

Resistencia de Materiales 1A

Profesor Herbert Yépez Castillo

2014-2

Capítulo 4. Carga axial

- 4.1 Introducción
- 4.2 Principio de Saint-Venant.
- 4.3 Deformación elástica de un miembro cargado axialmente.
- 4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados.
- 4.5 Esfuerzo térmico.

1.1 Introducción

- El esfuerzo es un medio para medir la distribución de la fuerza dentro de un cuerpo.
- Deformación unitaria es un medio para medir la deformación de un cuerpo.
- La ley de Hooke es una relación matemática que relaciona el esfuerzo y la deformación unitaria.

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

1.1 Introducción

- Se requiere de una relación que vincule las cargas con el desplazamiento.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Diagram illustrating the relationship between stress (σ), force (P), strain (ϵ), and displacement (δ).

Horizontal relationship: σ and P are connected by a double-headed arrow.

Vertical relationships: σ and ϵ are connected by a double-headed arrow; P and δ are connected by a double-headed arrow.

Horizontal relationship: ϵ and δ are connected by a double-headed arrow.

Two question marks ($??$) are present to the right of the diagram.

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{L}$$

4.1
Introducción

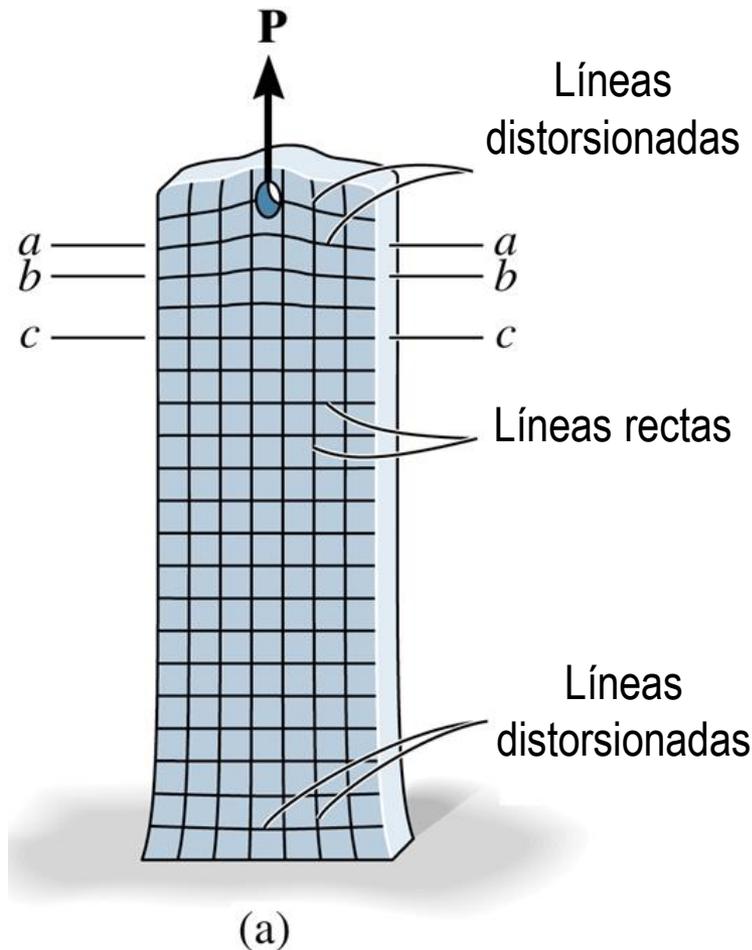
4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.2 Principio de Saint-Venant



- Una barra se deforma elásticamente cuando es sometida a una carga P a lo largo de su eje centroidal.
- La barra está fija en un extremo y sometida a la carga P del otro extremo.
- La deformación de la barra se manifiesta mediante la distorsión de la rejilla.
- Se exhibe deformación localizada en los extremos, la cual decrece a medida que se alejan de los mismos.

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.2 Principio de Saint-Venant

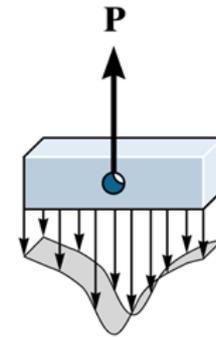
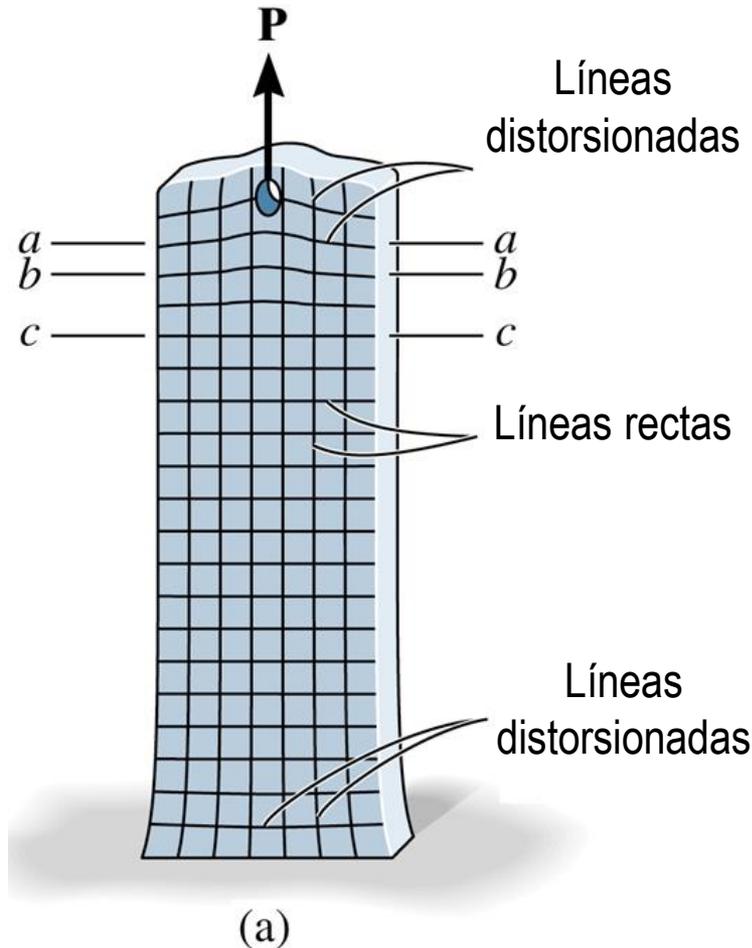
4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

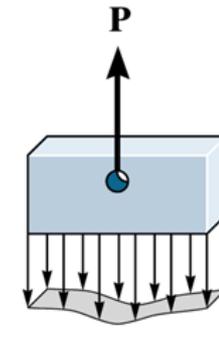
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

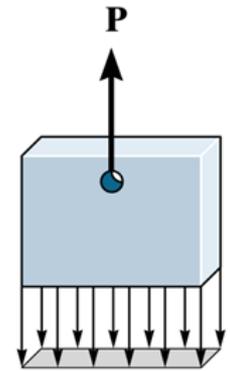
4.5 Esfuerzo
térmico



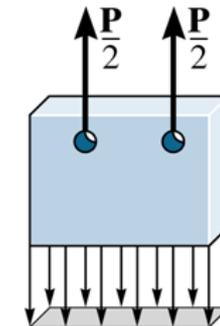
Sección a-a



Sección b-b



$\sigma = \frac{P}{A}$
Sección c-c

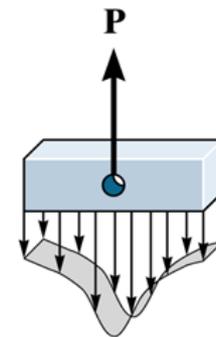


Sección c-c

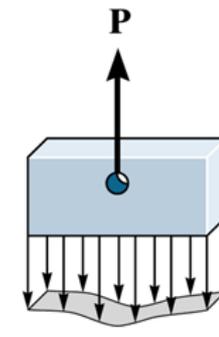
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

4.2 Principio de Saint-Venant

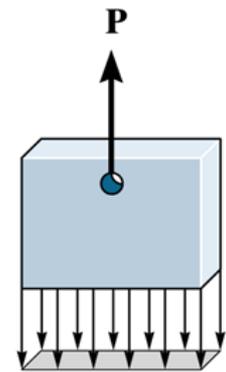
- Como regla general, la distancia mínima desde el extremo de la barra a partir de la cual la deformación local se desvanece es superior o igual a la dimensión mayor de la sección transversal.
- El principio de Saint-Venant postula que los efectos locales se disipan en aquellas regiones que estén lo suficientemente alejadas de los puntos de aplicación de las cargas.



Sección a-a

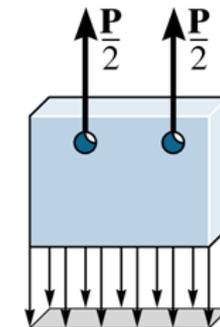


Sección b-b



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Sección c-c



Sección c-c

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

- Utilizando la ley de Hooke, los conceptos de esfuerzo y deformación unitaria, se desarrolla una relación matemática que vincula la carga aplicada con los desplazamientos.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

The diagram illustrates the relationships between stress (σ), force (P), strain (ϵ), and displacement (δ). It features a central grid of variables with double-headed arrows connecting them:

- Horizontal arrows connect σ and P (top row) and ϵ and δ (bottom row).
- Vertical arrows connect σ and ϵ (left column) and P and δ (right column).

To the right of the displacement δ , there are two question marks "??".

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{L}$$

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

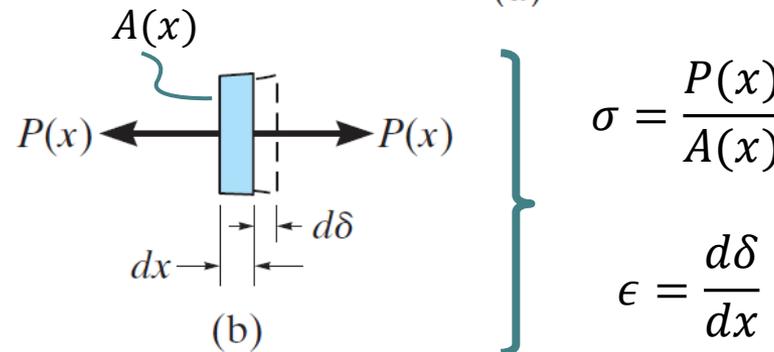
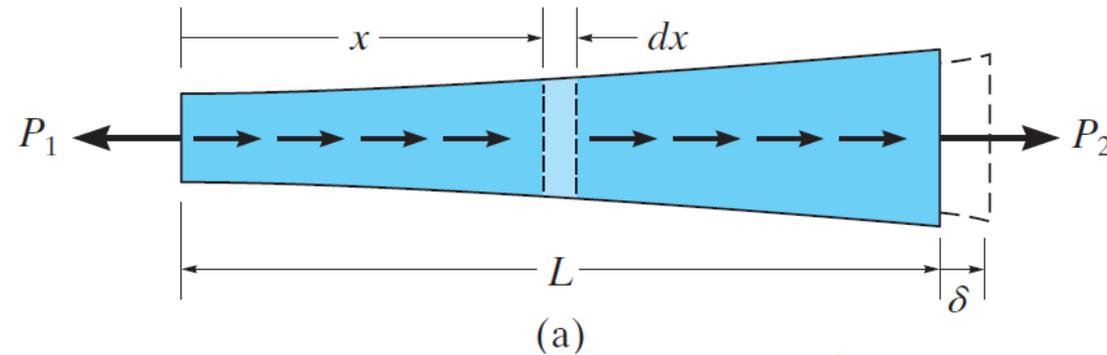
4.3
Deformación
elástica de
un miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

- Se toma una barra de sección variable y carga distribuida
- Se define un diferencial de la barra con la finalidad de determinar el desplazamiento relativo δ de un extremo respecto al otro.



$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)}$$

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

4.1
Introducción

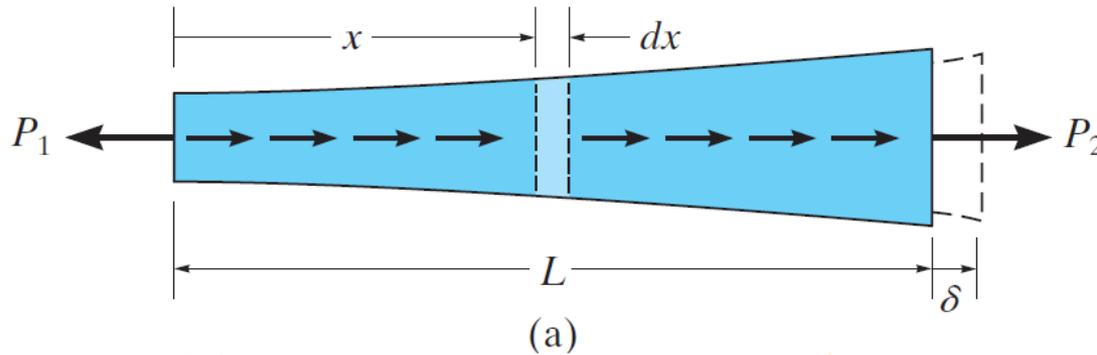
4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de
un miembro
cargado
axialmente

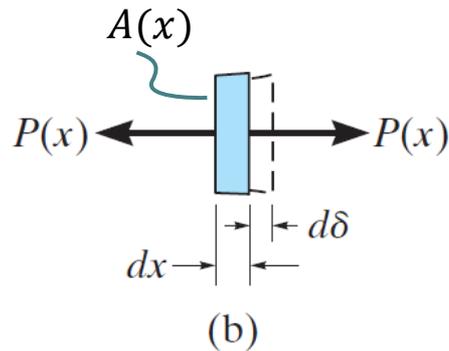
4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente



$$\sigma = E \epsilon$$



$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)}$$

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E \frac{d\delta}{dx}$$

$$d\delta = \frac{P(x) dx}{E A(x)}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) dx}{E A(x)}$$

δ : Desplazamiento relativo de un punto de la barra

L : Longitud original de la barra

$A(x)$: Área de la sección transversal en función de x

E : Módulo de elasticidad del material

4.1
Introducción

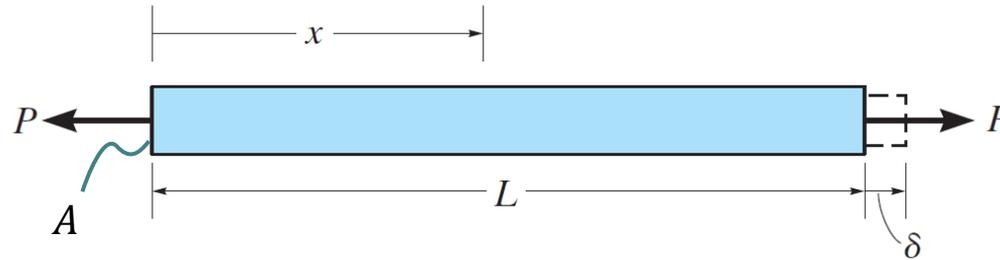
4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de
un miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente



$$\delta = \int_0^L \frac{P(x) dx}{E A(x)} = \frac{P}{E A} \int_0^L dx = \frac{P L}{E A}$$

$$\delta = \frac{P L}{E A}$$

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de
un miembro
cargado
axialmente

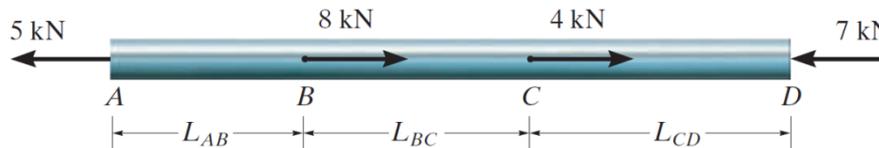
4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

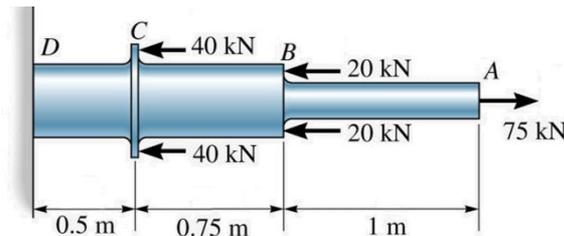
4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

Si la barra se somete a varias cargas diferentes, o el área de la sección transversal o el módulo de elasticidad cambia de un segmento a otro, entonces el desplazamiento se determina de la suma de los desplazamientos extremos de cada segmento.

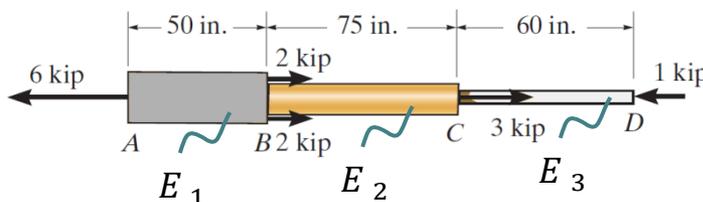
$$\delta = \sum \frac{PL}{EA}$$



$$\delta_{D/A} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$



$$\delta_{A/D} = \delta_{A/B} + \delta_{B/C} + \delta_{C/D}$$



$$\delta_{D/A} = \delta_{D/C} + \delta_{C/B} + \delta_{B/A}$$

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de
un miembro
cargado
axialmente

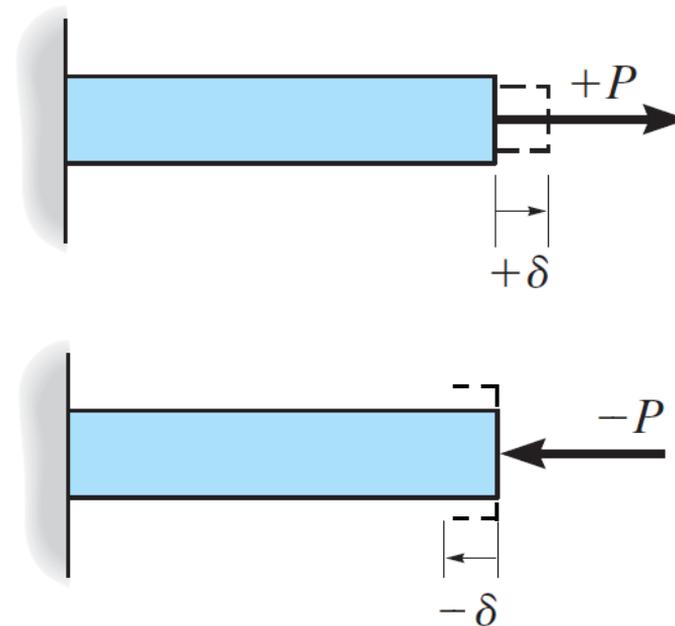
4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

Por convención se determina que:

- La tensión y el alargamiento son positivas
- La compresión y la contracción son negativas



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de
un miembro
cargado
axialmente

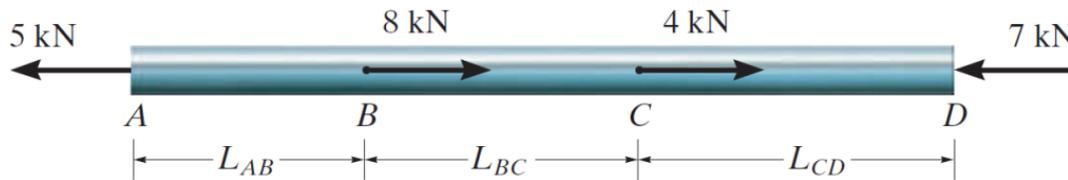
4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

Problema 01

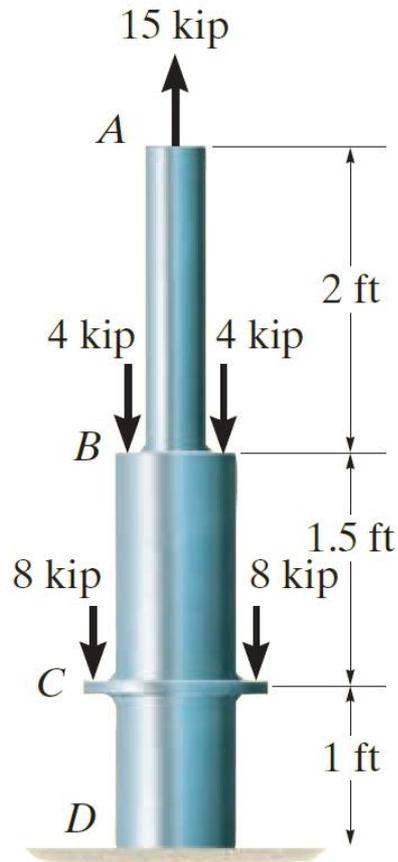
Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

Determinar el desplazamiento de D respecto a A



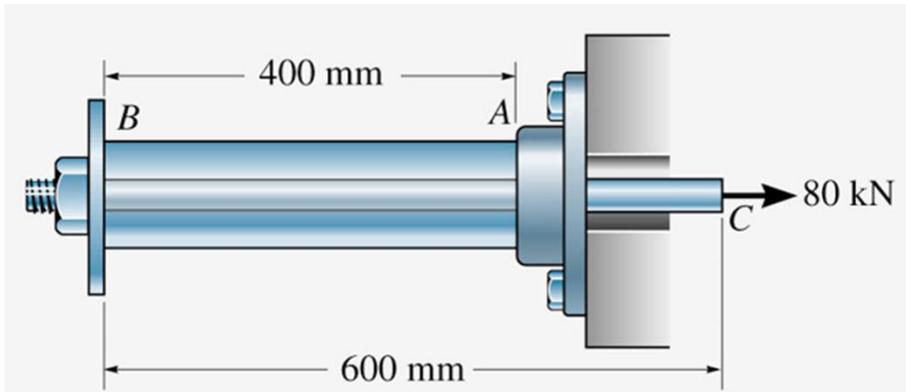
Problema 02 Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

Determinar el desplazamiento de A, si la sección transversal del segmento AB y BD son 1 y 2 in², respectivamente.



Problema 03 Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

Determinar el desplazamiento de C, si el tubo de aluminio AB tiene una sección de 400 mm^2 y un módulo de elasticidad de 70 GPa , y la barra de acero BC posee un diámetro de 10 mm y un módulo de Young igual a 200 GPa .



4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

Desplazamiento de nodos de sistemas de barras articuladas.

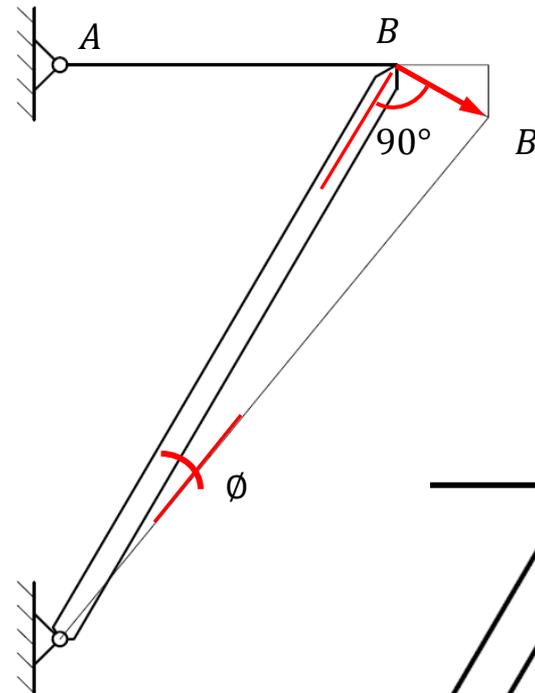
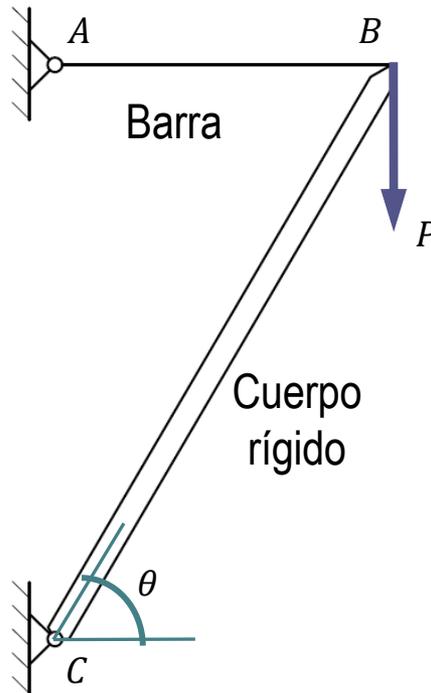
4.1
Introducción

4.2
Principio de Saint-Venant.

4.3
Deformación elástica de un miembro cargado axialmente

4.4
Estáticamente indeterminado

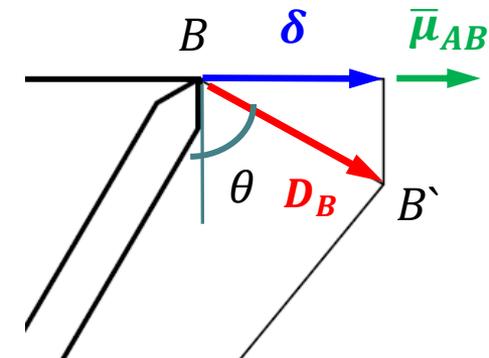
4.5 Esfuerzo térmico



Deformación de la barra

$$\delta = \bar{D}_B \cdot \bar{\mu}_{AB}$$

$$\delta = D_B \sin \theta$$



4.3 Def. elástica de un miembro cargado axialmente

Desplazamiento de nodos de sistemas de barras articuladas.

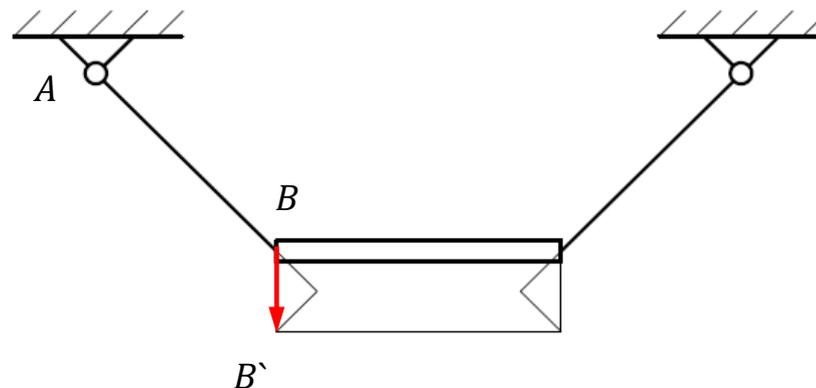
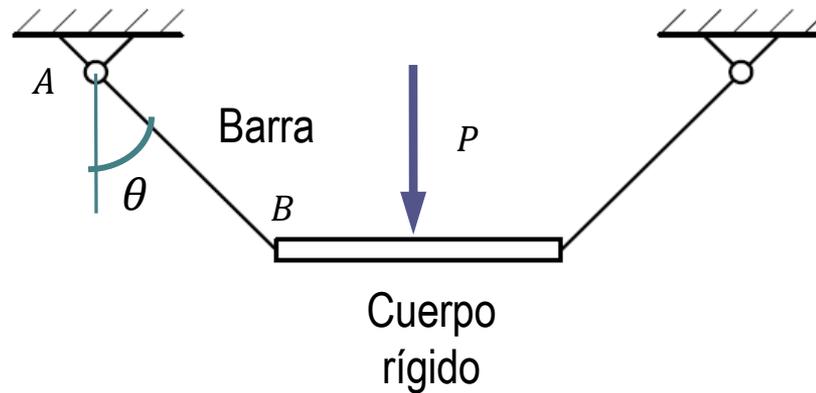
4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de
un miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

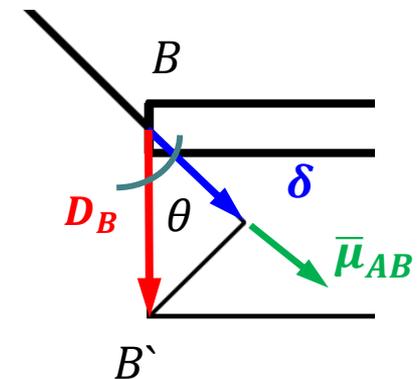
4.5 Esfuerzo
térmico



Deformación de la
barra

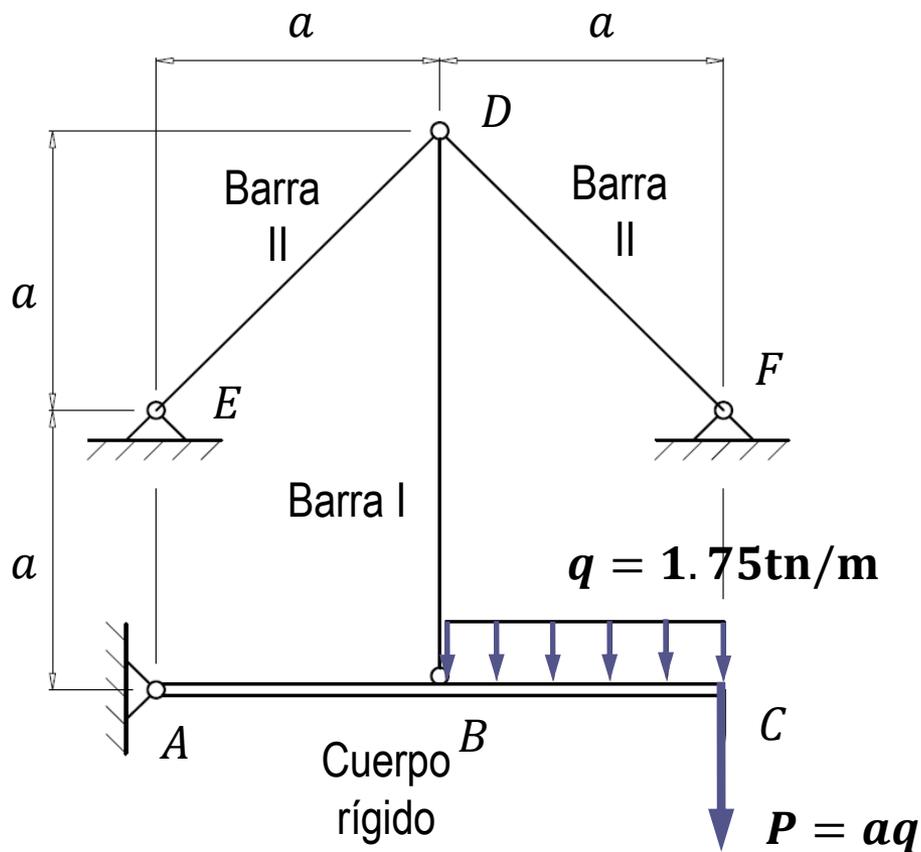
$$\delta = \bar{D}_B \cdot \bar{\mu}_{AB}$$

$$\delta = D_B \cos \theta$$



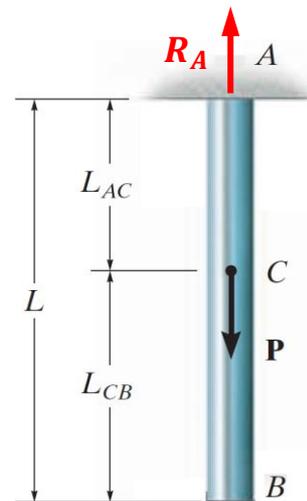
Problema 04

Determinar la fuerza de las barras, la deformación de las mismas y el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P , si $E=2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $A=1 \text{ cm}^2$ y $a=1 \text{ m}$



4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

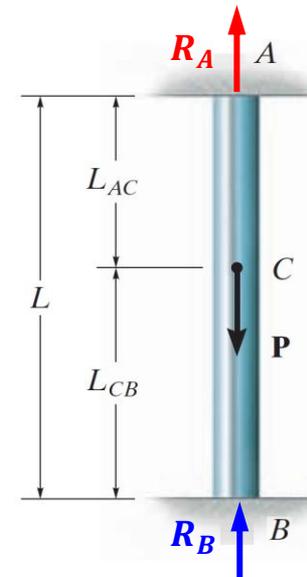
- Una barra empotrada en un extremo y sometida a una carga axial, es un problema donde la reacción se puede determinar por las ecuaciones de equilibrio (**Isostático**).
- La misma barra empotrada por sus dos extremos, es un problema donde **las ecuaciones de equilibrio no son suficientes** para determinar las dos reacciones. La barra está estáticamente indeterminada (**hiperestático**).



$$\sum F_y = 0$$

$$R_A = P$$

Isostático



$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B = P$$

Hiperestático

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

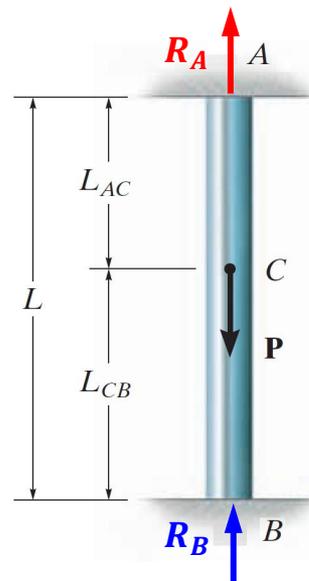
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- Con el objetivo de establecer una ecuación adicional necesaria para dar una solución al problema, es preciso considerar la geometría de la deformación.
- Una ecuación que especifique las condiciones para el desplazamiento se llama **ecuación cinemático o de compatibilidad**.



$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B = P$$

Hiperestático

Ecuación de equilibrio

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

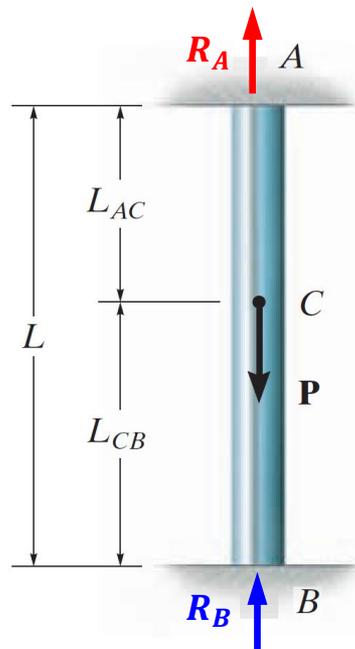
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$\delta_{B/A} = 0$$

$$\delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} = 0$$

} Ecuación de compatibilidad

4.1
Introducción

4.2
Principio de Saint-Venant.

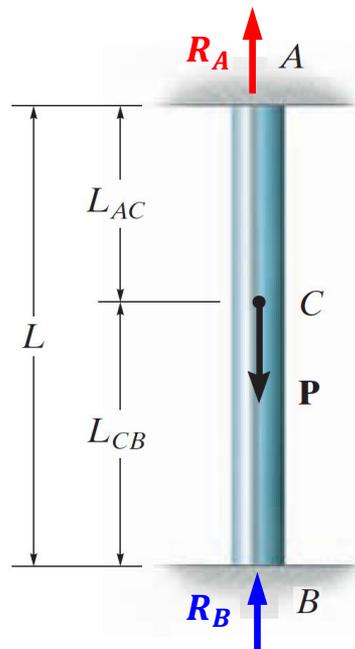
4.3
Deformación elástica de un miembro cargado axialmente

4.4
Estáticamente indeterminado

4.5 Esfuerzo térmico

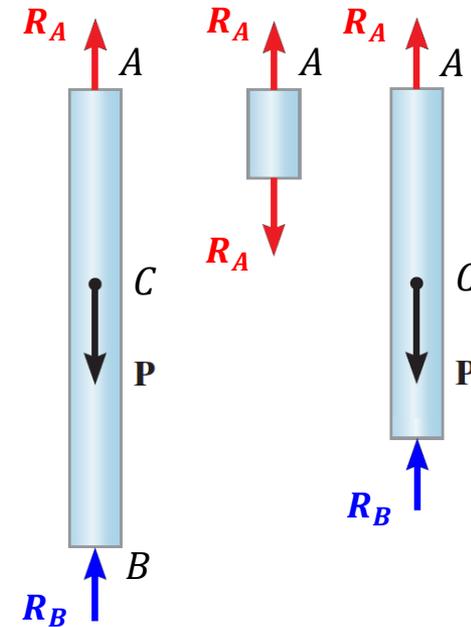
4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$\delta_{B/A} = 0$$

$$\delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} = 0$$



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

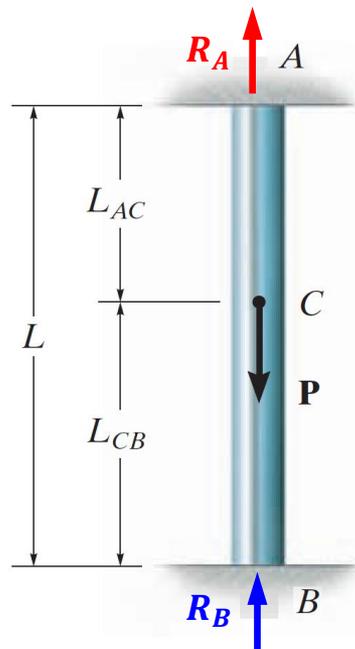
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

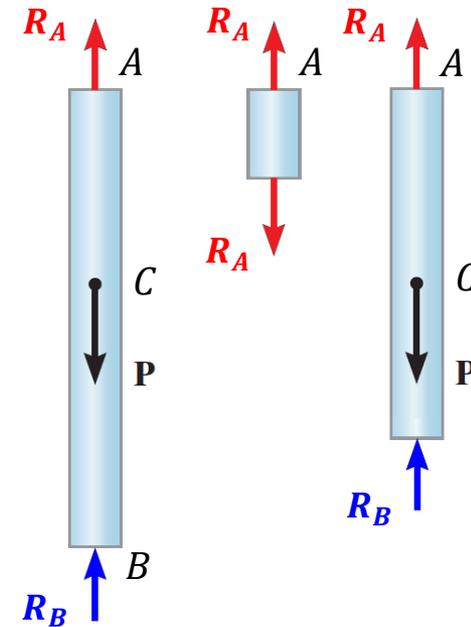
4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

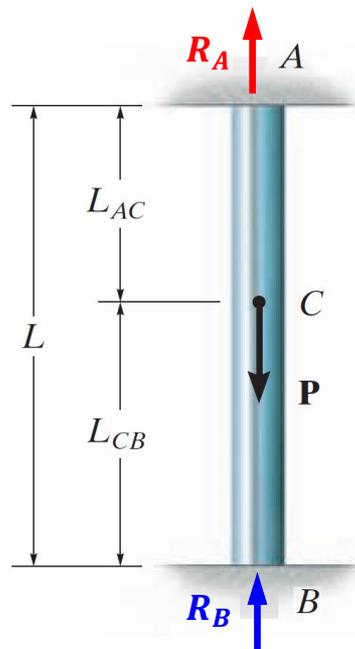
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$

Ecuación
constitutivas

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

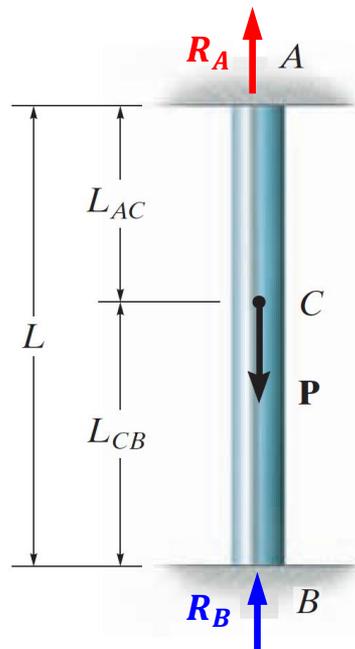
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$R_A + R_B = P$$

Ecuación de equilibrio

$$\delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} = 0$$

Ecuación de compatibilidad

$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$

Ecuaciones constitutivas

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

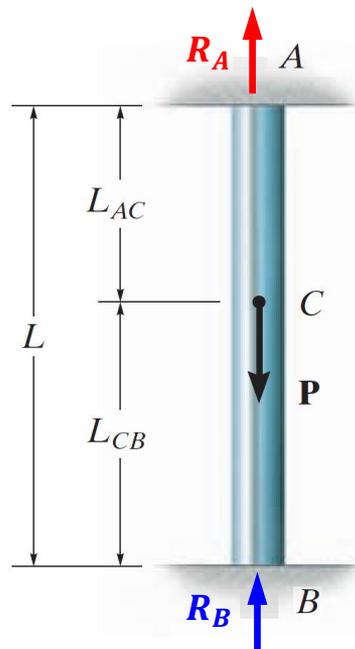
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

- En este caso, la condición de compatibilidad requiere que el **desplazamiento de un extremo respecto al otro es igual a cero**, pues ambos están empotrados.



$$R_A + R_B = P$$

$$\delta_{B/A} = \delta_{B/C} + \delta_{C/A} = 0$$

$$\delta_{B/C} = \frac{(-R_B)L_{CB}}{EA}$$

$$\delta_{C/A} = \frac{R_A L_{AC}}{EA}$$

$$R_A = P \frac{L_{BC}}{L}$$

$$R_B = P \frac{L_{AC}}{L}$$

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

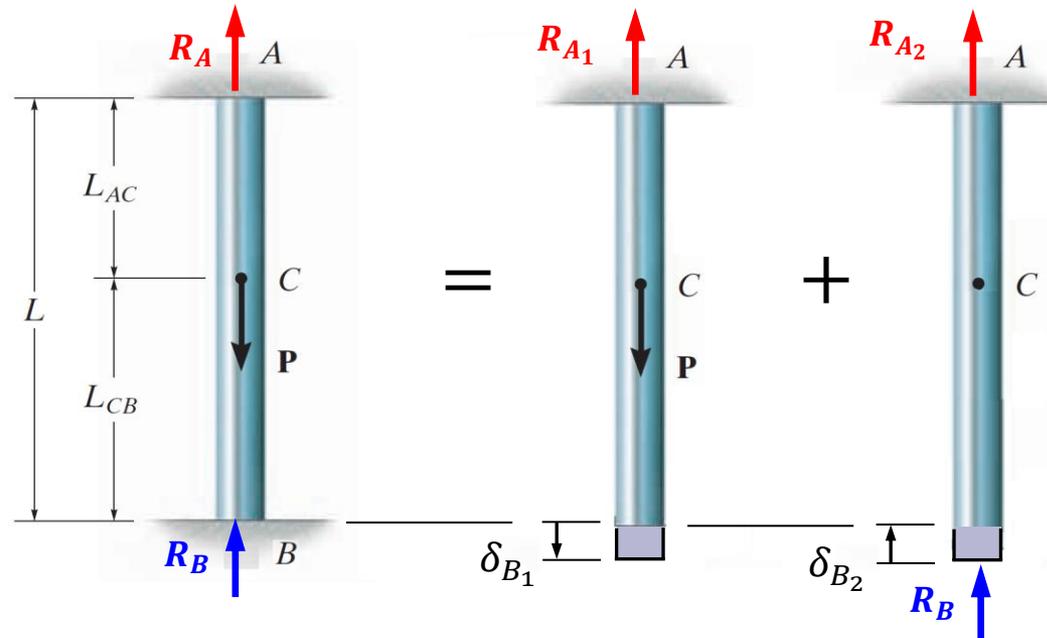
4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

Superposición de fuerzas

- En problemas estáticamente indeterminados puede ser más fácil plantear la ecuación de compatibilidad usando la superposición de fuerzas.
- Se subdivide la carga en componentes que actúan separadamente, sumando la contribuciones causadas por cada componente.



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

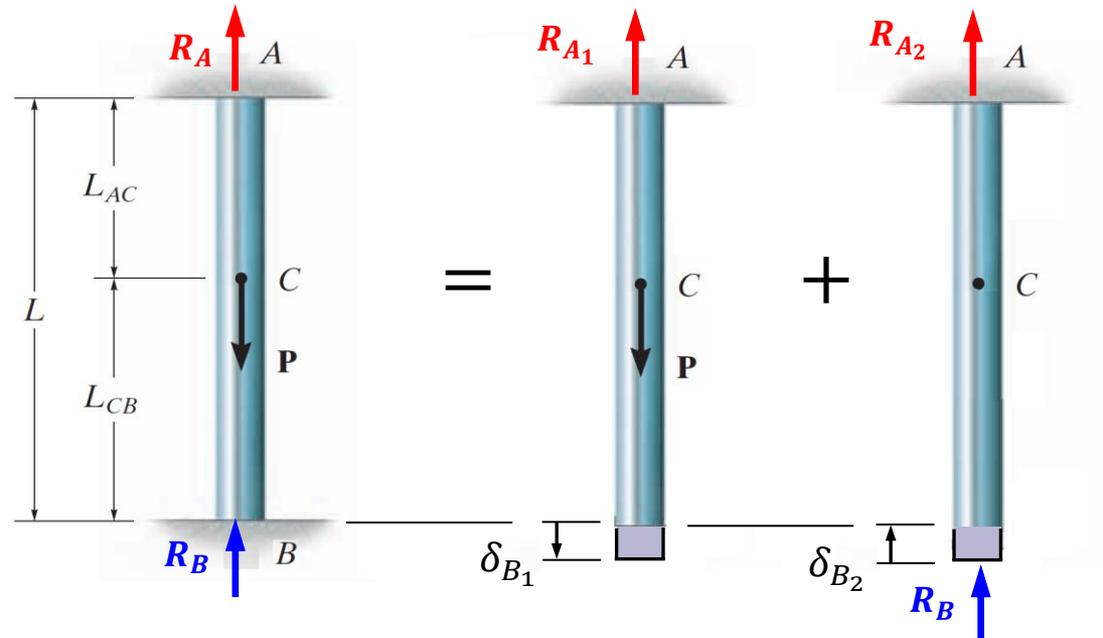
4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

Superposición de fuerzas

- Se elige el apoyo B como “redundante” y se quita temporalmente. Redundante por que no es necesario para mantener el equilibrio.
- La barra original es igual a la barra sometida solo a la carga P más la barra sometida solo a la carga redundante en B.



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

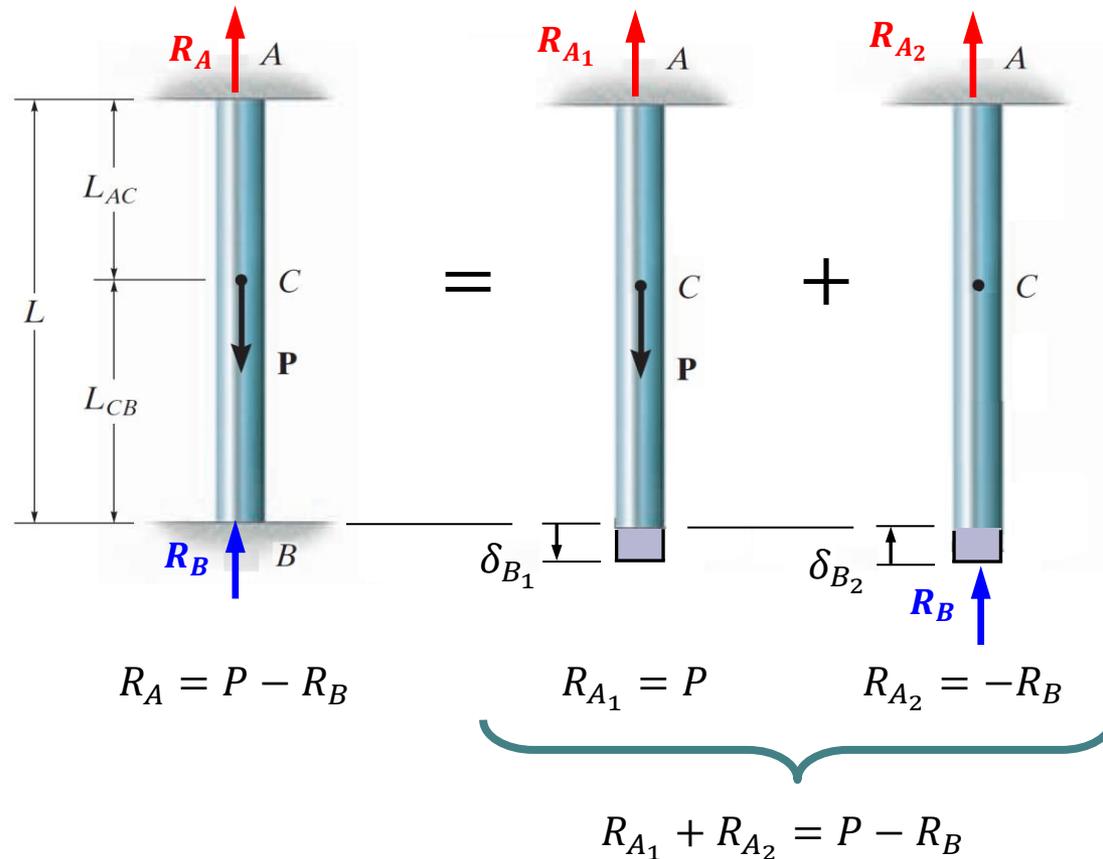
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

Superposición de fuerzas



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

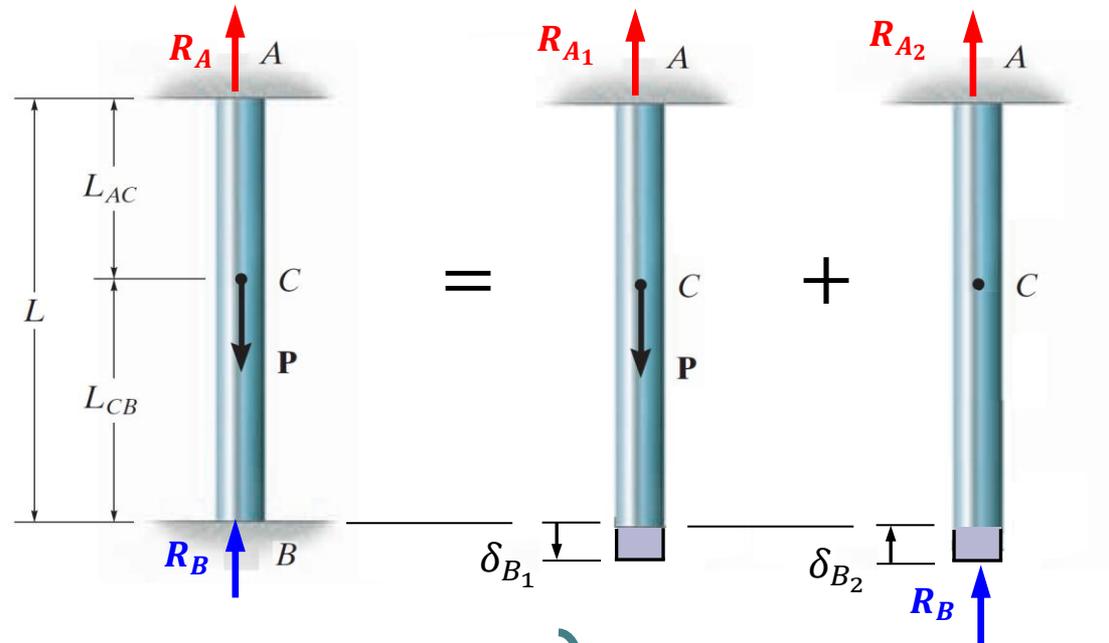
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5 Esfuerzo
térmico

4.4 Miembros cargados axialmente, estáticamente indeterminados

Superposición de fuerzas



$$\delta_{B_1} - \delta_{B_2} = 0$$

$$\frac{PL_{AC}}{EA} - \frac{R_B L}{EA} = 0$$

$$R_A = P \frac{L_{BC}}{L}$$

$$R_B = P \frac{L_{AC}}{L}$$

4.1
Introducción

4.2
Principio de Saint-Venant.

4.3
Deformación elástica de un miembro cargado axialmente

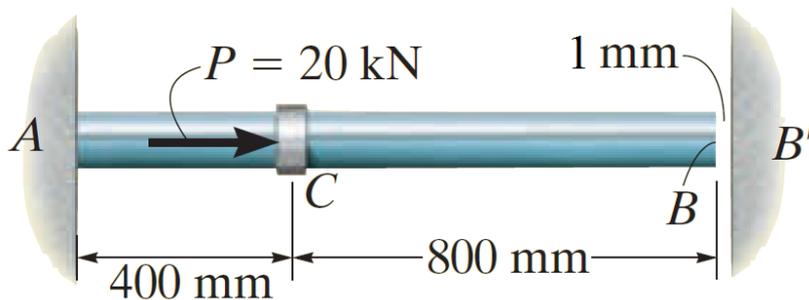
4.4
Estáticamente indeterminado

4.5 Esfuerzo térmico

Problema 05

Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

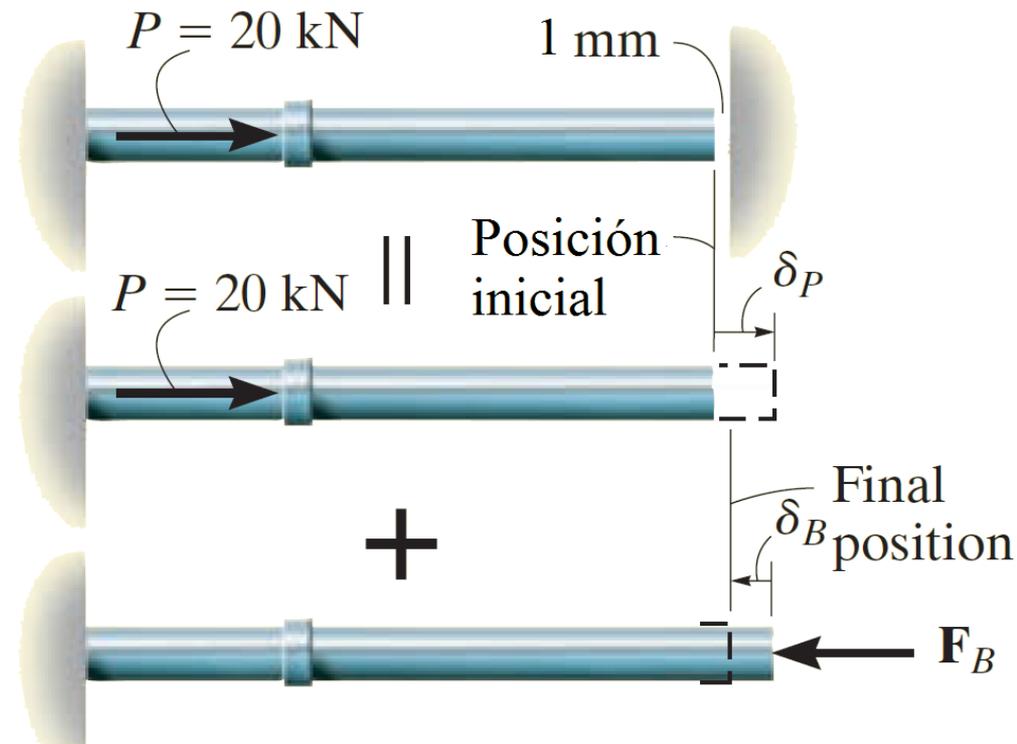
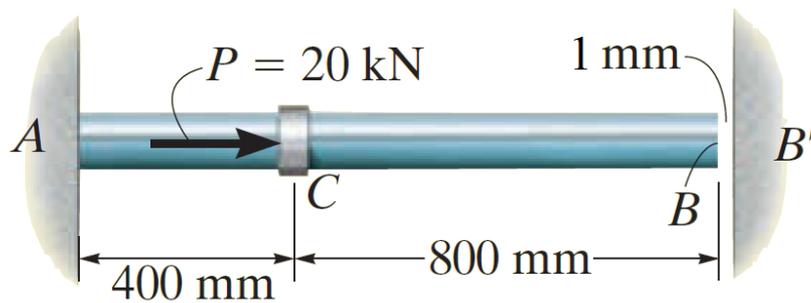
La barra tiene un diámetro de 5 mm ya antes de ser cargada existe un claro de 1 mm. Determinar las reacciones en A y B' cuando la barra esta sometida a la carga P. Considerar $E=200$ GPa.



Problema 05

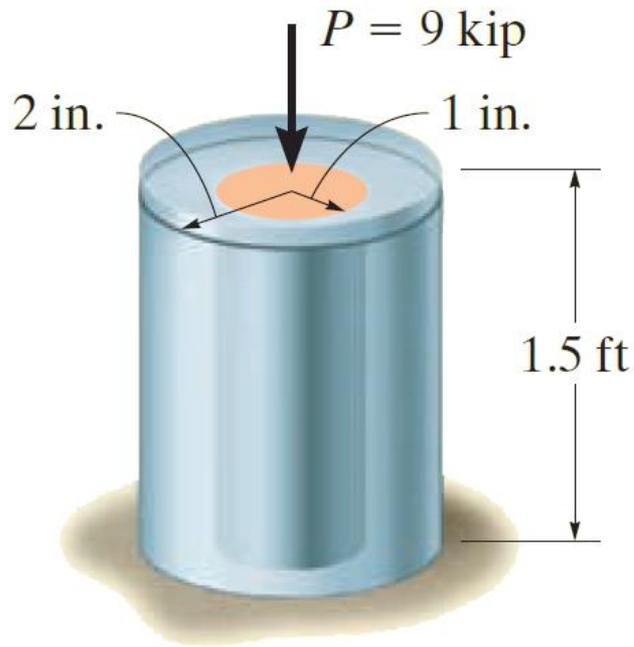
Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

La barra tiene un diámetro de 5 mm ya antes de ser cargada existe un claro de 1 mm. Determinar las reacciones en A y B' cuando la barra esta sometida a la carga P. Considerar $E=200$ GPa.



Problema 06 Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

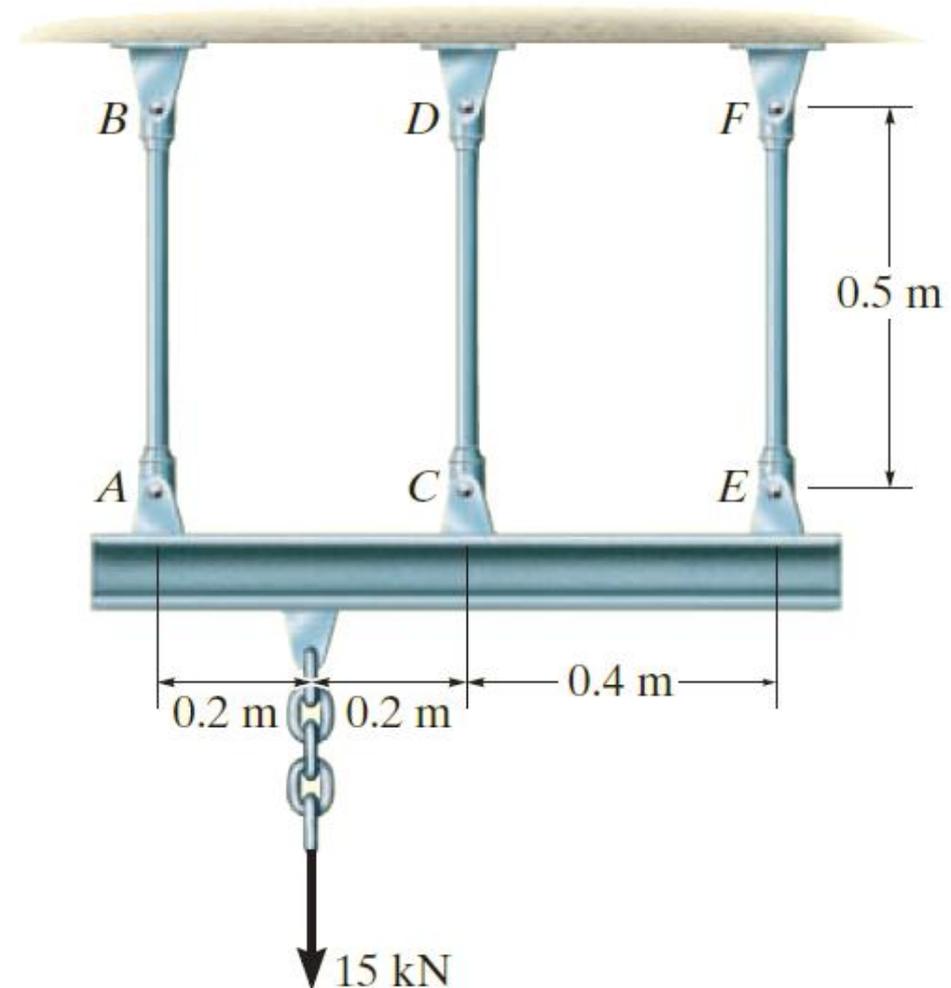
Un cilindro de aluminio y su núcleo de bronce son sometidos a una carga axial P . Determinar el esfuerzo normal de cada uno de ellos, si $E_{\text{aluminio}} = 10 \times 10^3$ ksi y $E_{\text{bronce}} = 15 \times 10^3$ ksi.



Problema 07

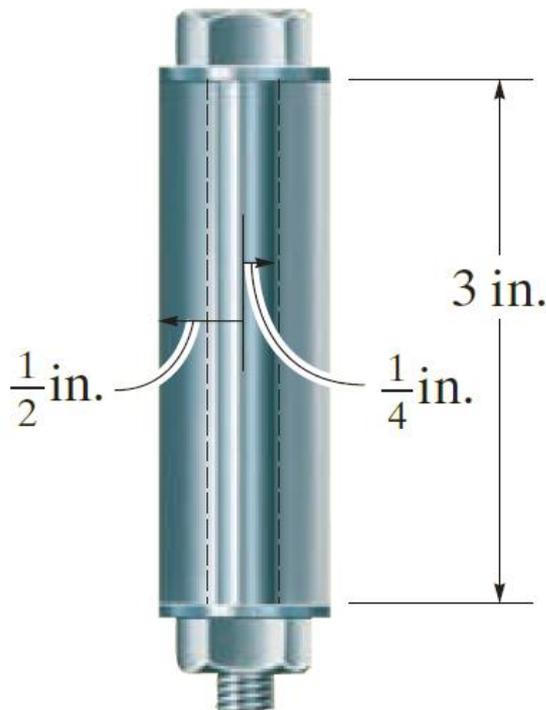
Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

Tres barras de acero están unidas a un cuerpo rígido. Determinar la fuerza sobre cada barra, si AB y EF poseen cada una un área en su sección transversal de 25 mm^2 , y CD, un área de 15 mm^2 . Considerar $E_{\text{acero}} = 200 \text{ GPa}$.



Problema 08 Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

Un perno de una aleación de aluminio y un cilindro de una aleación de magnesio inicialmente son apretadas a mano. Luego, mediante una llave la tuerca es apretada una media vuelta. Si el tornillo tiene 16 hilos por pulgada, determinar el esfuerzo al que se encuentra sometido. Considerar $E_{\text{aluminio}} = 10 \times 10^3$ ksi y $E_{\text{magnesio}} = 6.5 \times 10^3$ ksi.



4.5 Esfuerzo térmico

- El cambio de temperatura ocasiona cambios dimensiones en algunos materiales
- **Incremento** de la temperatura produce que el material se **dilate**.
- **Decrecimiento** de la temperatura ocasiona que el material se **contraiga**.
- Si el material es homogéneo e isotrópico se establece la siguiente relación:

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

δ_T : Cambio de longitud

α : Coeficiente de expansión térmica [$1/^\circ C$], [$1/K$], [$1/^\circ F$]

ΔT : Cambio de temperatura

L : Longitud inicial

4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

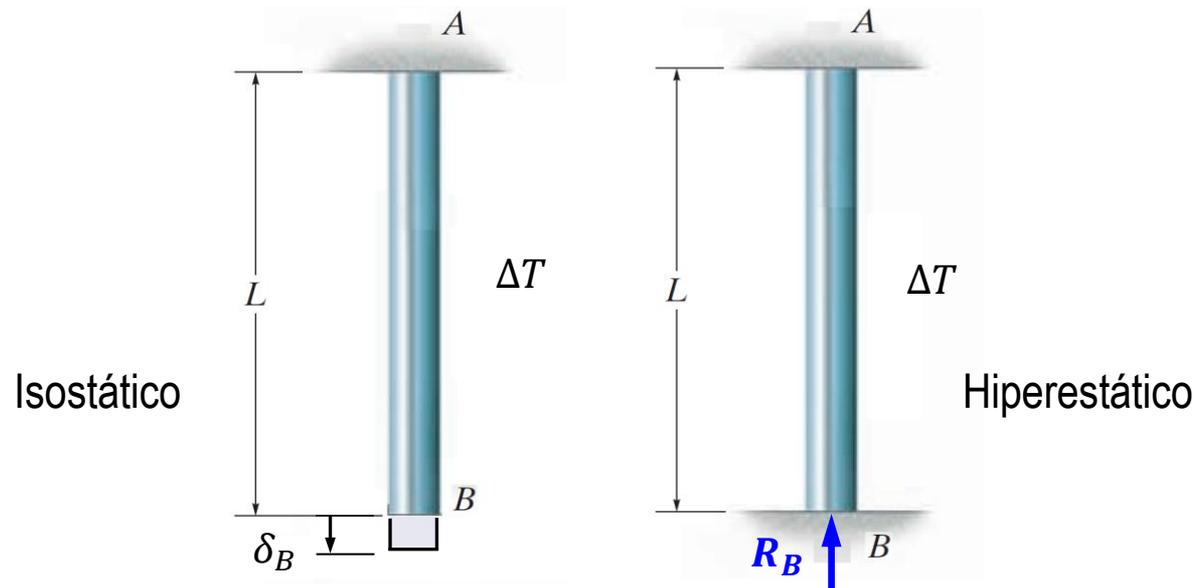
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5
Esfuerzo
térmico

4.5 Esfuerzo térmico

- En casos **isostáticos**, el cambio de longitud producto del cambio de temperatura puede ser calculado mediante la expresión mencionada.
- En problemas **hiperestáticos**, los desplazamientos térmicos pueden ser impedidos por soportes y apoyos ocasionando esfuerzos térmicos.



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

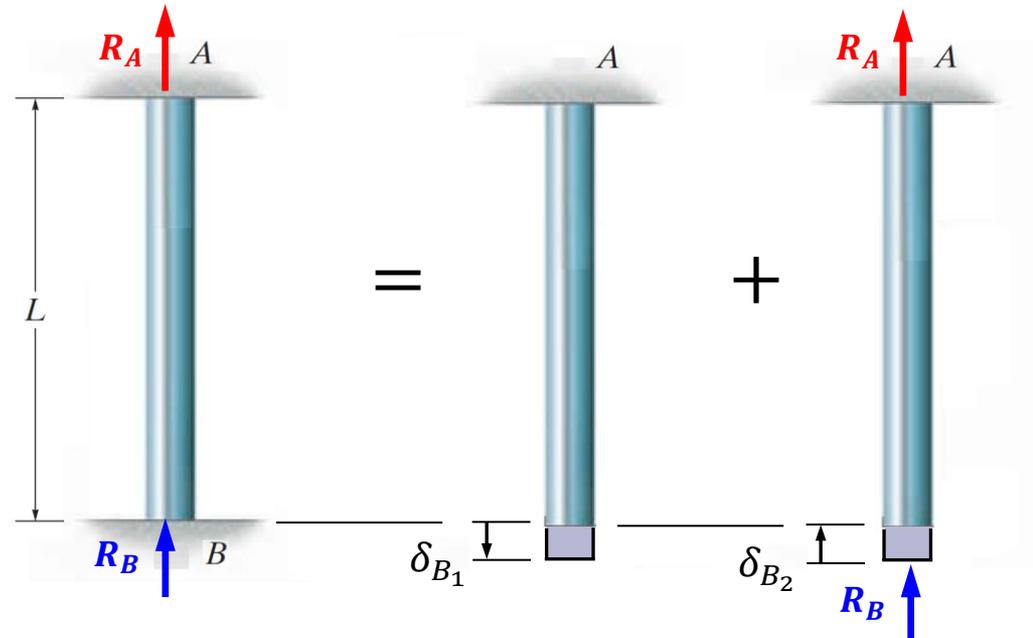
4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5
Esfuerzo
térmico

4.5 Esfuerzo térmico

- En casos **isostáticos**, el cambio de longitud producto del cambio de temperatura puede ser calculado mediante la expresión mencionada.
- En problemas **hiperestáticos**, los desplazamientos térmicos pueden ser impedidos por soportes y apoyos ocasionando esfuerzos térmicos.



4.1
Introducción

4.2
Principio de
Saint-Venant.

4.3
Deformación
elástica de un
miembro
cargado
axialmente

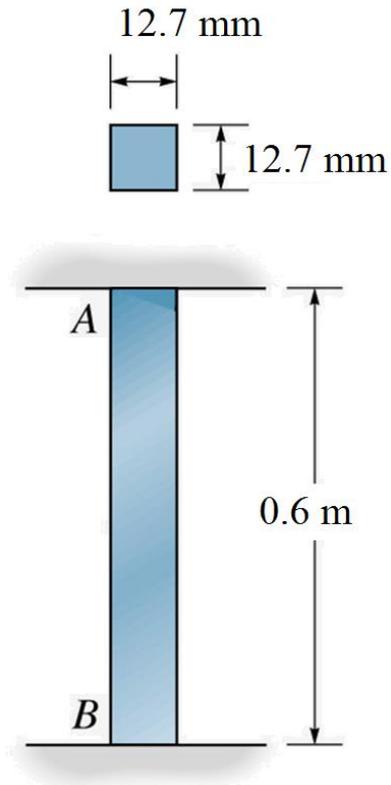
4.4
Estáticamente
indeterminado

4.5
Esfuerzo
térmico

Problema 09

Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

Determinar el esfuerzo térmico de la barra cuando la temperatura es de $48.89\text{ }^{\circ}\text{C}$, si ésta encaja de forma justa a una temperatura de $15.56\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tomar en cuenta que modulo de elasticidad es igual a 200 GPa y el coeficiente de expansión térmica igual a $11.7 \times 10^{-6}\text{ }/^{\circ}\text{C}$.



Problema 10

Ref. Hibbeler R. Mecánica de Materiales

La viga rígida está fija a los tres postes cilíndricos y cuando la carga no está aplicada la temperatura es de 20 °C. Determinar la fuerza sobre cada poste cuando la carga actúa sobre la viga y la temperatura se eleva a 80°C. Considerar:

$$E_{\text{acero}} = 200 \text{ GPa}$$

$$\alpha_{\text{acero}} = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$E_{\text{aluminio}} = 70 \text{ GPa.}$$

$$\alpha_{\text{aluminio}} = 23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

