Resistencia de Materiales 1A

Profesor Herbert Yépez Castillo

2014-2

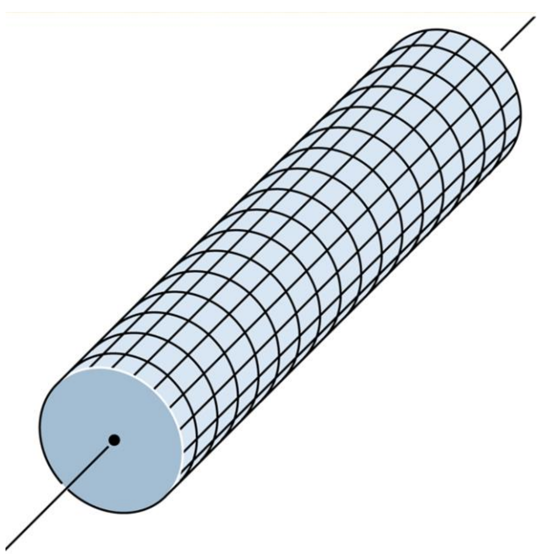
Capítulo 5. Torsión

- 5.1 Deformación por torsión de un eje circular
- 5.2 Formulación de torsión
- 5.3 Transmisión de potencia
- 5.4 Ángulo de torsión

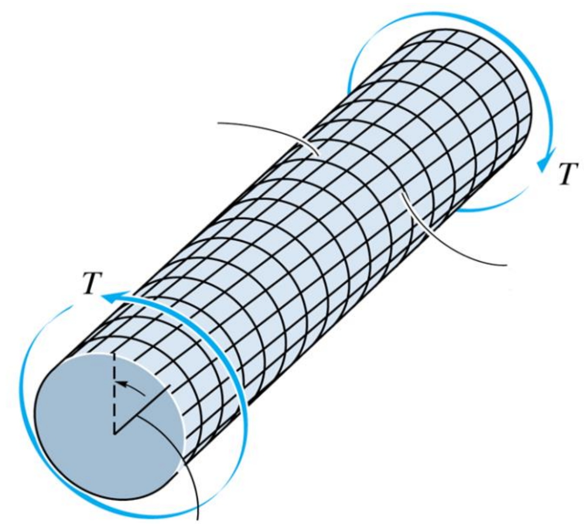
5.1 Deformación por torsión de un eje circular

- Un par de torsión es un momento que tiende a hacer girar un eje circular respecto a su eje longitudinal.
- Su efecto es de interés primario para el diseño de árboles de transmisión de potencia usados en vehículos y máquinas.

Eje sin deformar

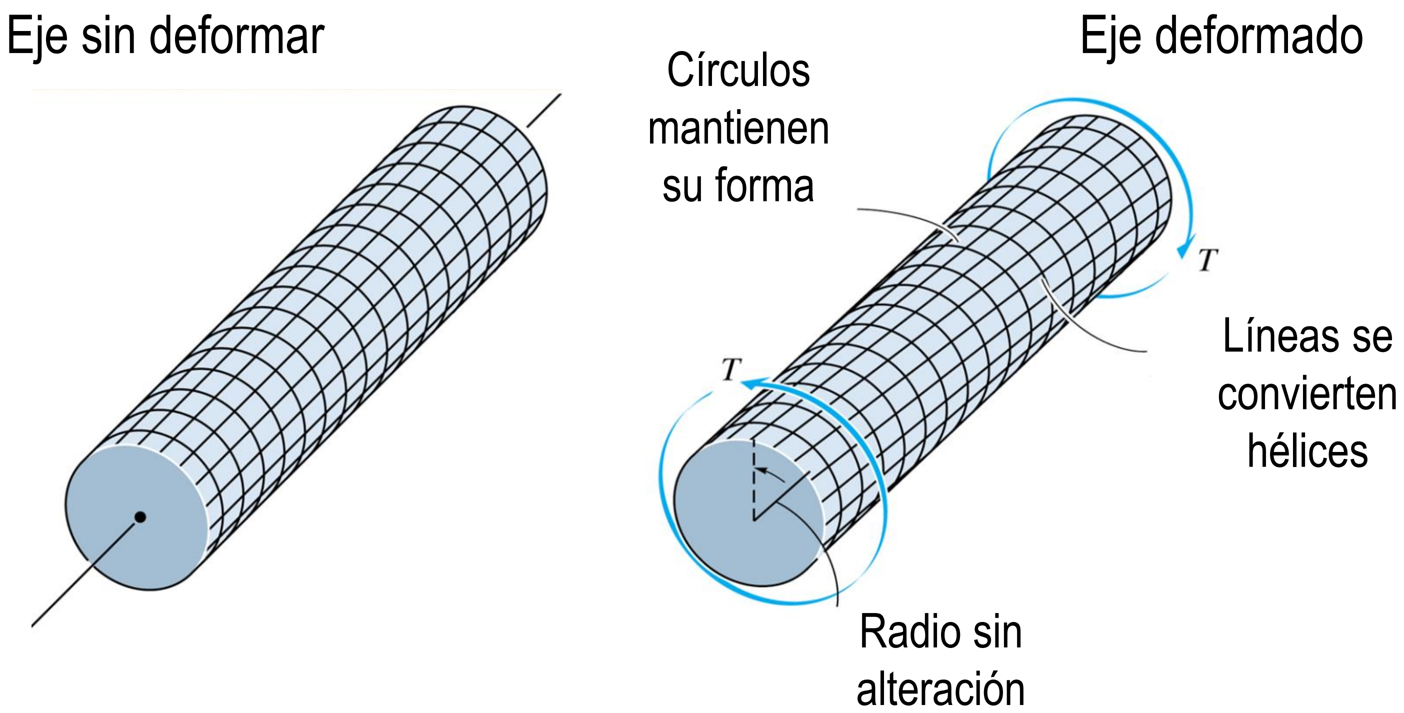


Eje deformado



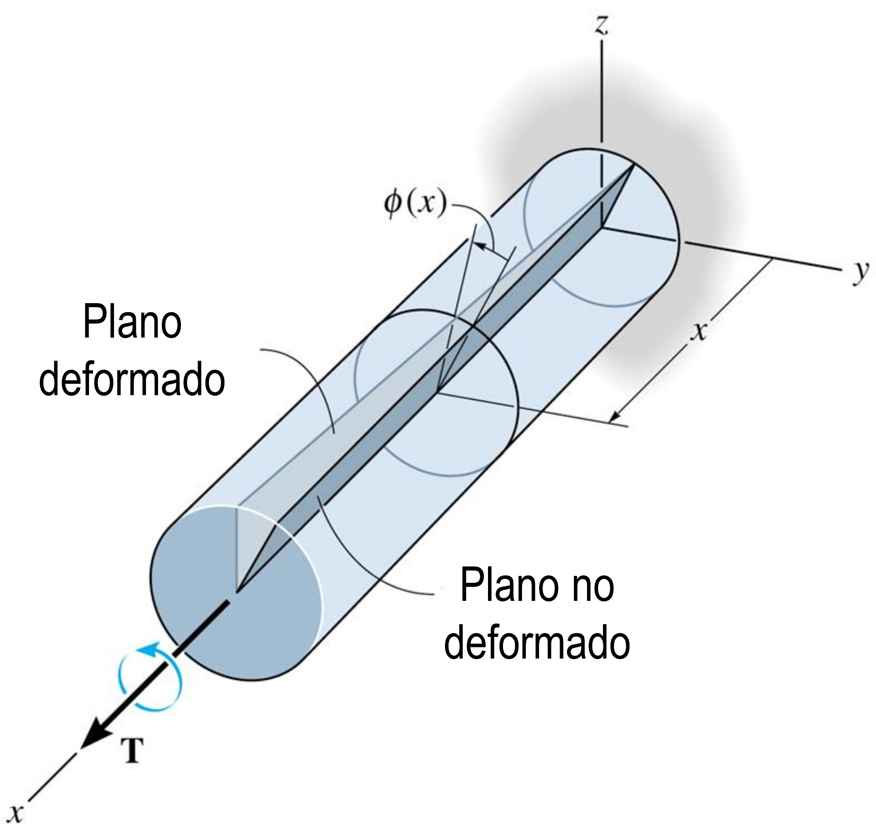
5.1 Deformación por torsión de un eje circular

- Un eje sometido a torsión muestra que los círculos de la rejilla y su radio permanecen iguales.
- Mientas que las líneas longitudinales de la rejilla se deforman y se convierten en hélices.



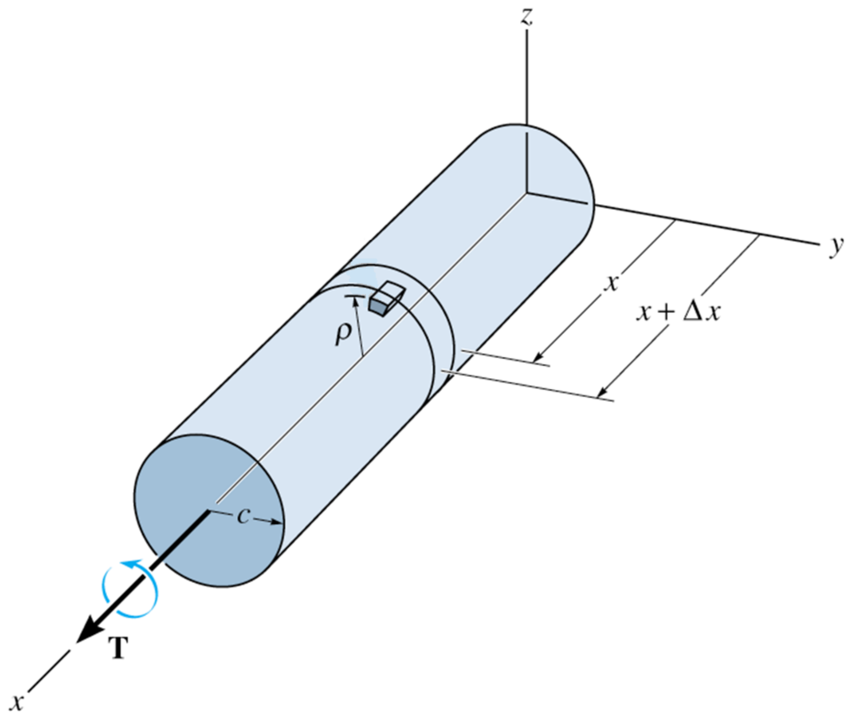
5.1 Deformación por torsión de un eje circular

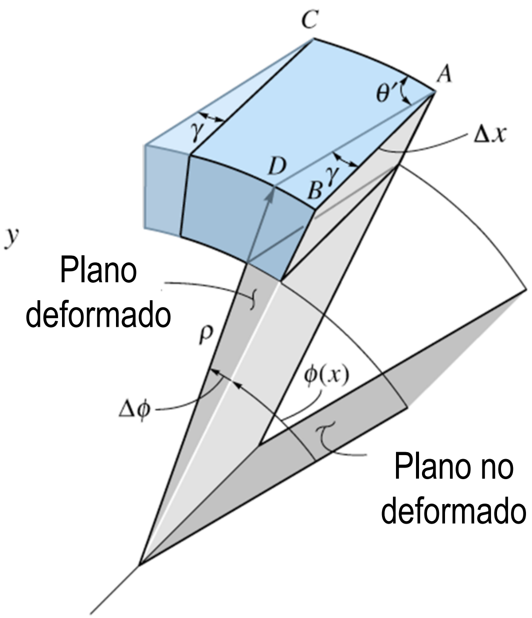
- El mismo eje con un extremo fijo y con un par de torsión en el otro.
- Un plano longitudinal del eje se distorsiona y dependiendo de la posición en x, gira un determinado ángulo $\phi_{(x)}$.



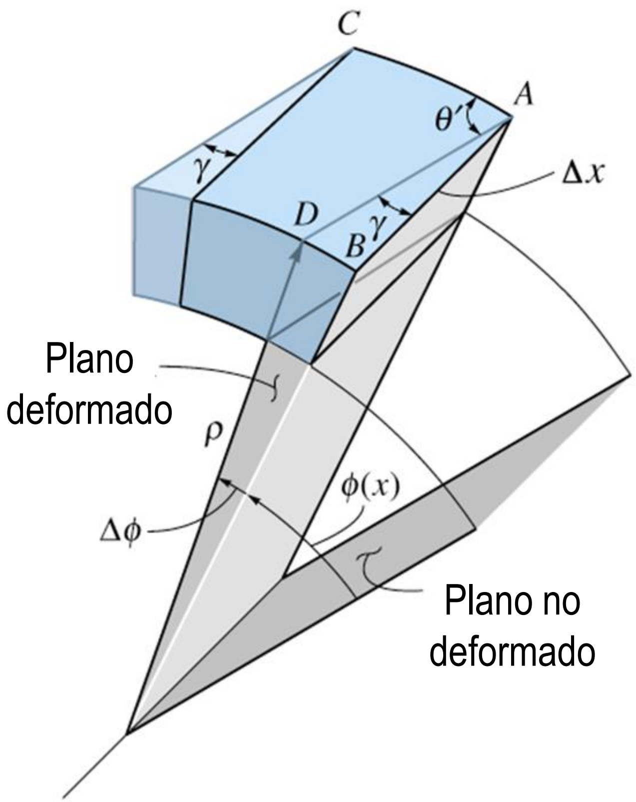
5.1 Deformación por torsión de un eje circular

- Se aísla un elemento a una distancia radial ρ y cuya longitud es Δx.
- La cara del elemento posicionada a una distancia x gira $\phi_{(x)}$, mientras que la cara posicionada $x + \Delta x$ gira $\phi_{(x)} + \Delta\phi$.
- La diferencia de la rotación $\Delta\phi$ genera en el elemento una deformación unitaria cortante.





5.1 Deformación por torsión de un eje circular



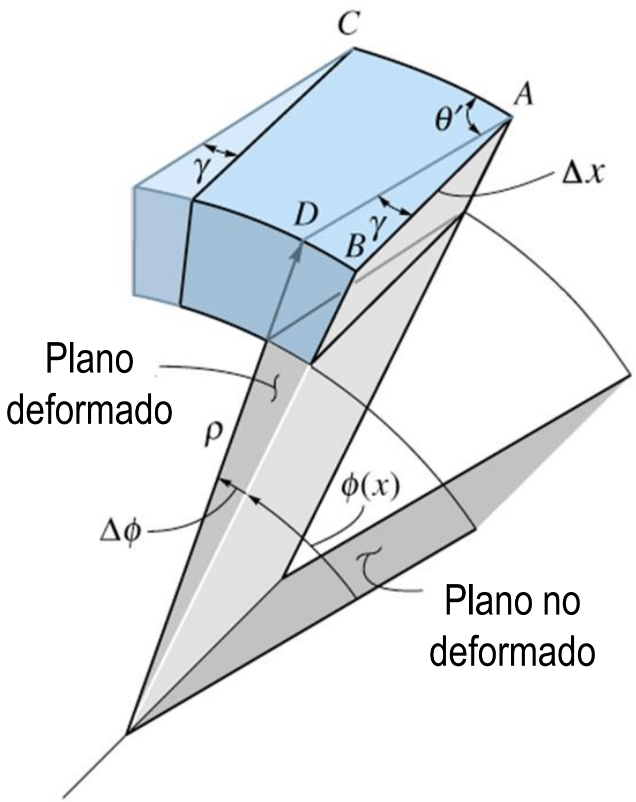
- Entre los bordes del elemento AB y AC el ángulo es 90° y después de la deformación los bordes son AD y AC, entre los cuales el ángulo es θ\`.
- La deformación unitaria cortante se define como:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta`$$

- La deformación unitaria cortante puede ser relacionada con el ángulo de rotación mediante la siguiente expresión:

$$BD = \Delta x\, \gamma = \rho\, \Delta\phi$$

5.1 Deformación por torsión de un eje circular



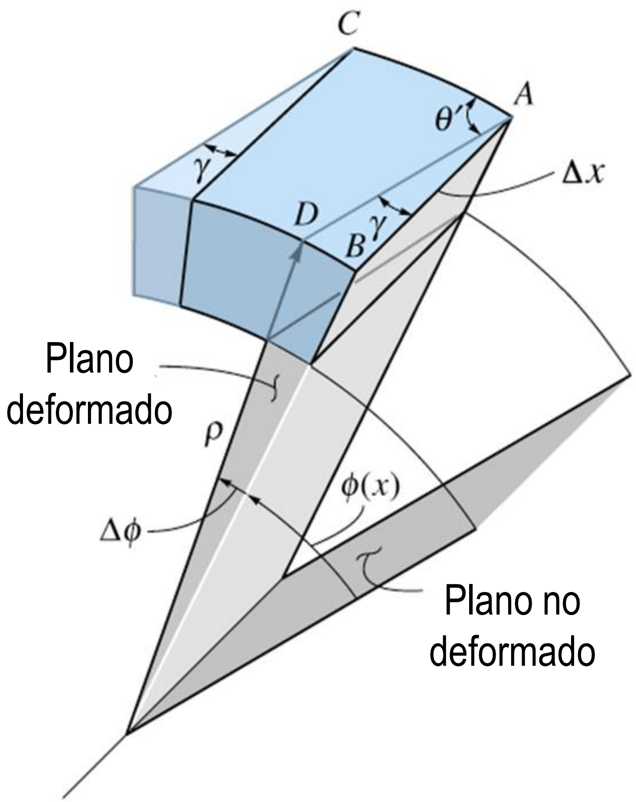
$$BD = \Delta x\, \gamma = \rho\, \Delta\phi$$

Si hacemos que $\Delta x \rightarrow dx$, $\Delta\phi \rightarrow d\phi$

$$dx\, \gamma = \rho\, d\phi$$

$$\gamma = \rho\, \frac{d\phi}{dx}$$

5.1 Deformación por torsión de un eje circular



$$\gamma = \rho \, \frac{d\phi}{dx}$$

Puesto que dx y $d\phi$ son iguales para cualquier elemento ubicado a una distancia x, entonces $d\phi/dx$ es una constante. Por lo tanto, la deformación unitaria cortante γ es linealmente proporcional al radio ρ.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{máx}}{c}$$

c: es el radio de la periferia

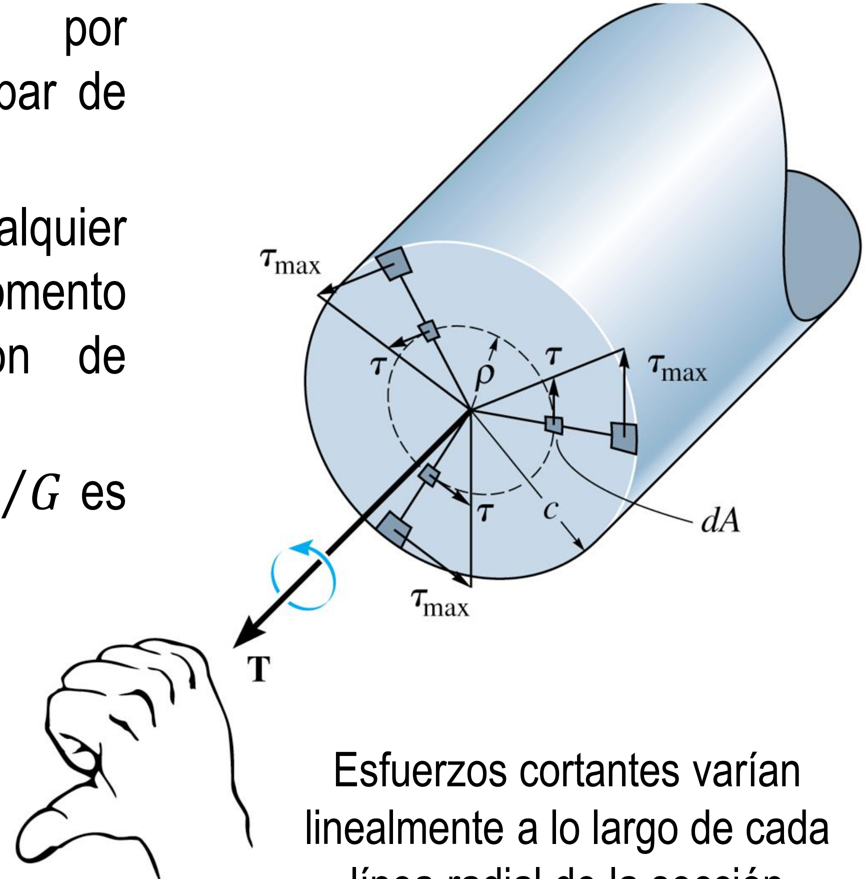
$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{máx}$$

5.2 Formulación de torsión

- Si el eje está sometido a un par de torsión externo, entonces por equilibrio debe desarrollar un par de torsión interno $\boldsymbol{T}$.
- Este par de torsión en cualquier sección es la resultante del momento producido por la distribución de esfuerzos cortantes.
- Usando la ley de Hooke $\gamma = \tau/G$ es posible describir:

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{máx} \rightarrow \frac{\tau}{G} = \frac{\rho}{c}\frac{\tau_{máx}}{G}$$

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{máx}$$

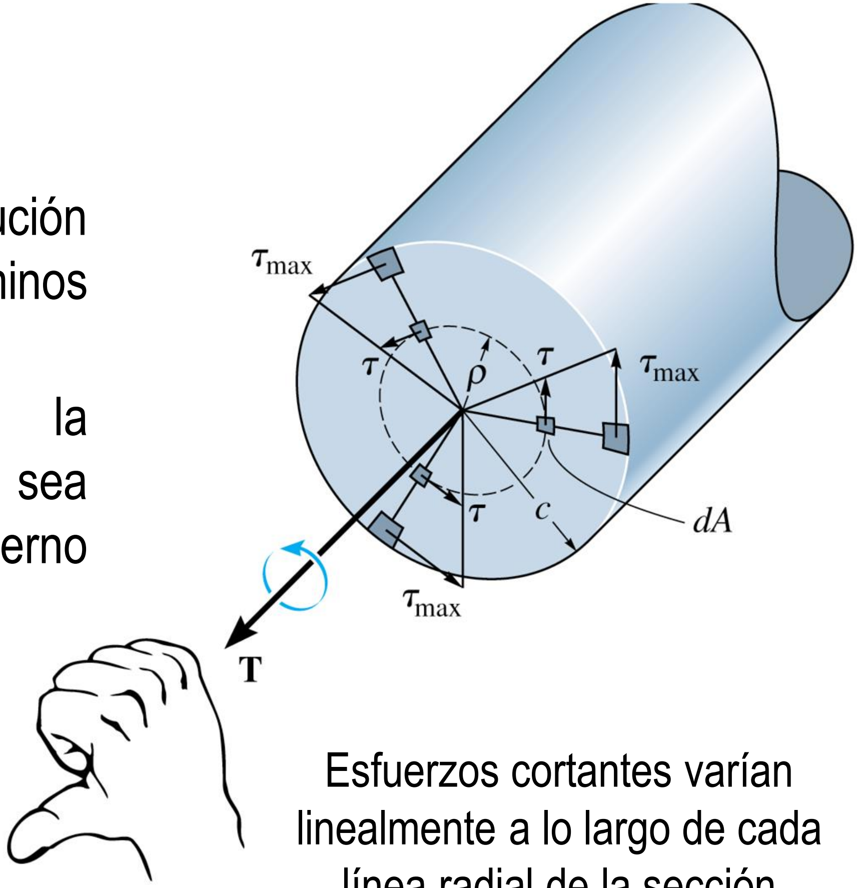


Esfuerzos cortantes varían linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal

5.2 Formulación de torsión

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{máx}$$

- Esta expresión define la distribución de esfuerzos cortantes en términos de la geometría del eje.
- Ahora, se requiere que la distribución de esfuerzos sea equivalente al par de torsión interno $\boldsymbol{T}$ en la sección.

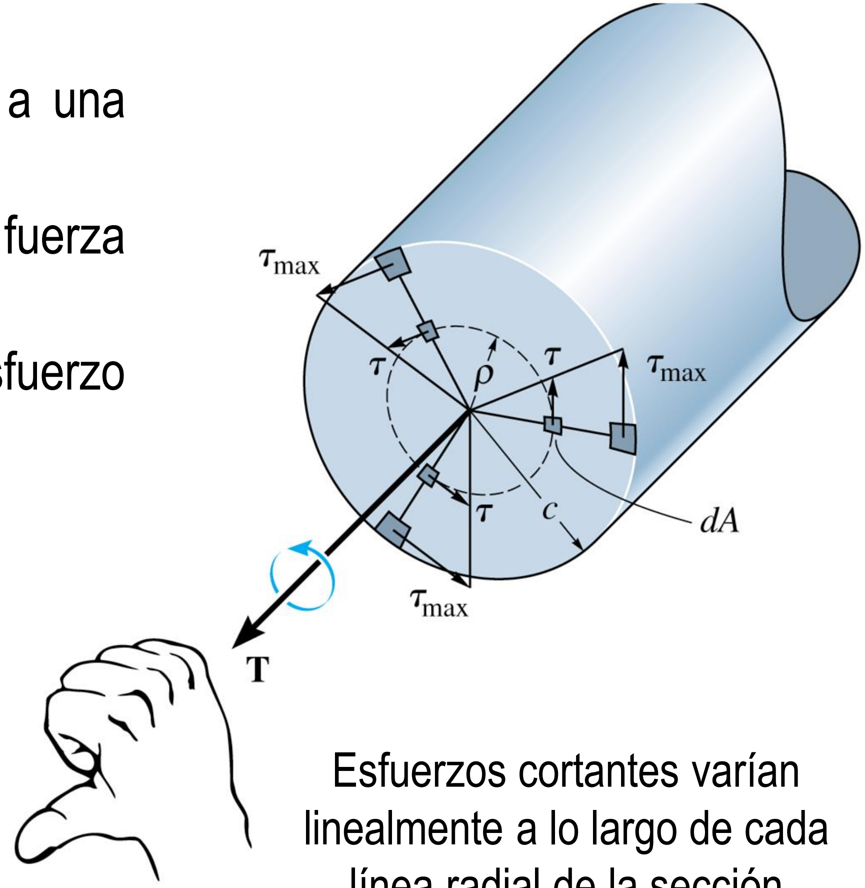


Esfuerzos cortantes varían linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal

5.2 Formulación de torsión

- Cada elemento tiene un dA situado en ρ.
- Cada elemento está sometido a una fuerza cortante $dF = \tau\, dA$
- El momento que produce esta fuerza es $dT = \rho\, dF$
- El momento en términos del esfuerzo cortante es:

$$dT = \rho\,(\tau\, dA)$$



Esfuerzos cortantes varían linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal

5.2 Formulación de torsión

Definido el par de torsión en términos del esfuerzo cortante

$$dT = \rho\,(\tau\, dA)$$

Y usando la expresión

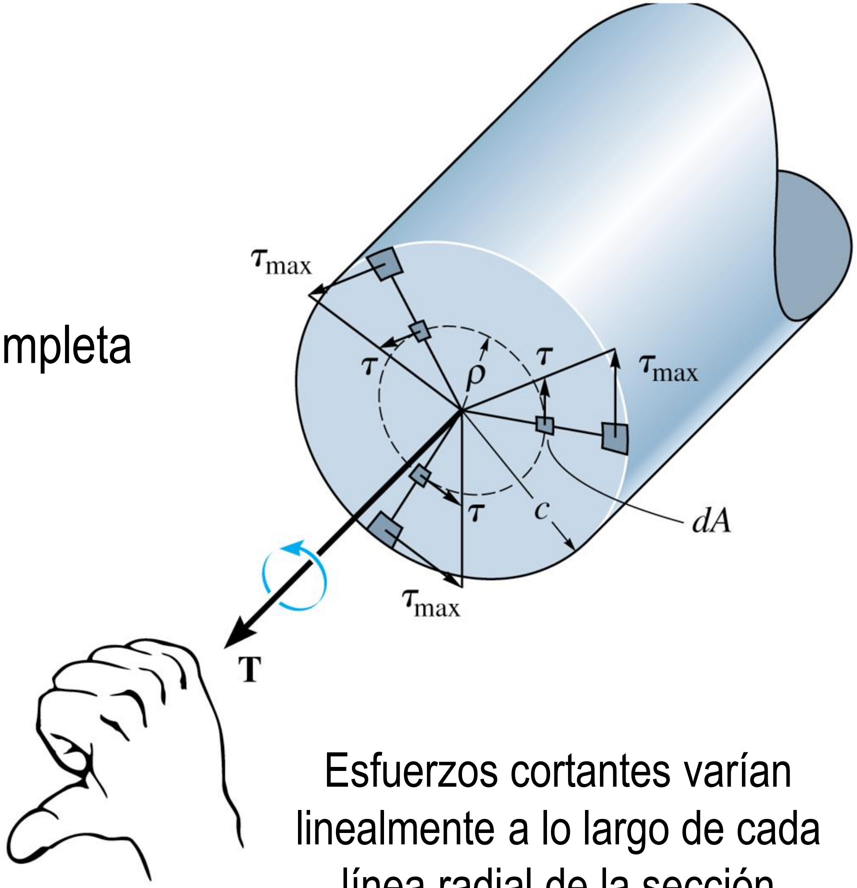
$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{máx}$$

Se determina para la sección completa que:

$$T = \int_A \rho\,(\tau\, dA)$$

$$T = \int_A \rho\,\left(\frac{\rho}{c}\tau_{máx} dA\right)$$

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c}\int_A \rho^2\, dA$$



Esfuerzos cortantes varían linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal

5.2 Formulación de torsión

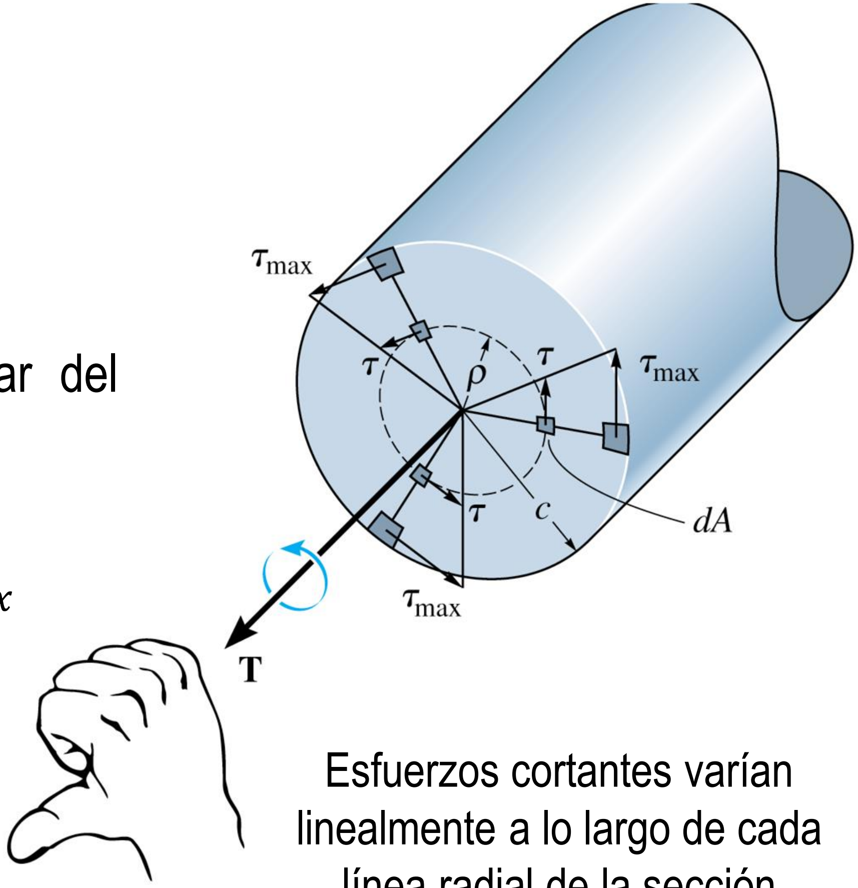
$$T = \frac{\tau_{máx}}{c} \int_A \rho^2 \, dA$$

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c} J$$

Donde J momento inercia polar del área de la sección.

Despejando en términos de $\tau_{máx}$

$$\boxed{\tau_{máx} = \frac{T\,c}{J}}$$



Esfuerzos cortantes varían linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal

5.2 Formulación de torsión

$$\tau_{máx} = \frac{T\,c}{J}$$

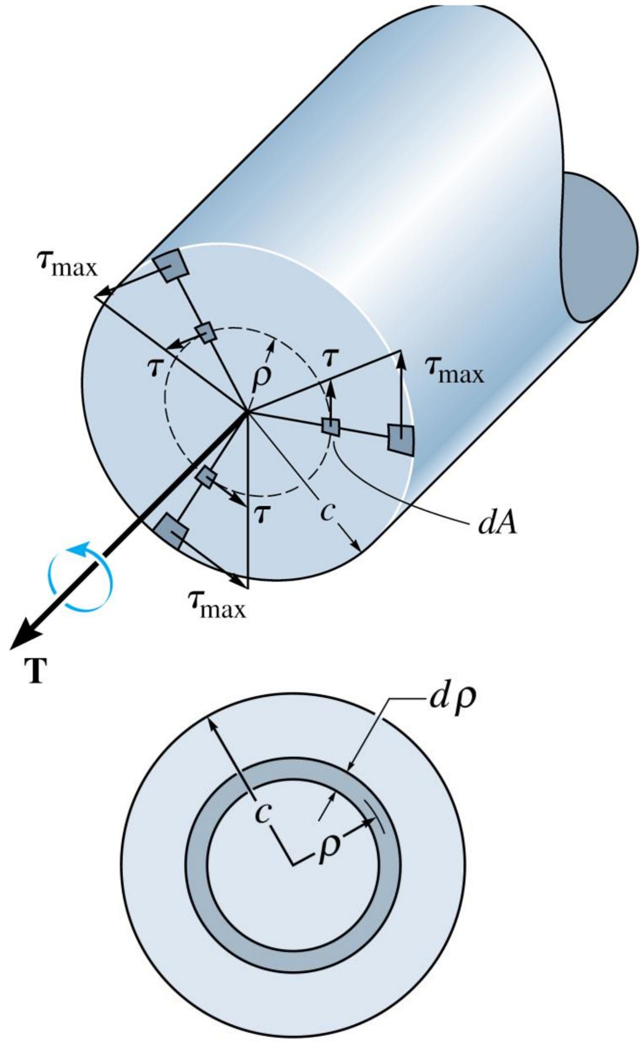
$$\tau = \frac{T\,\rho}{J}$$

Donde el momento de inercia polar J para una sección circular es:

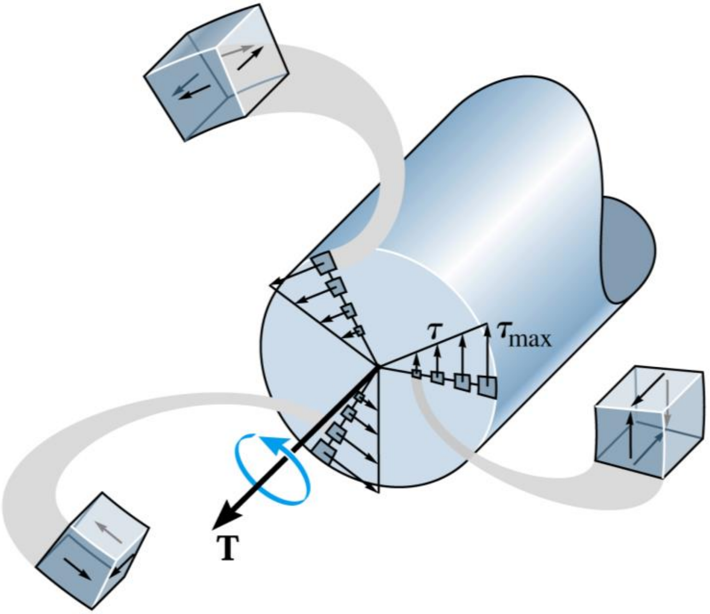
$$J = \int_A \rho^2 dA$$

$$J = \int_A \rho^2(2\pi\rho\; d\rho) = 2\pi \int_A \rho^3\; d\rho$$

$$J = \frac{\pi}{2}c^4$$



5.2 Formulación de torsión



- Cualquier elemento de volumen que esté sujeto a un esfuerzo cortante en una de sus caras debe desarrollar por razones de equilibrio de fuerzas como de momentos, un esfuerzo cortante igual en tres de sus caras adyacentes.

- El par interno de torsión T desarrolla una distribución lineal del esfuerzo cortante a lo largo de cada línea radial de la sección.

5.3 Transmisión de potencia

- Los ejes (árboles) de sección circular son muy utilizados para transmitir potencia desarrollada por una maquina.
- La potencia se define como el par de torsión aplicado por la velocidad angular.

$$P = T\ \omega$$

Donde:

P: La potencia expresada en Watts $[W = N.m/s]$

T: El par de torsión $[N.m]$

ω: Velocidad angular $[rad/s]$

- La practica en ingeniería utiliza la unidad hp “Horse Power”.

$$1hp = 550\ ft.\frac{lb}{s} = 745.7\ W$$

5.3 Transmisión de potencia

- También a menudo se reporta la frecuencia de una máquina f, la cual indica el número de revoluciones o ciclos por segundo. Entonces, la potencia puede ser expresada en términos de la frecuencia.

$$P = T\,\omega = T(2\pi f) = 2\pi f\, T$$

Donde:

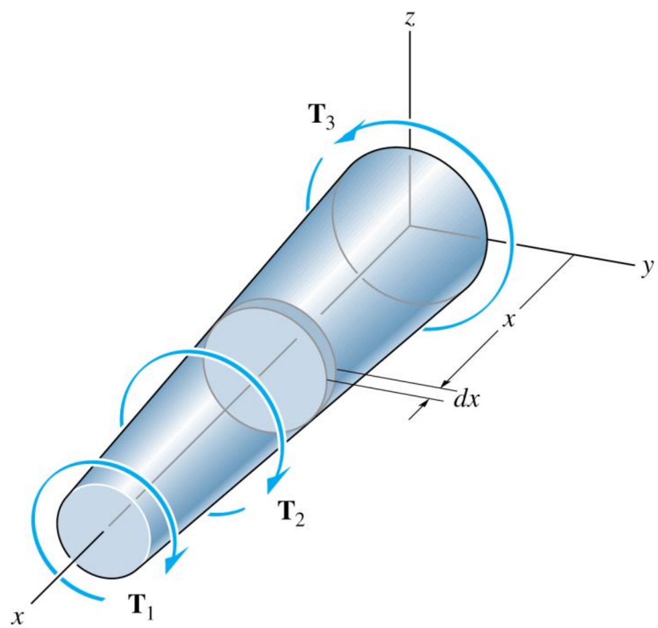
P: La potencia $[W = N.m/s]$

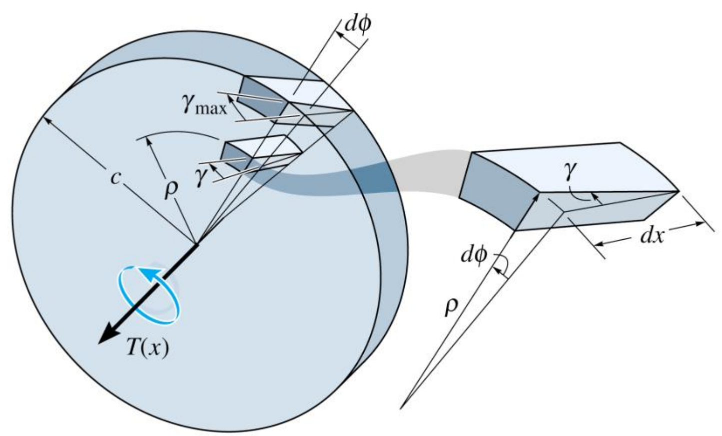
T: El par de torsión $[N.m]$

f: Frecuencia de rotación expresada en Hertz $[1Hz = 1ciclo/s]$

5.4 Ángulo de torsión

- Un eje de sección circular variable a lo largo de su longitud está sometido a diferentes pares de torsión.
- Se aísla un disco diferencial de espesor dx, ubicado a una distancia x.
- El par de torsión interno está en función de x y representado por $T_{(x)}$.
- Debido a $T_{(x)}$ la cara de adelante rota un $d\phi$ respecto a la otra y este giro se puede relacionar con la deformación unitaria cortante γ.



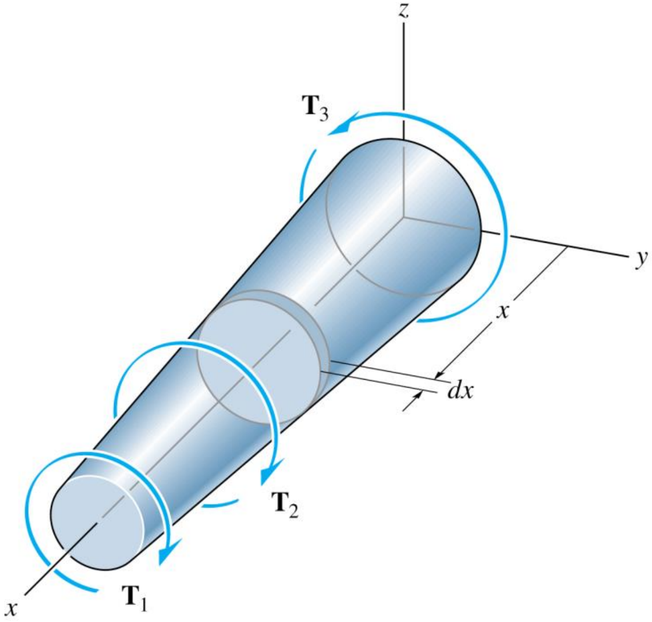


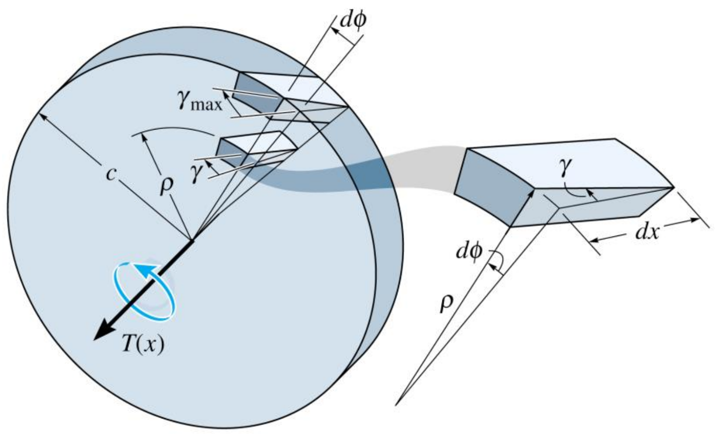
5.4 Ángulo de torsión

$$\rho \, d\phi = dx \, \gamma$$

Usando la ley de Hooke y la expresión de torsión, el ángulo de torsión se describe como:

$$d\phi = \frac{1}{\rho} \gamma \, dx = \frac{1}{\rho} \frac{\tau}{G} \, dx = \frac{1}{\rho \, G} \frac{T_{(x)} \, \rho}{J_{(x)}} \, dx = \frac{T_{(x)}}{J_{(x)} \, G} \, dx$$



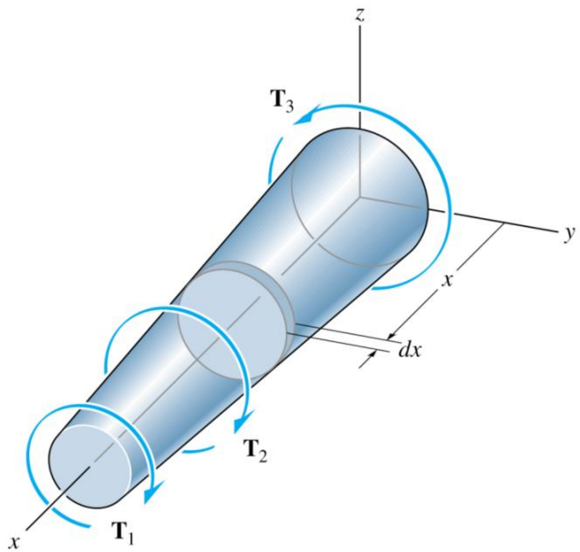


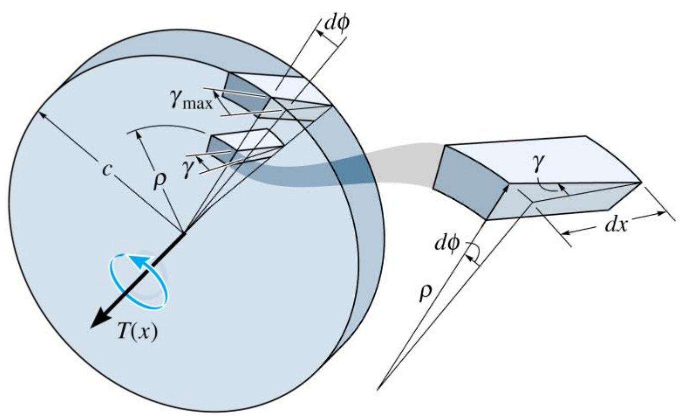
5.4 Ángulo de torsión

$$d\phi = \frac{1}{\rho}\,\gamma\,dx = \frac{1}{\rho}\,\frac{\tau}{G}\,dx = \frac{1}{\rho\,G}\,\frac{T_{(x)}\,\rho}{J_{(x)}}\,dx = \frac{T_{(x)}}{J_{(x)}\,G}\,dx$$

$$d\phi = \frac{T_{(x)}}{J_{(x)}\,G}\,dx$$

$$\phi = \int_0^L \frac{T_{(x)}}{J_{(x)}\,G}\,dx$$



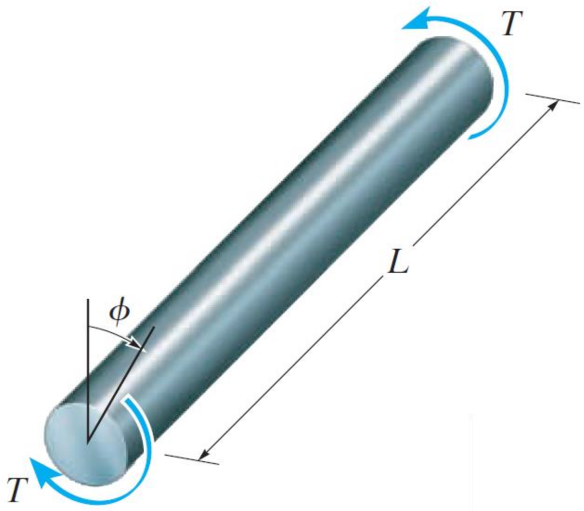


5.4 Ángulo de torsión

Par de torsión y área de la sección transversal constantes

$$\phi = \int_0^L \frac{T_{(x)}}{J_{(x)}\, G}\, dx$$

$$\boxed{\phi = \frac{T\, L}{J\, G}}$$



Donde:

ϕ: Ángulo de torsión de un extremo respecto al otro [radianes]

T: Par de torsión interno $[N.m]$

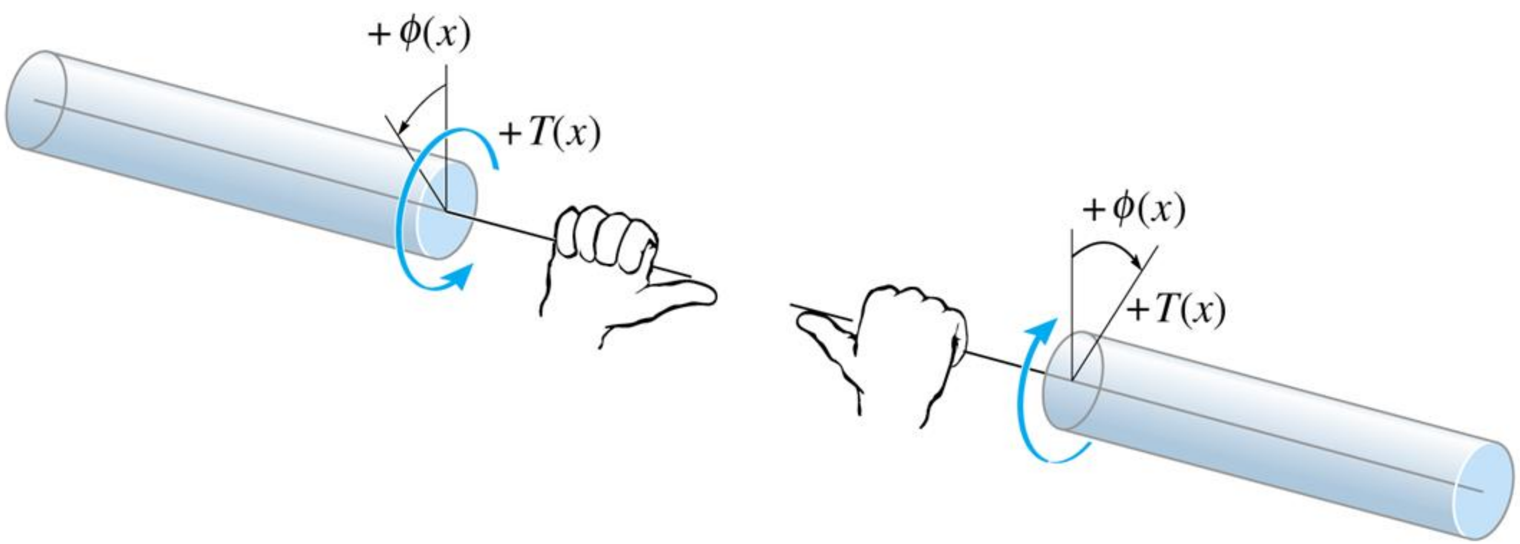
J:Momento de inercia polar $[m^4]$

G: Módulo de rigidez $[Pa]$

5.4 Ángulo de torsión

Convención de signos

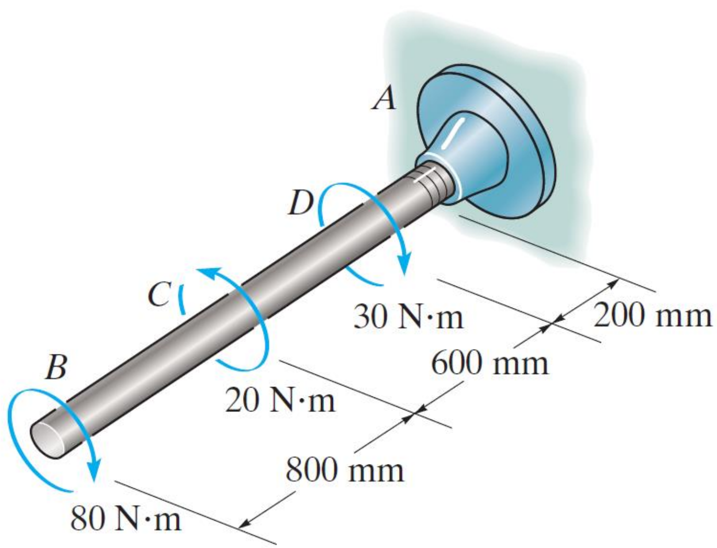
Uso de la mano derecha, según la cual tanto el par de torsión como el ángulo de torsión serán positivos si el pulgar esté dirigido hacia afuera del eje.

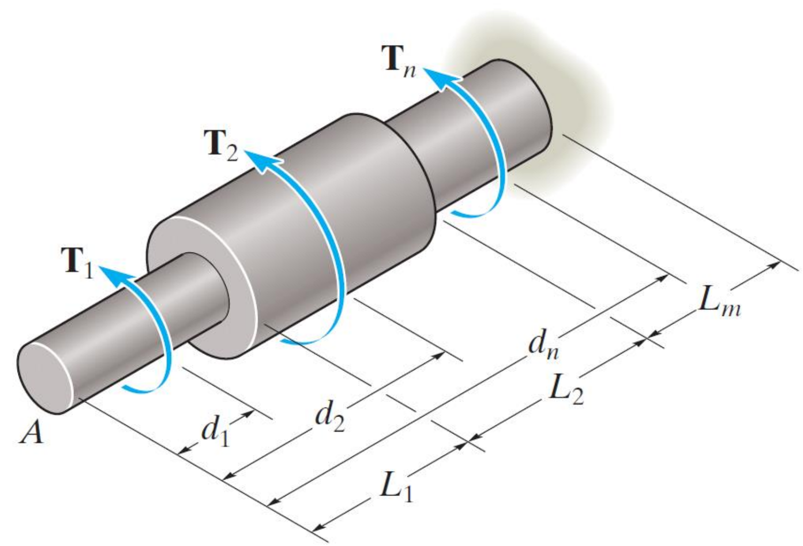


5.4 Ángulo de torsión

Si el eje está sometido a diferentes pares de torsión, o si el área de la sección transversal o el módulo de rigidez cambian de un segmento a otro, entonces se debe aplicar la expresión del ángulo de torsión a cada uno de ellos.

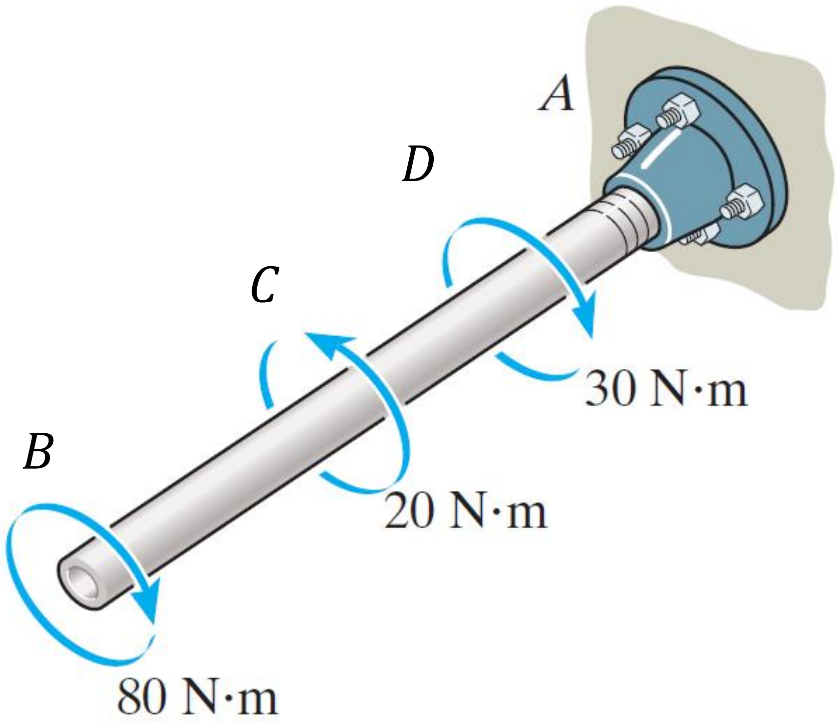
$$\phi = \sum \frac{T\,L}{J\,G}$$





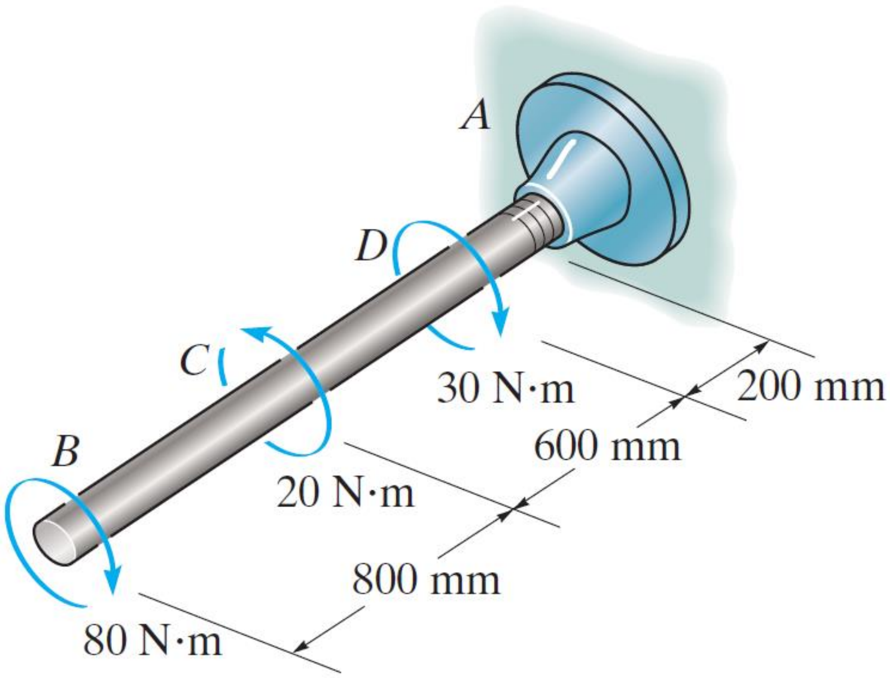
Problema 01 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el esfuerzo cortante máximo de las superficies interna y externa del tubo que posee un diámetro interior y exterior de 40 y 37 mm, respectivamente.



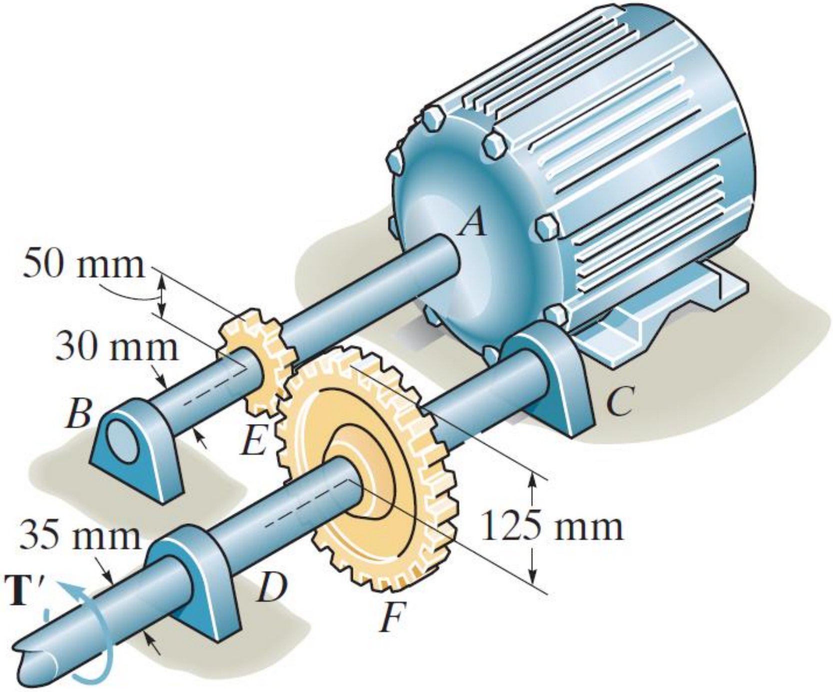
Problema 02 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el ángulo de torsión en el extremo B si la barra posee un diámetro de 20 mm y su módulo de rigidez es igual a 75 GPa.



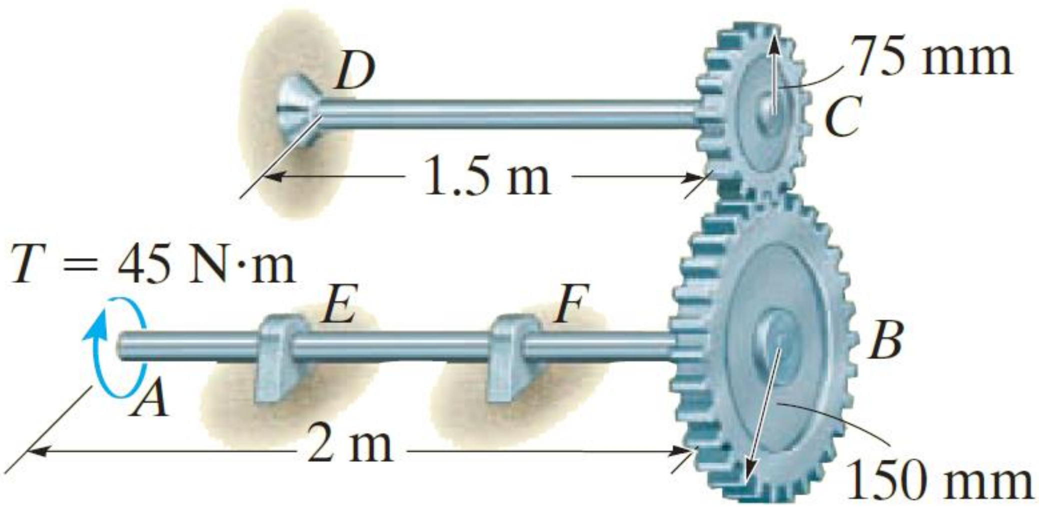
Problema 03 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Un motor entrega un par de torsión de $50\ N.m$ a un eje AB. Este par de torsión es transmitido al eje CD mediante los engranajes ubicados en los puntos E y F. Determinar el par de torsión $\mathbf{T}'$ que brinda el equilibrio y los esfuerzos cortantes máximos en ambos ejes. Considerar que los apoyos en A, B, C y D permiten el giro de los ejes.



Problema 04 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el ángulo de torsión en A. Considerar que los apoyos en E y F permiten el giro libre y el módulo de rigidez para ambas barras igual a 80GPa.



Problema 05 *Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales*

Determinar el ángulo de torsión en A y D. Considerar que los apoyos en A, D y F permiten el giro libre y el módulo de rigidez para ambas barras es de 11(10^3) ksi.