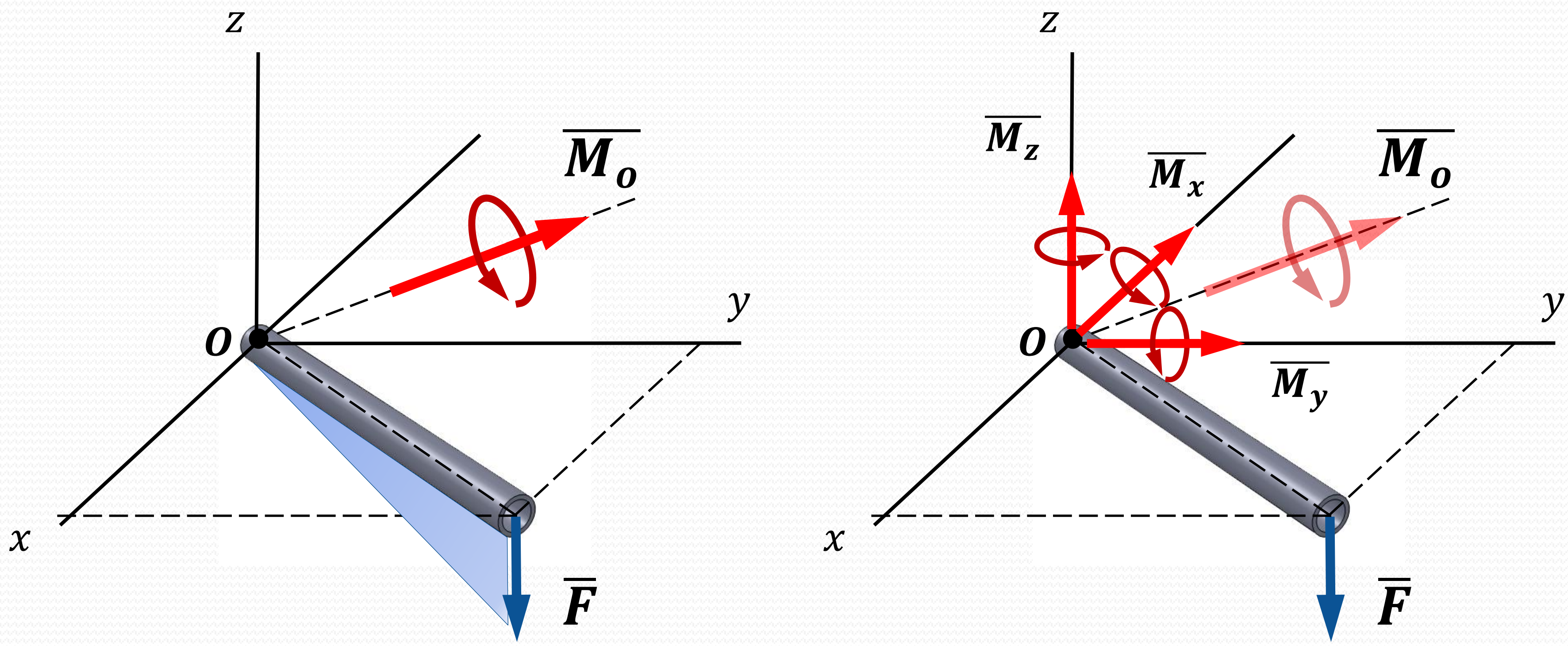
$$\overline{M_{R_O}} = \bar{r} \times \overline{F_1} + \bar{r} \times \overline{F_2}$$

$$\overline{M_{R_O}} = \bar{r} \times (\overline{F_1} + \overline{F_2})$$

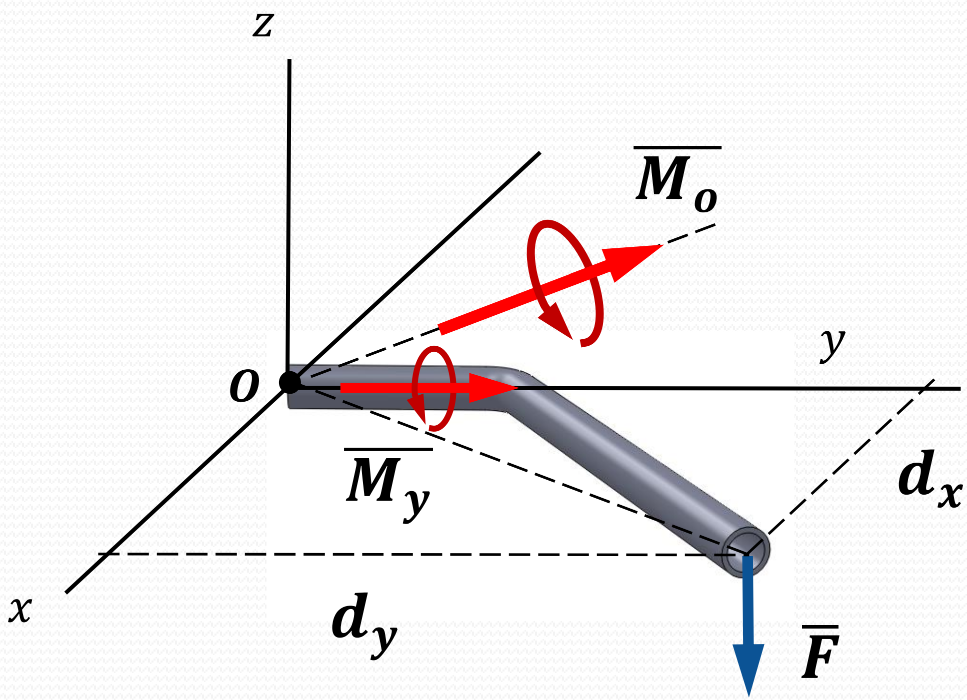
$$\boxed{\overline{M_{R_O}} = \bar{r} \times \overline{F_R}}$$

4.5 Momento de una fuerza con respecto a un Eje

4.5 Momento de una fuerza con respecto a un Eje



4.5 Momento de una fuerza con respecto a un Eje

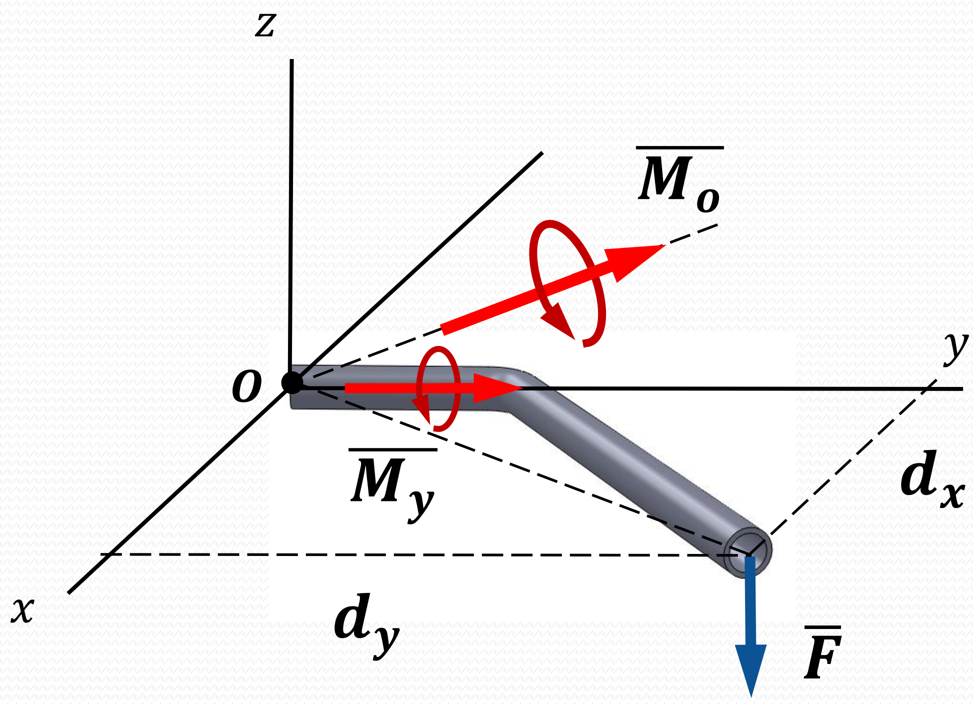


Por **razones prácticas**, puede ser necesario determinar la componente $\boldsymbol{M_y}$.

Debido a que $\boldsymbol{M_y}$ tiende a **destornillar** a la tubería

4.5 Momento de una fuerza con respecto a un Eje

Análisis Escalar

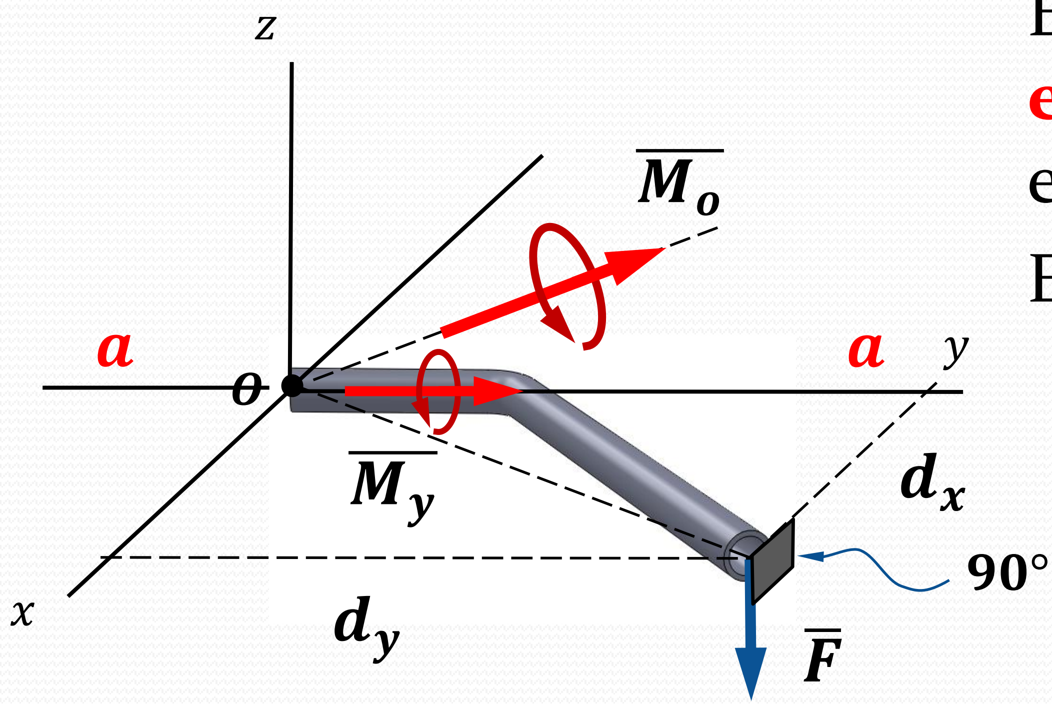


En general, si la **línea de acción** de una fuerza es **perpendicular** a cualquier **eje específico** $\boldsymbol{a - a}$, entonces

$$\boxed{M_a = F.d_a}$$

4.5 Momento de una fuerza con respecto a un Eje

Análisis Escalar



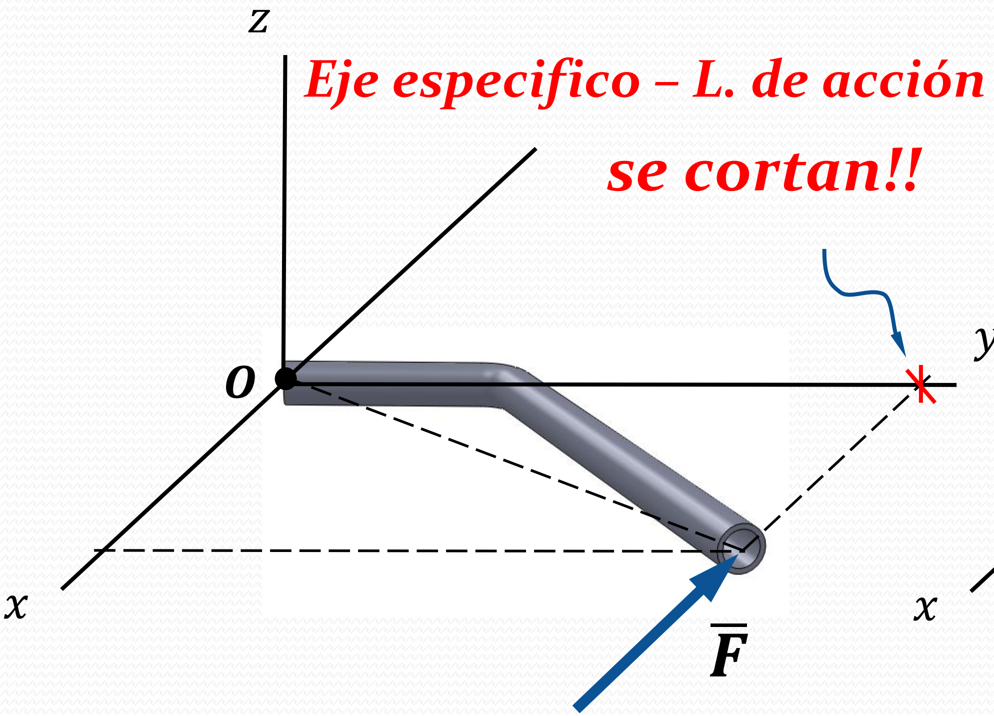
En este caso el **eje especifico $a - a$** es el eje y

Entonces:

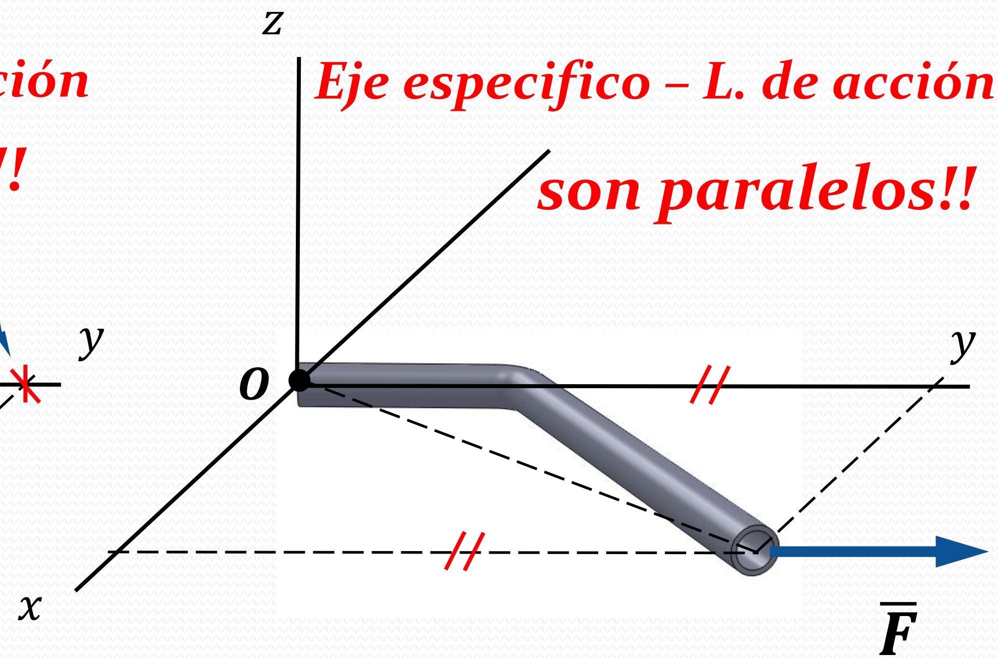
$$M_a = M_y = F.d_x$$

4.5 Momento de una fuerza con respecto a un Eje

Análisis Escalar



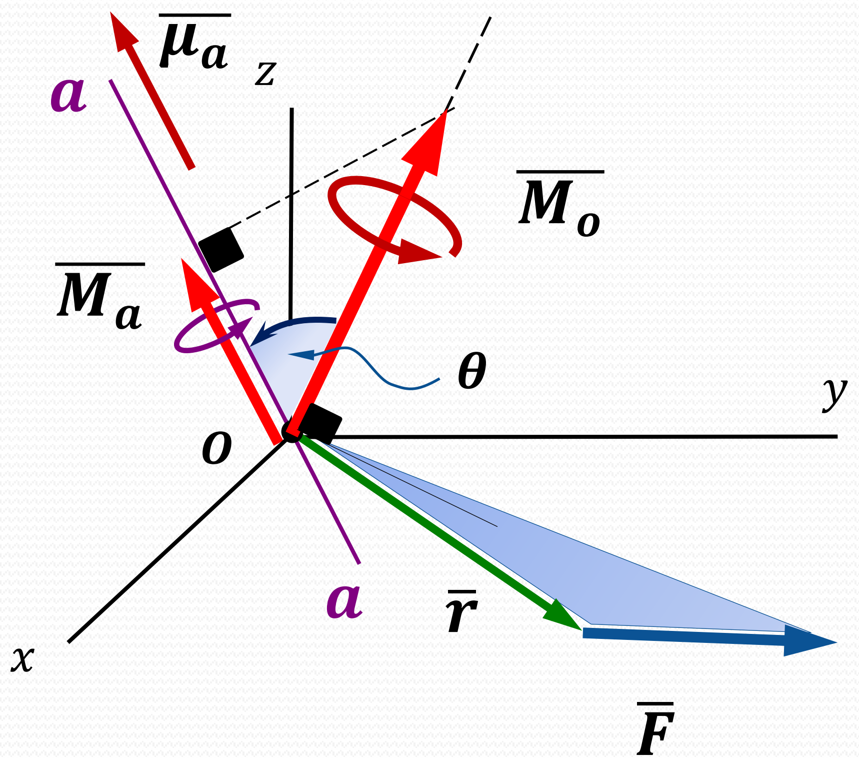
$$M_y = 0$$



$$M_y = 0$$

4.5 Momento de una fuerza con respecto a un Eje

Análisis Vectorial



$$M_a = M_o . \cos\theta$$

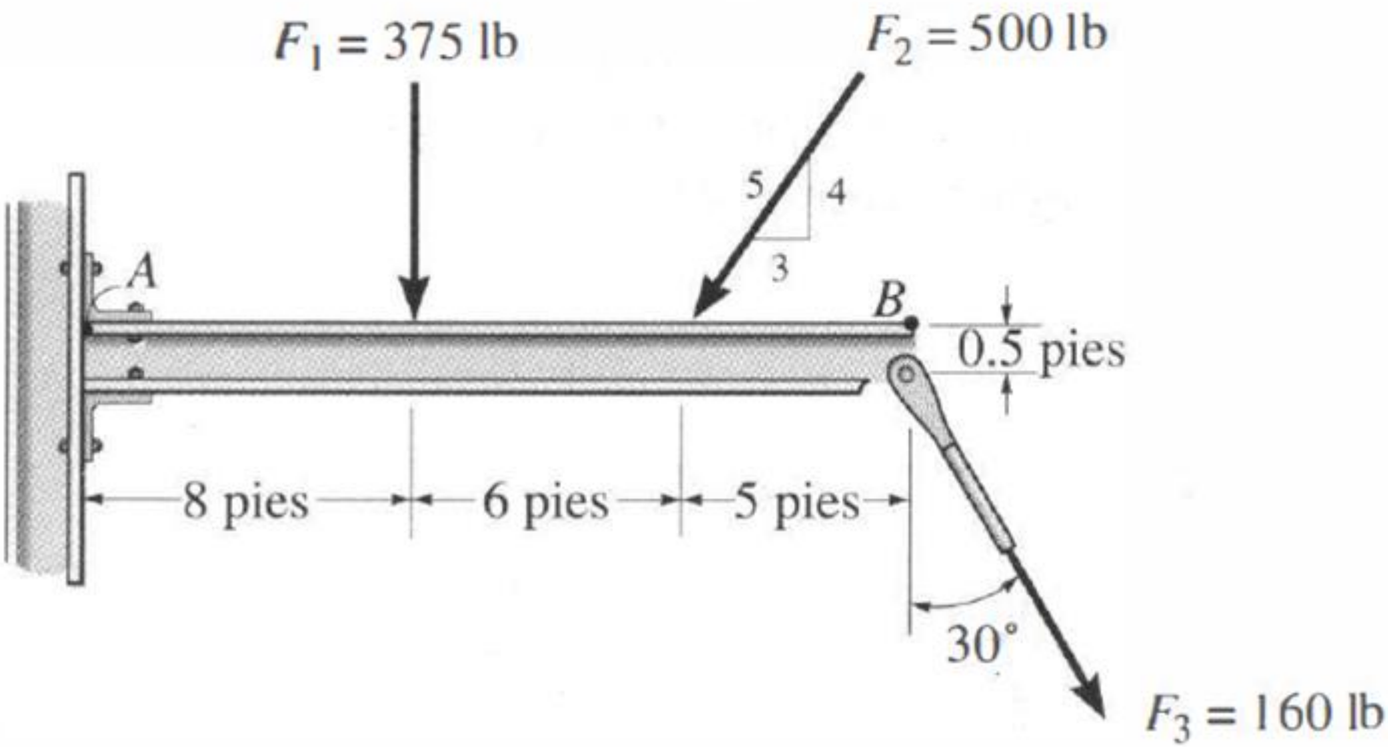
$$M_a = \overline{M_o} \cdot \overline{\mu_a}$$

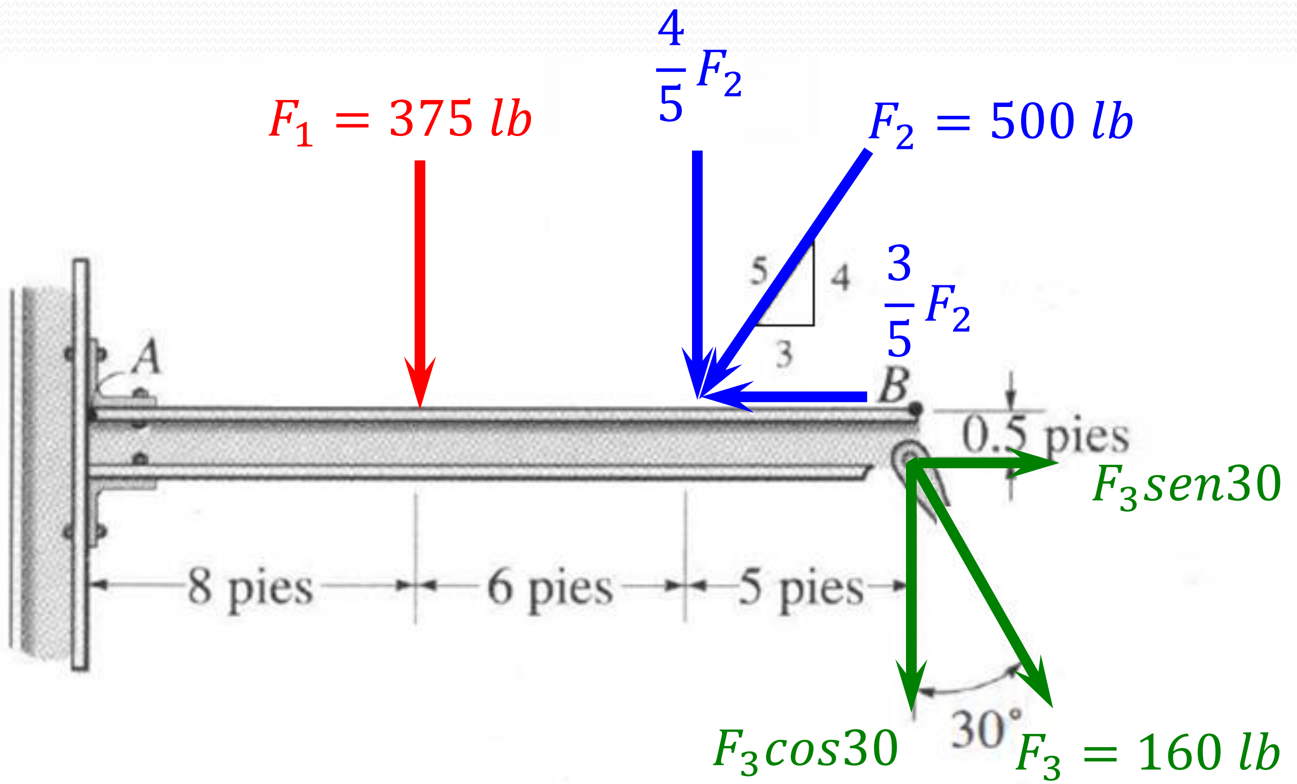
$$\overline{M_a} = M_a \cdot \overline{\mu_a}$$

$$\overline{M_a} = (\overline{M_o} \cdot \overline{\mu_a}) \cdot \overline{\mu_a}$$

$$\overline{M_a} = \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{\overline{r} \times \overline{F}}_{Vector}) \cdot \overline{\mu_a}}_{Escalar}) \cdot \overline{\mu_a}}_{Vector}$$

4-13. Determine el momento con respecto al punto A

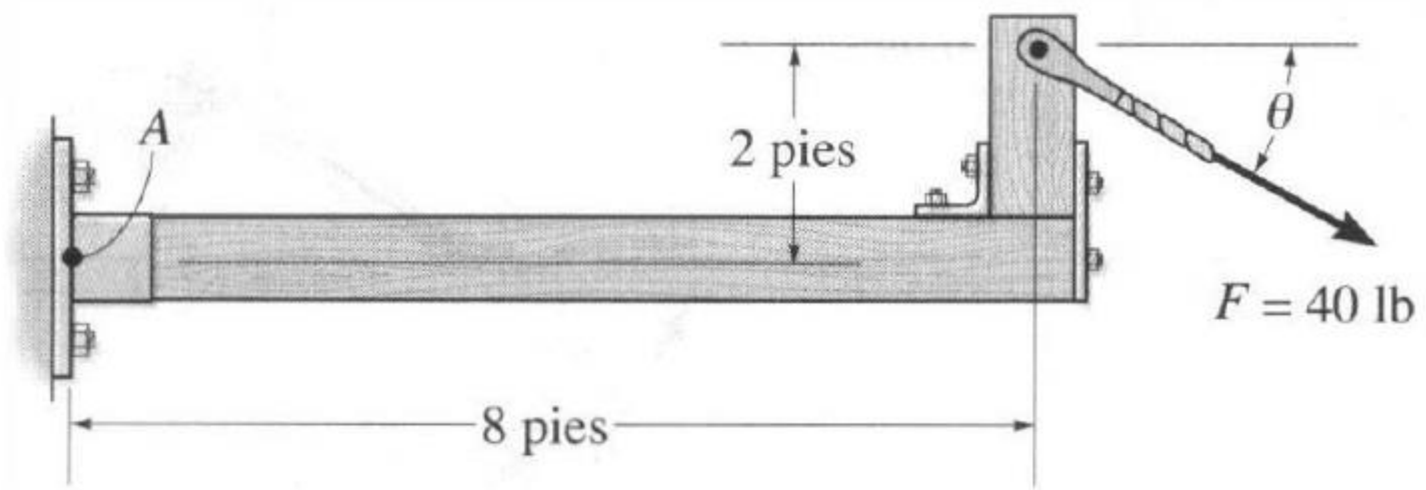




$$M_A = -(8)F_1 - (14)\frac{4}{5}F_2 + (0)\frac{3}{5}F_2 - (19)F_3\cos 30° + (0.5)F_3\sin 30°$$

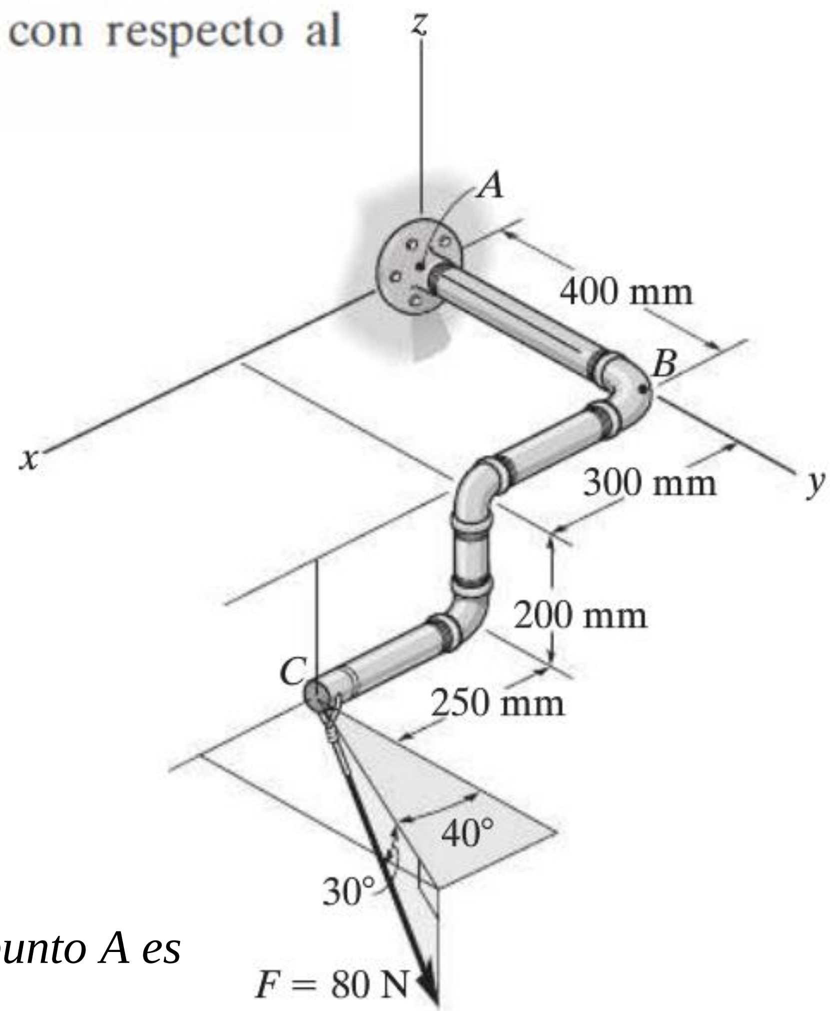
$$M_A = -11.19\ Kip.ft$$

4-18. Determine la dirección $\theta(0° \leq \theta \leq 180°)$ de la fuerza $F = 40$ lb para que produzca (a) el máximo momento con respecto al punto A, y (b) el mínimo momento con respecto al punto A. Calcule el momento en cada caso.



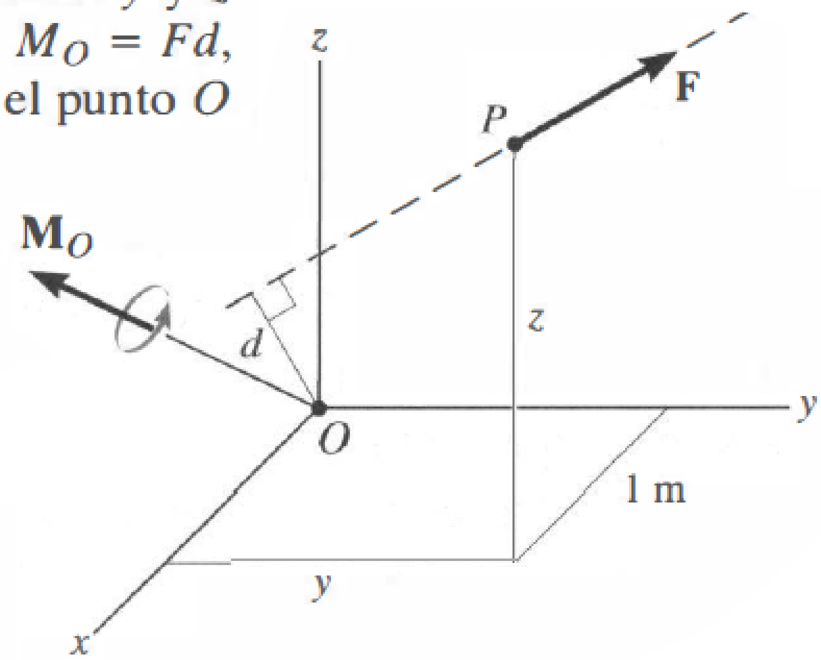
Rpta.: El momento máximo y mínimo respecto al punto A se obtiene con una dirección igual a 75.964° y 165.964°, respectivamente.

4-45. La tubería está sometida a la fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto *A*.



Rpta.: El momento de la fuerza respecto al punto A es (-5.392; 13.088; 11.348) N.m

4-49. La fuerza $\mathbf{F} = \{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$ N produce un momento con respecto al punto O de $\mathbf{M}_O = \{-14\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ N · m. Si esta fuerza pasa por un punto que tiene una coordenada x de 1 m, determine las coordenadas y y z del punto. Además, teniendo en cuenta que $M_O = Fd$, encuentre la distancia perpendicular d desde el punto O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$.



Rpta.: La coordenada del punto P es (1; 1; 3)m y la distancia perpendicular de O a la línea de acción de la fuerza F es 1.149 m.

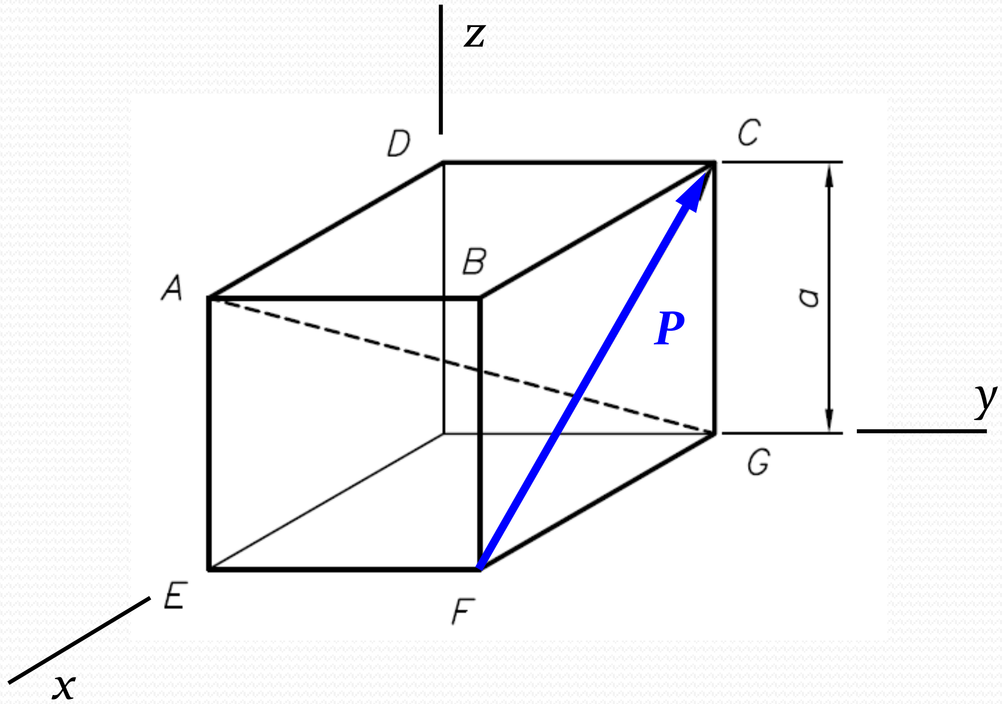
Sobre una de las caras del cubo de lado ***a*** actúa una fuerza ***P***. Determinar:

a) El momento vectorial que genera la fuerza ***P*** respecto al vértice ***A.***

b) El momento vectorial que genera la fuerza ***P*** respecto a la arista ***AB***

c) El momento escalar que genera la fuerza ***P*** respecto a la diagonal ***AG*** y

d) La distancia perpendicular entre ***AG y FC.***



Rpta.:

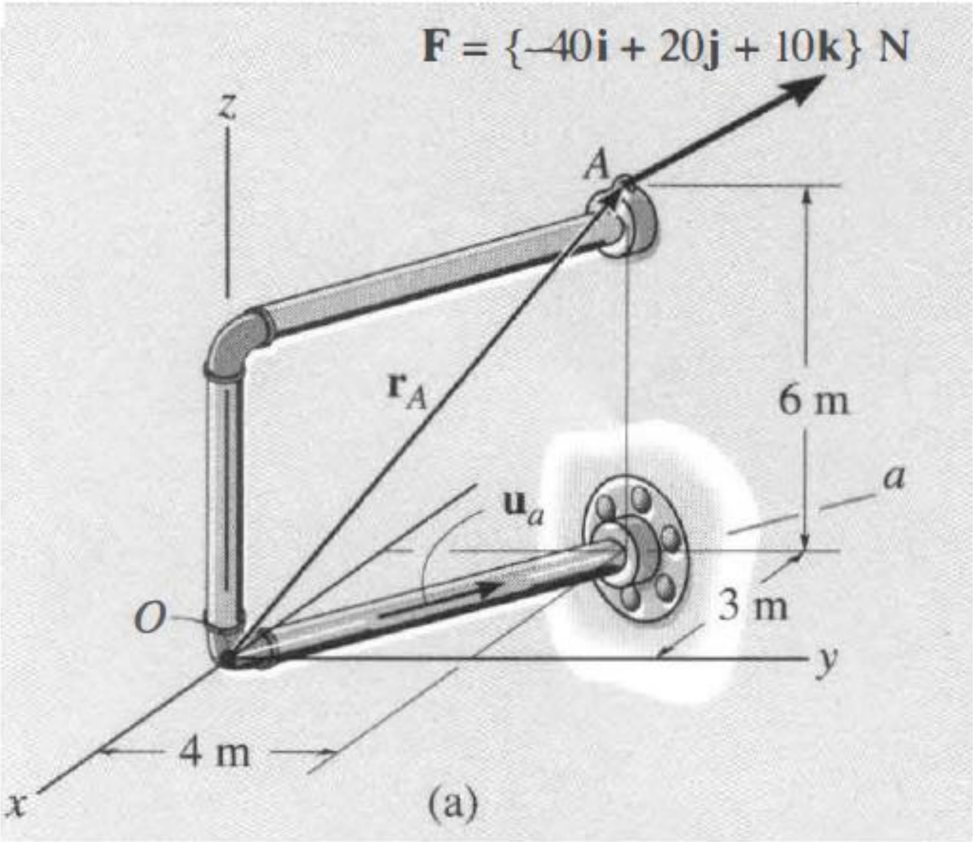
$a)\ \dfrac{aP}{\sqrt{2}}(1,1,1)$

$b)\ \dfrac{aP}{\sqrt{2}}(0,1,0)$

$c) -\dfrac{aP}{\sqrt{6}}$

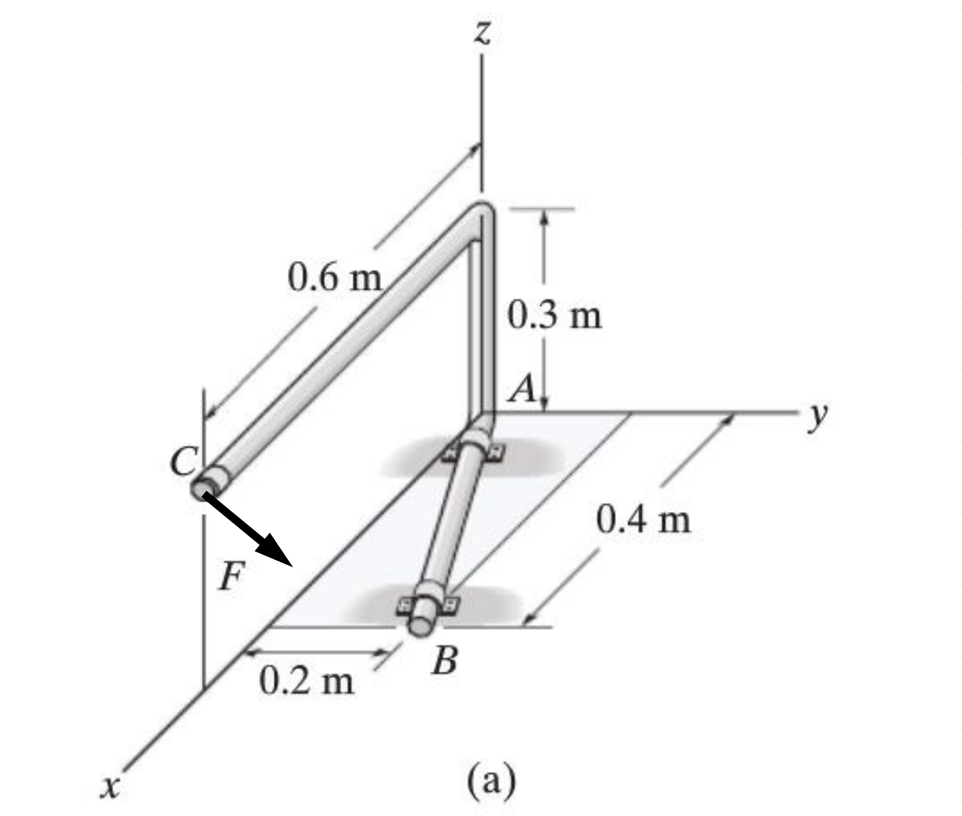
$d)\ \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Una fuerza F=(-40; 20; 10) N actúa en el punto A. Determinar los momentos de esta fuerza con respecto a los ejes ***x*** y ***a***.



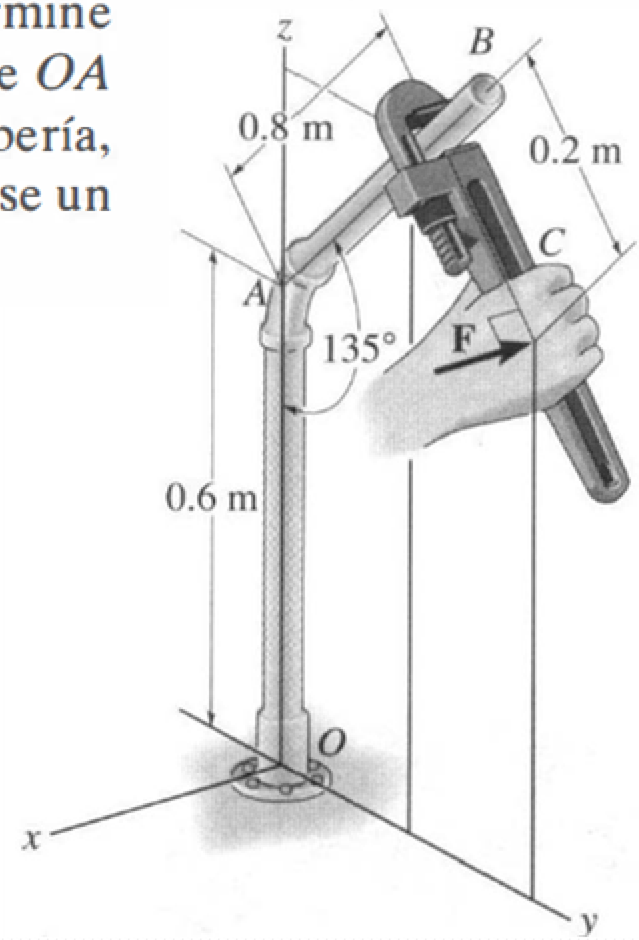
Rpta.: El momento de la fuerza respecto al eje x es (-80; 0; 0) N.m y respecto al eje a es (72; -96; 0) N.m .

La barra está sostenida por dos argollas situadas en A y B. Determinar el momento $\boldsymbol{M_{AB}}$ producido por $\boldsymbol{F}$=(-600; 200; -300) N, que tiende a girar la barra con respecto al eje $\boldsymbol{AB}$.



Rpta.: El momento $\boldsymbol{M_{AB}}$ *generado por la fuerza* ***F*** *es (-47.954; -23.977; 0) N.m .*

4-67. Una fuerza horizontal de $\mathbf{F} = \{-50\mathbf{i}\}$ N es aplicada perpendicularmente al mango de la llave. Determine el momento que ejerce esta fuerza a lo largo del eje *OA* (eje *z*) de la tubería. Tanto la llave como la tubería, *OABC*, se encuentran en el plano *y*-*z*. *Sugerencia*: Use un análisis escalar.



Rpta.: El momento $\boldsymbol{M_{OA}}$ *generado por la fuerza* **F** *es (0; 0; 35.35) N.m .*