Resistencia de Materiales 1A

Profesor Herbert Yépez Castillo

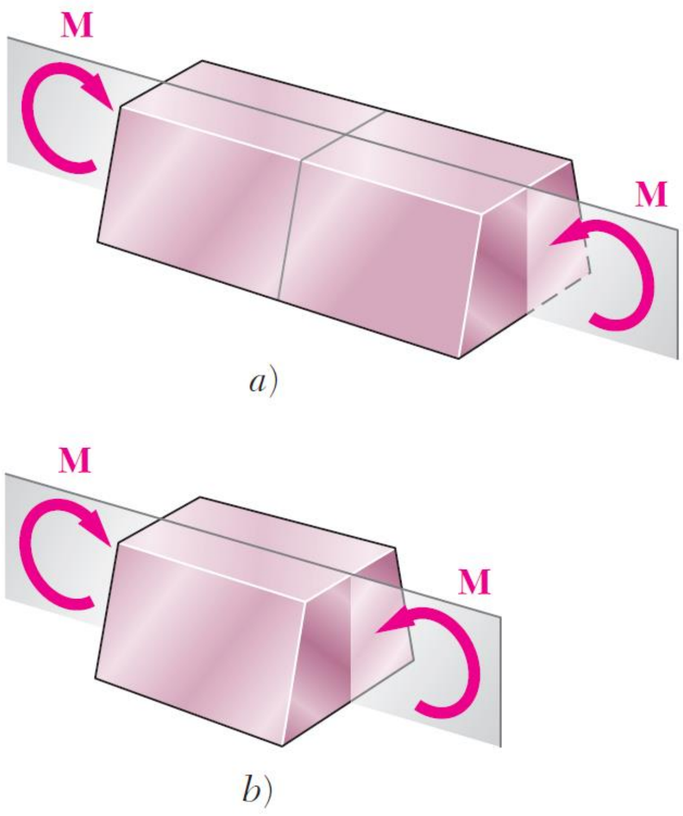
2014-2

Capítulo 6. Flexión

6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

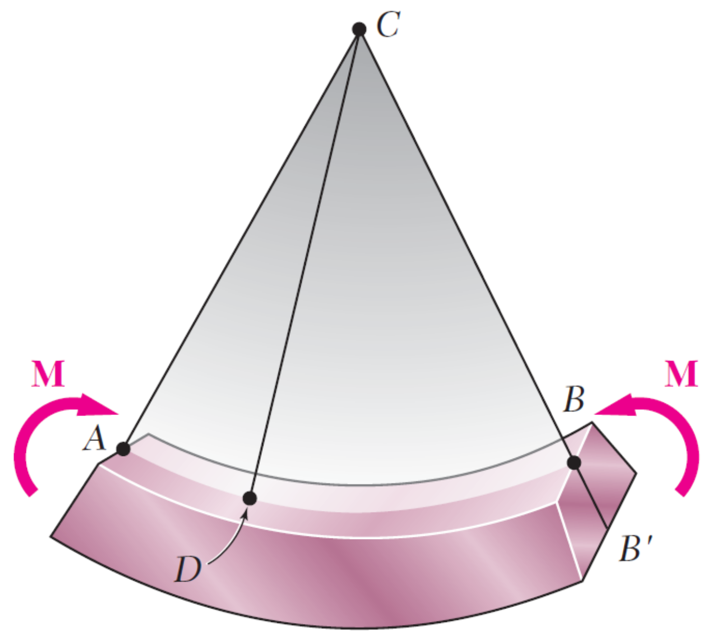
6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

- Una viga con un plano de simetría es sometido a ***pares iguales y opuestos*** $\boldsymbol{M}$ que actúan en dicho plano.
- Si la viga sufre un corte en un punto arbitrario, las condiciones de equilibrio requieren que ***las fuerzas internas*** en la sección sean ***equivalentes al par*** $\boldsymbol{M}$.
- Las fuerzas internas en cualquier sección transversal de la viga en ***flexión pura*** son equivalentes a un par $\boldsymbol{M}$.
- El momento $\boldsymbol{M}$ de dicho par se conoce como el ***momento flector*** de la sección.



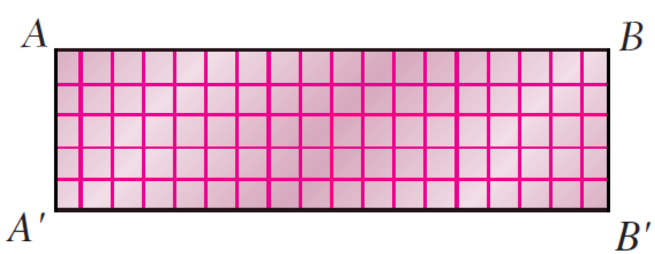
6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

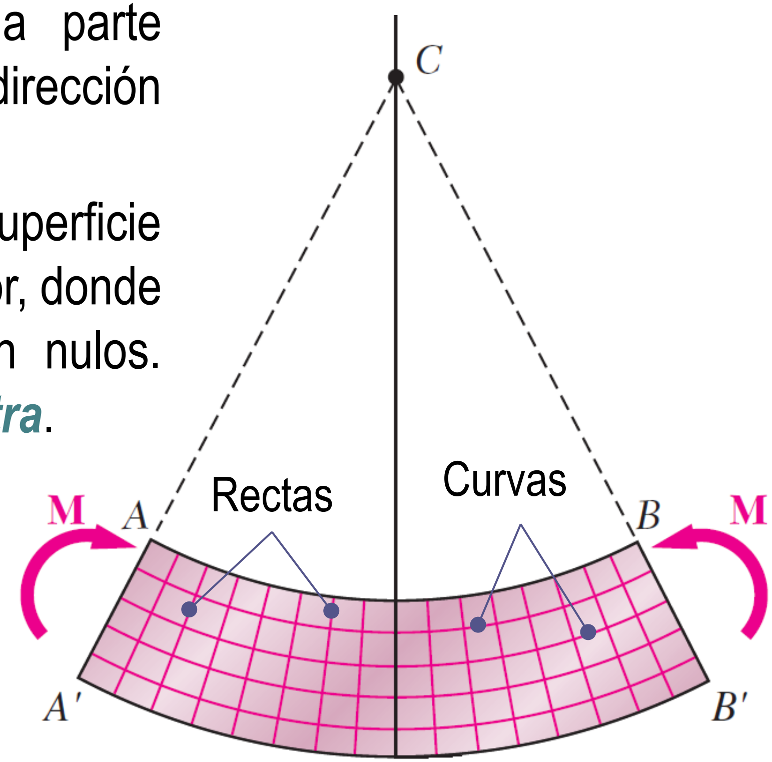
- La viga se flexiona bajo la acción de los pares, pero permanece simétrico con respecto al plano de simétrica.
- Como el momento flector $\boldsymbol{M}$ es el mismo en cualquier sección de la viga, entonces se ***flexiona uniformemente***
- La línea AB que era originalmente recta, se transforma en un segmento de circunferencia con centro en C.
- Lo mismo ocurre con la línea $A`B`$ a lo largo de la cara inferior de la viga.



6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

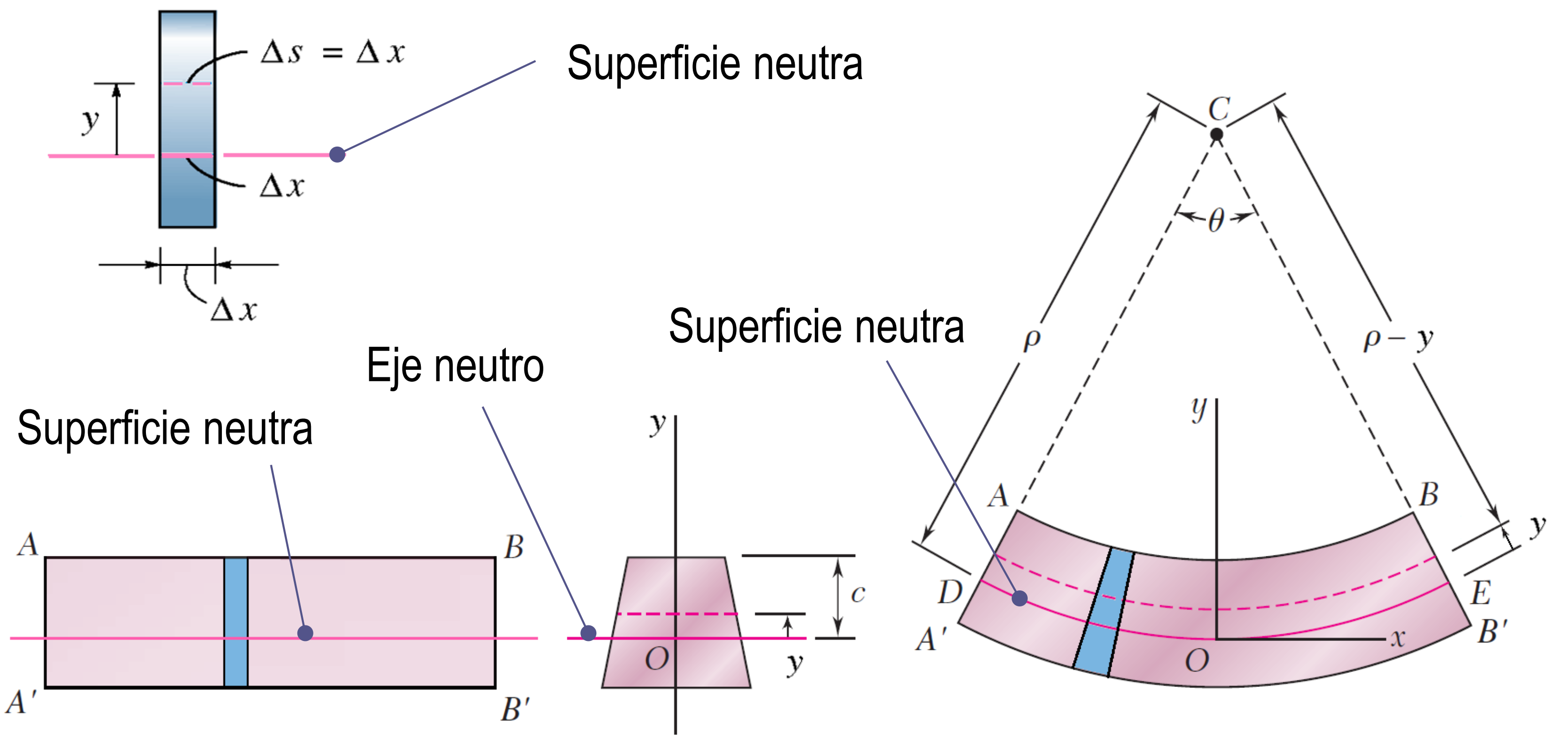
- Sobre la viga deformada las líneas longitudinales se curvan, mientras que las líneas transversales permanecen rectas. Se observa que AB ***se acorta*** mientras $A`B`$ ***se alarga***.
- Resulta que la parte superior está sometida a esfuerzos de ***compresión*** y la parte inferior a esfuerzos de ***tracción*** en dirección longitudinal
- Entonces, debe existir una superficie paralela a las caras superior e inferior, donde la deformación y el esfuerzo sean nulos. Esta superficie es la ***superficie neutra***.





6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

- La superficie neutra es representada por DE y con la finalidad de determinar la deformación por flexión se aísla un segmento de la viga.



6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

Se define la deformación unitaria normal del segmento:

$$\epsilon = \frac{\Delta s` - \Delta s}{\Delta s}$$

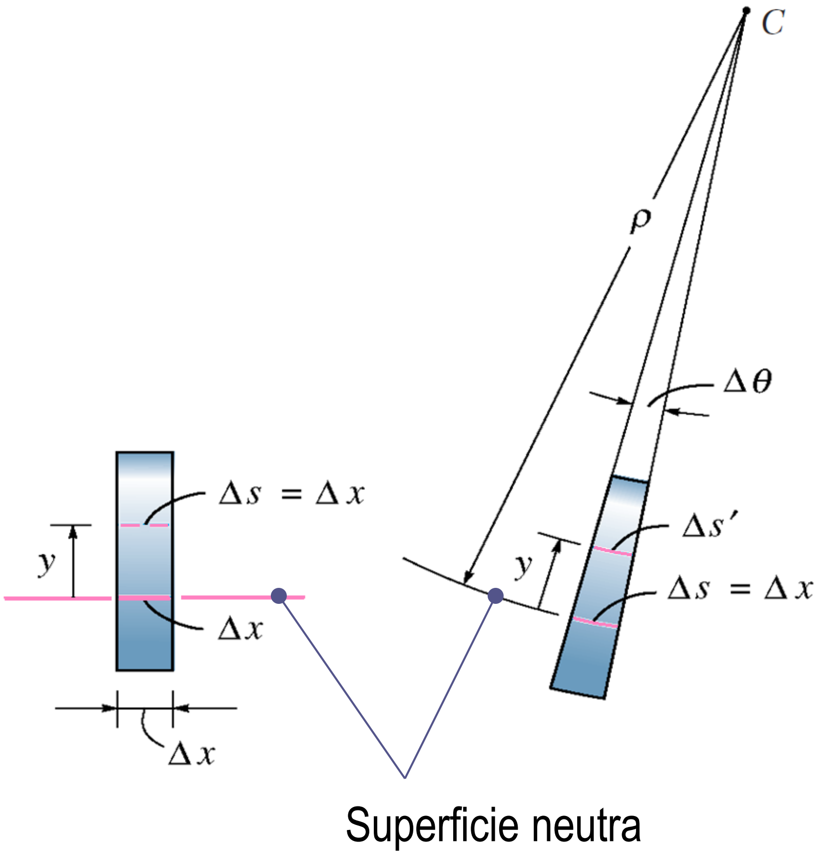
Donde

$$\Delta s = \rho \Delta \theta$$
$$\Delta s` = (\rho - y)\Delta \theta$$

Entonces

$$\epsilon = \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}$$

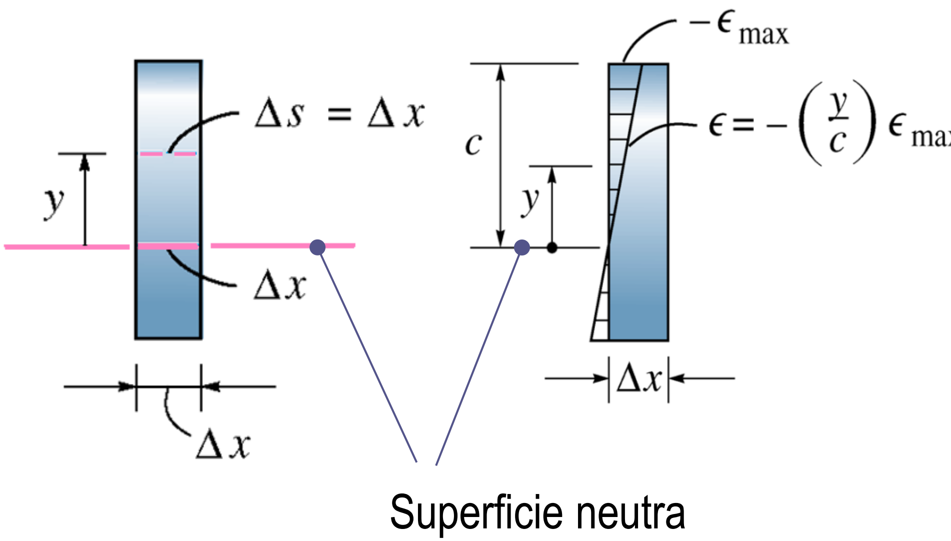


6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

La deformación unitaria normal por flexión es:

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}$$

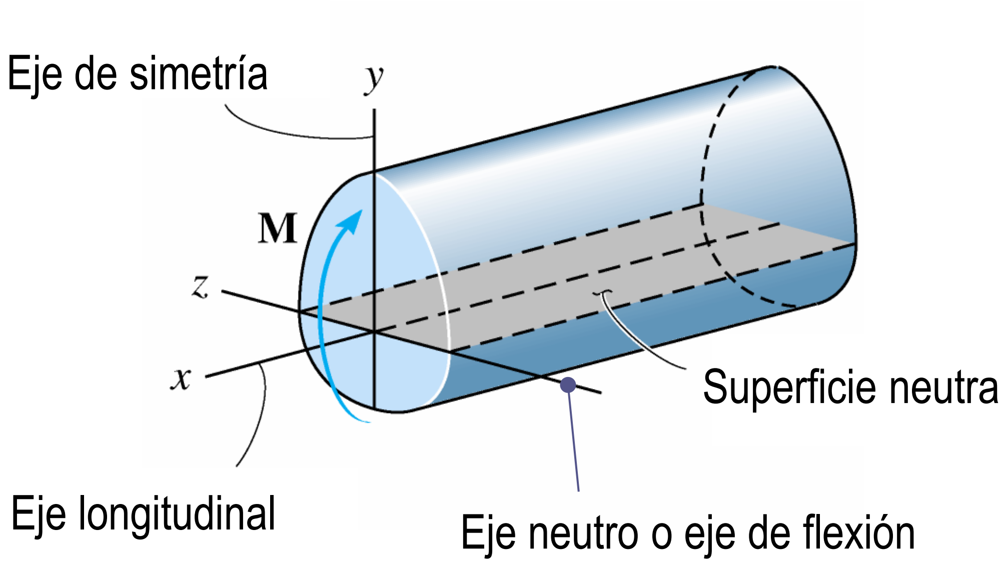
$$\epsilon = -\frac{y}{c}\epsilon_{max}$$



6.2 Formulación de flexión

6.2 Formulación de flexión

- Debe existir una expresión que relacione la distribución de esfuerzos y el momento flector que actúan en la sección transversal de la viga.
- Para ello, una viga de sección circular es sometida a flexión pura, la cual revela su superficie neutra



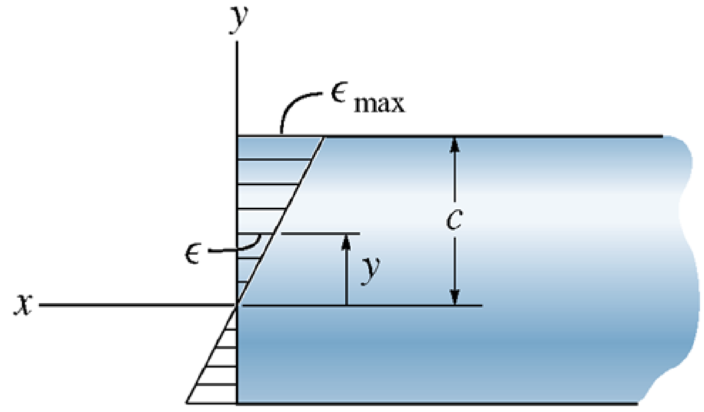
6.2 Formulación de flexión

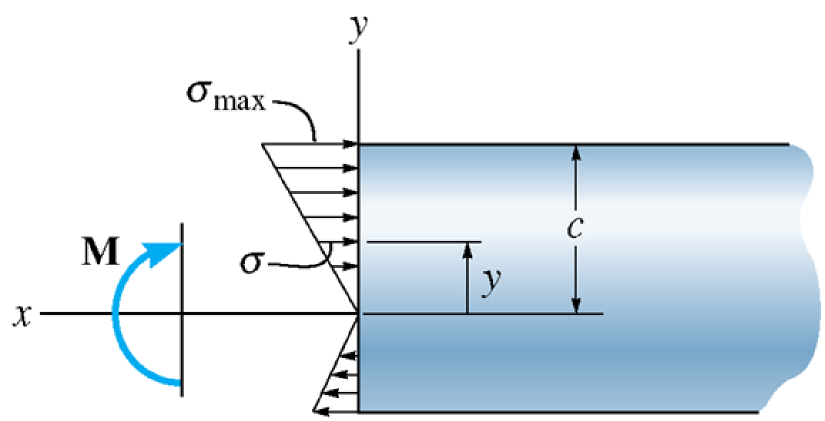
- Se supone que la viga es de un material de comportamiento elástico lineal, de modo que la ley de Hooke se cumple $\sigma = E\,\epsilon$.
- Reemplazando la ley de Hooke en la expresión de deformación unitaria normal determinada en la sección anterior, se obtiene:

$$\epsilon = -\frac{y}{c}\epsilon_{max}$$

$$\frac{\sigma}{E} = -\frac{y}{c}\frac{\sigma_{max}}{E}$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{max}}$$





6.2 Formulación de flexión

- Analizando un elemento dA, se debe satisfacer que la fuerza resultante debe ser igual a cero.

$\Sigma F_x = F_R = 0$:

$$0 = \int dF = \int_A \sigma dA$$

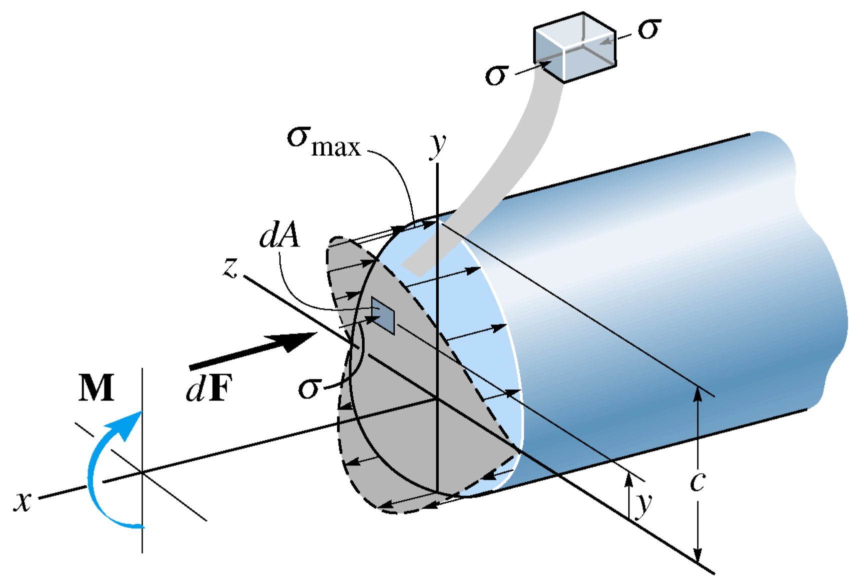
Donde

$$\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{max}$$

Entonces

$$0 = \int_A -\frac{y}{c}\sigma_{max}\, dA$$

$$0 = -\frac{\sigma_{max}}{c}\int_A y\, dA$$



6.2 Formulación de flexión

$$0 = -\frac{\sigma_{max}}{c}\int_A y\, dA$$

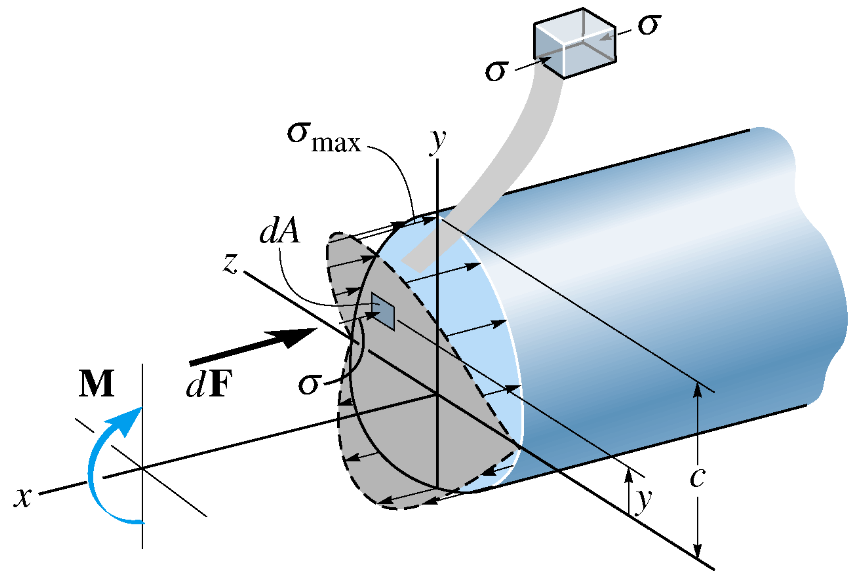
Donde

$$\frac{\sigma_{max}}{c} \neq 0$$

Entonces

$$\int_A y\, dA = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA} = 0$$



Está condición puede ser satisfecha sólo si el ***eje neutro*** es el ***eje centroidal*** horizontal de la sección transversal.

6.2 Formulación de flexión

- Analizando un elemento dA, se debe satisfacer que el momento resultante debe ser igual al momento producido por la distribución de esfuerzos.

$$\Sigma M_z = M_R$$

$$M = \int y\, dF = \int_A y\, \sigma dA$$

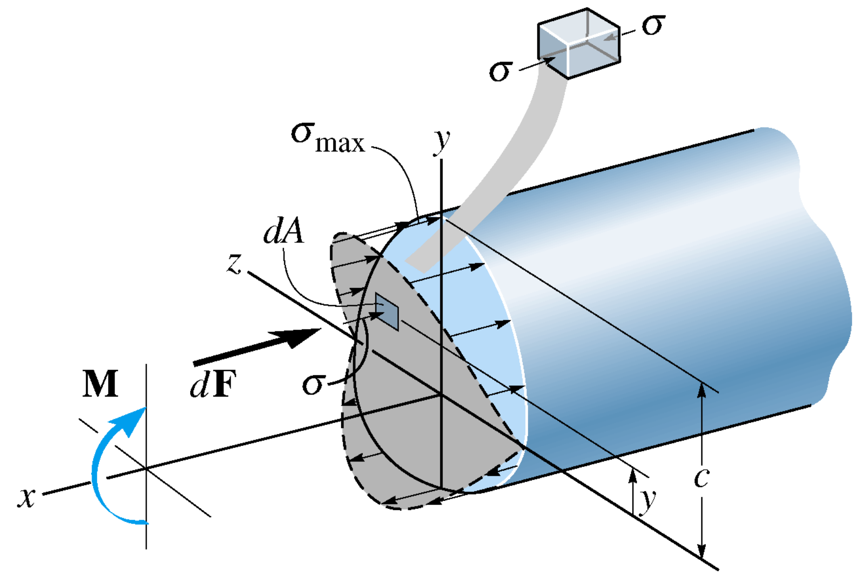
Donde

$$\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{max}$$

Entonces

$$M = \int_A -\frac{y^2}{c}\sigma_{max}\, dA$$

$$M = -\frac{\sigma_{max}}{c}\int_A y^2\, dA$$



6.2 Formulación de flexión

$$M = -\frac{\sigma_{max}}{c}\int_A y^2\, dA$$

Donde

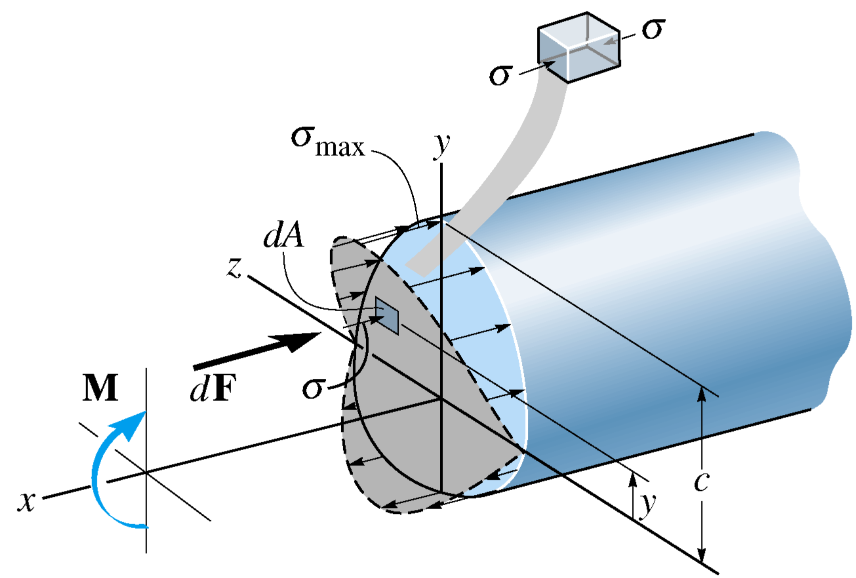
$$I = \int_A y^2\, dA$$

Entonces

$$M = -\frac{\sigma_{max}}{c} I$$

Despejando σ_{max}

$$\sigma_{max} = -\frac{M\, c}{I}$$



6.2 Formulación de flexión

6.1 Deformación por flexión de un miembro recto

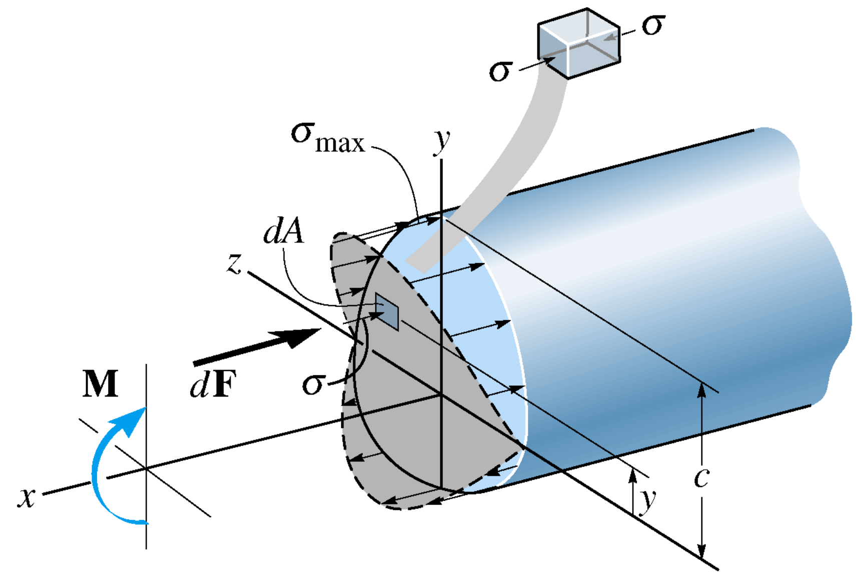
6.2 Formulación de flexión

6.3 Análisis de vigas a flexión

$$\sigma_{max} = -\frac{M\,c}{I}$$

En general

$$\boxed{\sigma = -\frac{M\,y}{I}}$$



σ: Esfuerzo normal en un puno de la sección transversal $[Pa]$
M: Momento flector interno resultante $[N.m]$
y: Distancia perpendicular al eje neutro $[m]$
I: Momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje neutro $[m^4]$

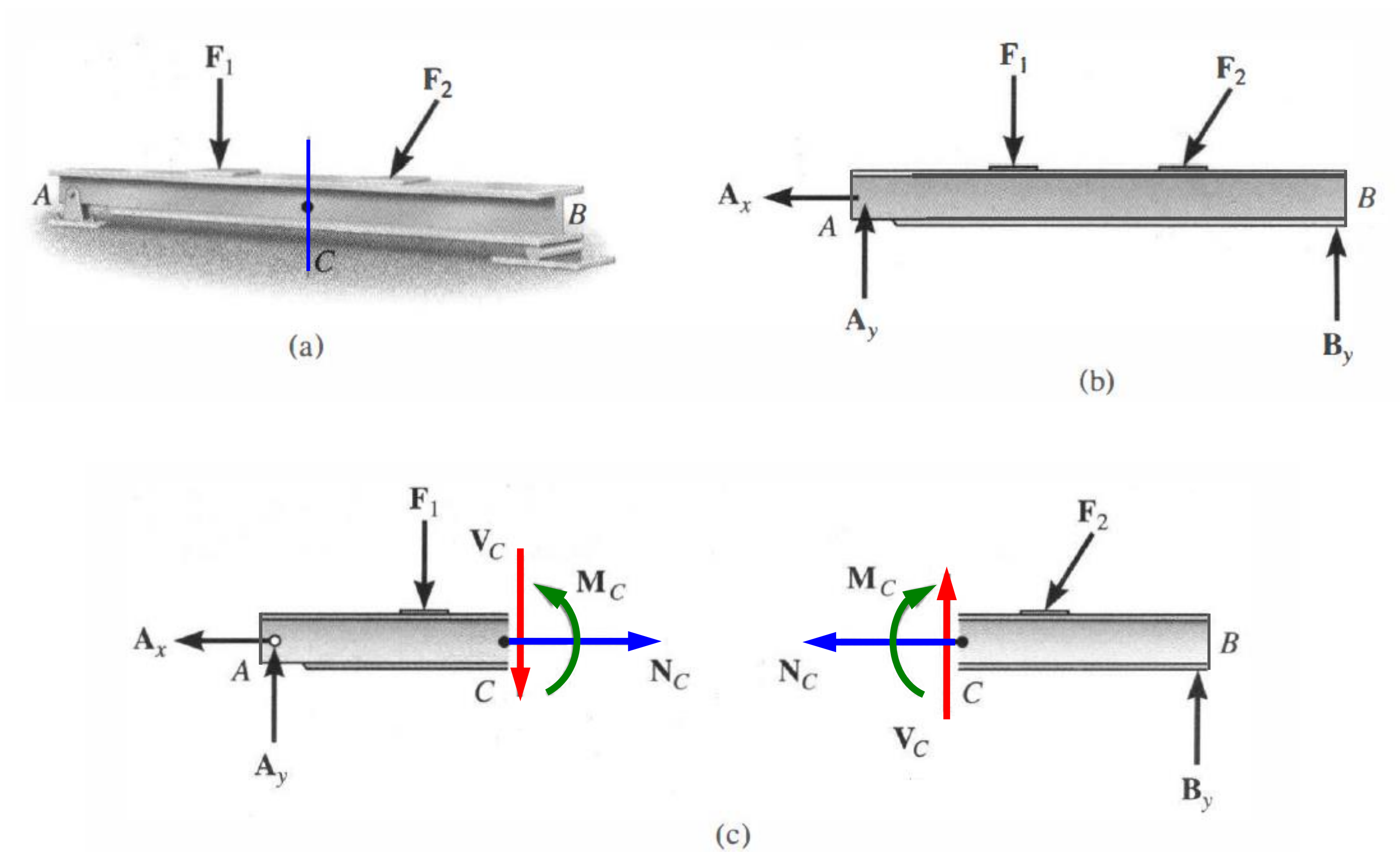
6.3 Análisis de vigas a flexión

6.3 Análisis de vigas a flexión

Fuerzas internas.

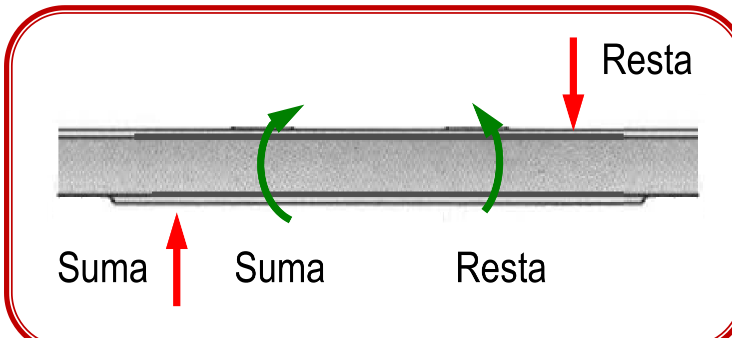
Un tema muy importante para el análisis de vigas es la determinación de fuerzas y momento que actúan dentro de un componente (fuerzas internas), para lo cual se requiere aplicar el método de las secciones o el método grafico.

6.3 Análisis de vigas a flexión



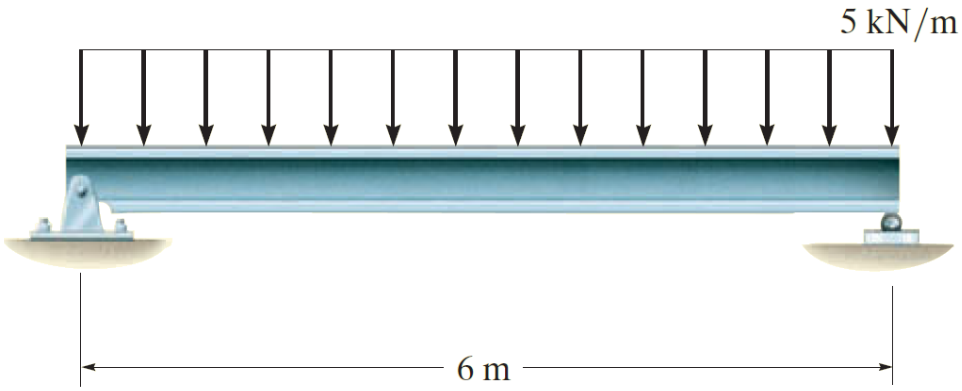
6.3 Análisis de vigas a flexión

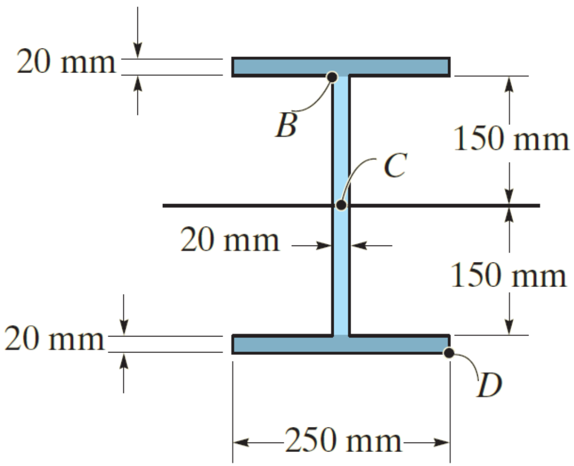
Cortante – Carga distribuida		**Momentos - Cortante**	
$\frac{dV}{dx} = -w_{(x)}$		$\frac{dM}{dx} = V$	
Pendiente del DF de Corte	*Negativo de la intensidad de carga distribuida*	*Pendiente del diagrama de Momentos*	*Fuerza cortante*
$\triangle V = -\int w_{(x)}$		$\triangle M = \int V dx$	
Cambio de la fuerza cortante	*Negativo del área bajo la curva de carga*	*Cambio del momento*	*Área bajo el diagrama de fuerza cortante*



Problema 01 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

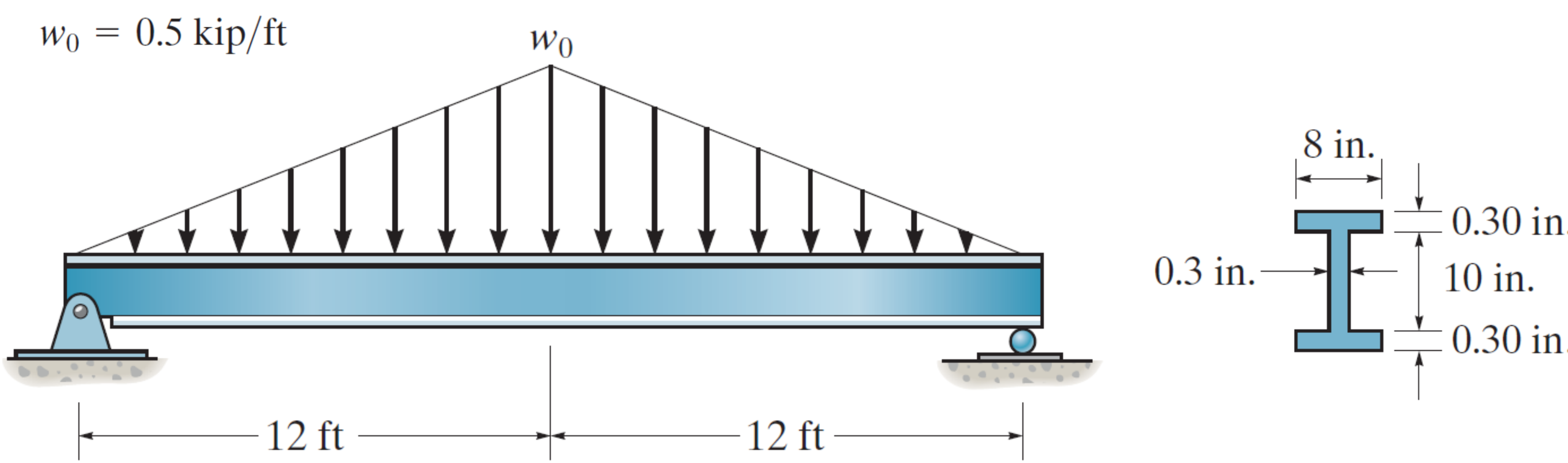
Determinar el esfuerzo de flexión máximo que puede actuar en los puntos B y D.





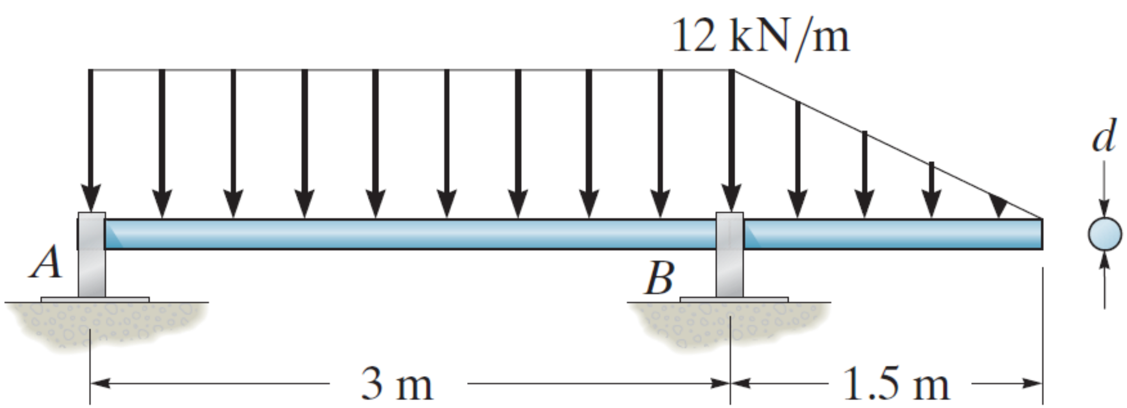
Problema 02 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

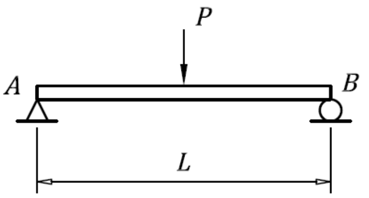
Determinar el esfuerzo de flexión máximo en la viga.



Problema 03 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

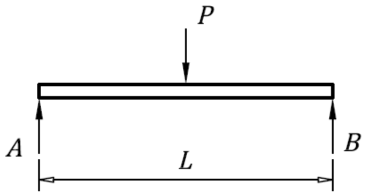
Determinar el menor diámetro si el esfuerzo de flexión admisible es 180 MPa.





$$\frac{dV}{dx} = -w_{(x)} \qquad \textit{Pend. DF Cortantes} \quad = \quad \textit{La negativa Intensidad de la C Distrib.}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad \textit{Pend. Diag. Momentos} \quad = \quad \textit{Fuerza cortante}$$



$\Sigma F_y = 0:$

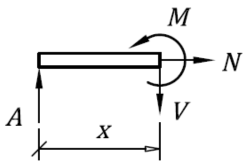
$$A + B = P$$

$\Sigma M_A = 0:$

$$BL = P\,L/2$$

$A = P/2$ $\triangle$

$B = P/2$ $\triangle$



$\Sigma F_y = 0:$

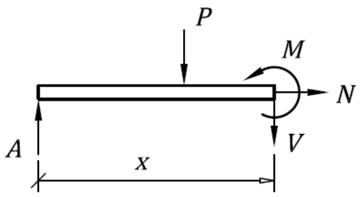
$$V = A \qquad \blacksquare$$

$\Sigma M \quad = 0:$

$$M = A\,x$$

Recta 

Pendiente: constante (+) $\quad \frac{dM}{dx} = A$ $\blacksquare$



$\Sigma F_y = 0:$

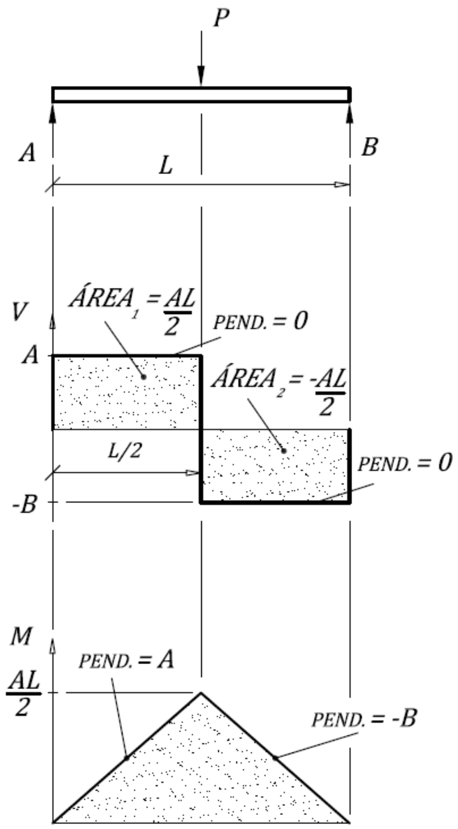
$$V = A - P$$
$$V = -B \qquad \triangleleft$$

$\Sigma M \quad = 0:$

$$M = A\,x - P(x - L/2)$$
$$M = (A - P)x + PL/2$$
$$M = -Bx + BL$$

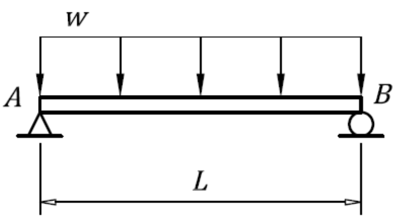
Recta 

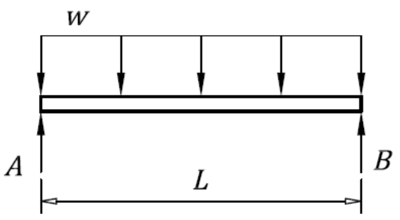
Pendiente: constante (-) $\quad \frac{dM}{dx} = -B$ $\triangleleft$



$$A_1 = A\frac{L}{2}$$
$$A_2 = -B\frac{L}{2}$$

$$M_{x=\frac{L}{2}} = A_1 = A\frac{L}{2}$$
$$M_{x=L} = A_1 + A_2 = A\frac{L}{2} - B\frac{L}{2} = 0$$





$\Sigma F_y = 0:$

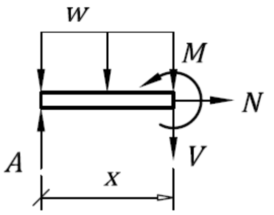
$$A + B = wL$$

$\Sigma M_A = 0:$

$$BL = w\,L^2/2$$

$A = w\,L/2$ △

$B = w\,L/2$ △



$\Sigma F_y = 0:$

$$V = A - w\,x$$ ■

Recta

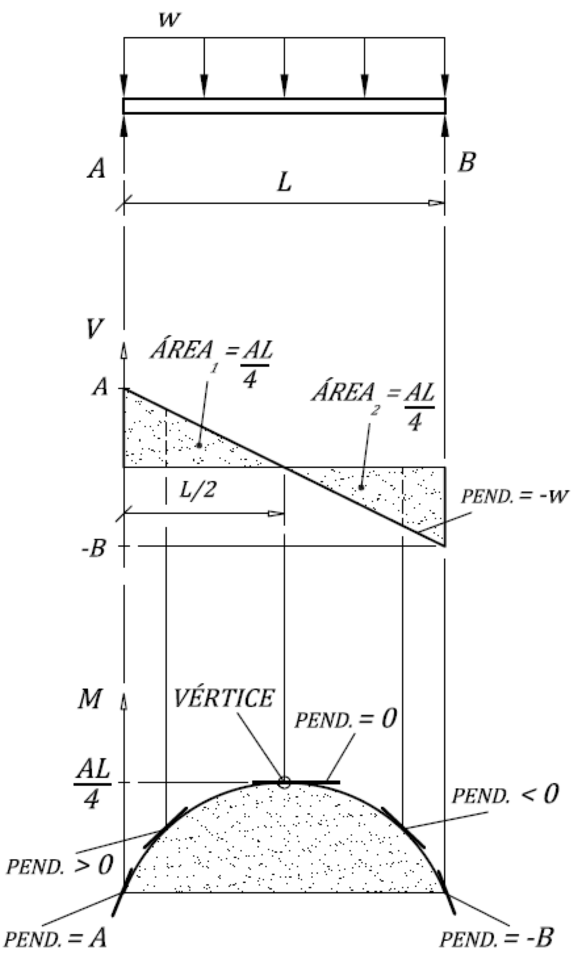
Pendiente constante $\dfrac{dV}{dx} = -w$

$\Sigma M \quad = 0:$

$$M = Ax - \frac{wx^2}{2}$$

Parábola Concava hacia abajo $-\dfrac{wx^2}{2}$

Pendiente $\dfrac{dM}{dx} = A - wx$ ■

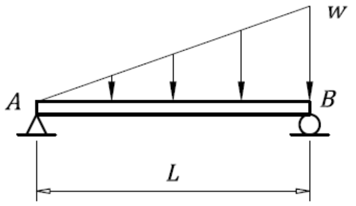


$$A_1 = A\frac{L}{2}\frac{1}{2} = \frac{AL}{4}$$

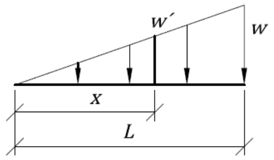
$$A_2 = -B\frac{L}{2}\frac{1}{2} = \frac{-BL}{4}$$

$$M_{x=\frac{L}{2}} = A_1 = \frac{AL}{4}$$

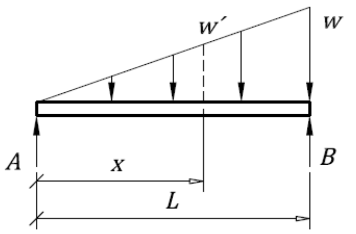
$$M_{x=L} = A_1 + A_2 = \frac{AL}{4} - \frac{BL}{4} = 0$$

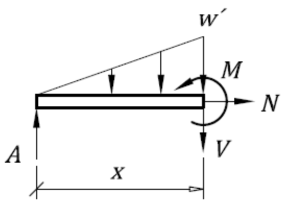


$$\Sigma F_y = 0:$$
$$A + B = wL/2$$
$$\Sigma M_A = 0:$$
$$BL = (wL/2)/(2L/3)$$
$$A = w\,L/6 \qquad \Delta$$
$$B = w\,L/3 \qquad \Delta$$



$$\frac{w'}{x} = \frac{w}{L}$$





$$\Sigma F_y = 0:$$
$$V = A - w'x/2$$
$$V = A - \frac{wx^2}{2L} \qquad \blacksquare$$

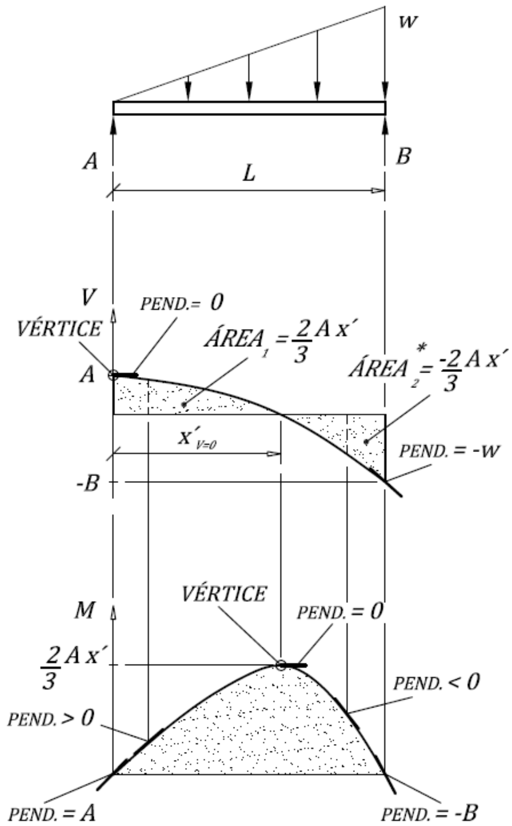
Paráb. Conc. hacia abajo $\quad -\dfrac{wx^2}{2L}$

Pendiente: Recta (-) $\quad \dfrac{dV}{dx} = -\dfrac{wx}{L}$

$$\Sigma M \;= 0:$$
$$M = Ax - \frac{wx^2}{2L}\frac{x}{3}$$
$$M = Ax - \frac{wx^3}{6L}$$

Curva cúbica

Pend.:Parab. Concav (-) $\quad \dfrac{dM}{dx} = A - \dfrac{wx^2}{2L} \quad \blacksquare$



$$A_1 = \frac{2}{3}\,A\,x' = \frac{2}{3}\,A\sqrt{\frac{2LA}{w}}$$
$$A_2 = (-)$$

Para V=0, x=x´, entonces:

$$V = 0 = A - \frac{wx'^2}{2L}$$
$$x' = \sqrt{\frac{2LA}{w}}$$

$$M_{x=\frac{L}{2}} = A_1 = \frac{2}{3}\,A\,x'$$
$$M_{x=L} = A_1 + A_2 = 0$$