VI CONGRESO IBEROAMERICANO DE CABRI

IBEROCABRI 2012

6, 7 Y 8 DE AGOSTO

ACTAS

Editores: Haydée Z. Azabache Caracciolo · Francisco Ugarte Guerra

DEPARTAMENTO DE
CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

PUCP

VI Congreso Iberoamericano de Cabri

6, 7 y 8 de agosto de 2012

IBEROCABRI 2012

ACTAS

Conferencias
Talleres
Reportes de Investigación
Comunicación de Experiencias o Propuestas de Innovación Didactica
Socialización de Trabajos en Áreas Afines a la Matemática

Departamento de Ciencias
Sección Matemáticas-IREM
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

Editores:
Francisco Ugarte Guerra fugarte@pucp.edu.pe
Haydée Zenaida Azabache Caracciolo hazabac@pucp.edu.pe

VI Congreso Iberoamericano de Cabri
Actas 2012
IBEROCABRI 2012

Primera edición, noviembre 2012
Tiraje 100

Editores: Francisco Ugarte Guerra
Haydée Zenaida Azabache Caracciolo
Diseño de carátula: Dirección de Comunicación Institucional de la PUCP(DCI-PUCP)
Diagramación de interiores: Carlos Enrique Iman Ancajima

Avenida Universitaria 1801, Lima 32
626 2000-anexo 4151
E-mail: iberocabri2012@pucp.edu.pe, irem@pucp.edu.pe
Dirección URL: http://www.congreso.pucp.edu.pe/iberocabri/, http://www.pucp.edu.pe/irem/index.html

ISBN: **978-612-45391-9-0**
Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú: **2012-15109**

Impreso en el Perú – Printed in Perú

Presentación

El Congreso Iberoamericano de Cabrí 2012, IberoCabri 2012, se desarrolló en el Campus de la Pontificia Universidad Católica del Perú, los días 6, 7 y 8 de agosto de 2012. El congreso estuvo centrado en los usos y aplicaciones de Cabri en la geometría y en áreas afines.

Los Congresos Iberoamericanos de Cabri convocan bienalmente a investigadores, profesores y estudiantes de Iberoamérica, Francia, Italia, México, Argentina, Uruguay, Brasil, Colombia y otros, todos ellos interesados en el uso, aplicaciones e investigaciones que puedan realizarse utilizando el programa de geometría dinámica Cabri.

La organización del VI IberoCabri se enmarca dentro de las actividades que desarrolla el Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) en coordinación con la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), en su línea de investigación: Tecnologías y medios de expresión en enseñanza de las matemáticas y cuyo principal problema de investigación consiste en identificar bajo qué condiciones el uso de las tecnologías digitales permiten un acceso más democrático y eficiente al desarrollo de contenidos y competencias.

Objetivos:

- Divulgar las experiencias internacionales sobre el uso de Cabri en distintas disciplinas.
- Mostrar y difundir el uso de programas de geometría dinámica como el Cabri en todos los niveles educativos.
- Plantear temas de investigación centrados en cómo incorporar las tecnologías digitales para desarrollar habilidades matemáticas.
- Compartir experiencias y lecciones aprendidas en los procesos de incorporación de tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje en todos los niveles educativos.

- Mostrar el estado de inserción del uso de Cabri en la Web 2.0, en libros electrónicos, en pizarras digitales, entornos virtuales de aprendizaje, etc.
- Formar redes de especialistas en la construcción de ambientes tecnológicos que sean compartidos y utilizados por todos los miembros de la red.
- Contribuir con la mejora de la calidad de la enseñanza de la geometría en Iberoamérica.

Este libro contiene los resúmenes de las propuestas aceptadas para el congreso:

- 10 conferencias,
- 18 talleres,
- 8 reportes
- 1 socialización de experiencias en áreas afines
- 11 propuestas de innovación didáctica o comunicación de experiencias.

Francisco Ugarte
Presidente del Congreso

Responsables del Congreso

Convocan

Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

Cabrilog.

Organizan

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) - Perú

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Escuela de Posgrado de la PUCP

Colaboran

Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Centro de Investigaciones y Servicios Educativos del Departamento de Educación de la PUCP

Auspician

Yaku Innovative Solutions (Yainso SAC)

Santillana

Top Technologies y SmartBoard. SAC

Vicerrectorado de Investigación de la PUCP. Dirección de Gestión de la Investigación.

Embajada de Francia

Comité Científico.

Colette Laborde, UJF-Francia.

Eugenio Diaz Barriga, UNAM-México.

Francisco Ugarte Guerra, PUCP-Perú.

Jesús Flores Salazar, PUCP-Perú.

Luis Moreno Armella CINVESTAV-México.
Maria José Ferreira da Silva PUCSP-Brasil.
Ubiratan D'Ambrosio USP-Brasil.

Comité Organizador Local.

Cecilia Gaita Iparraguirre (Departamento de Ciencias - PUCP).
Elizabeth Advíncula Clemente (Sección Matemáticas - PUCP).
Francisco Ugarte Guerra (Departamento de Ciencias PUCP) Preside.
Haydée Z. Azabache Caracciolo (Oficina del Rector-PUCP).

Comité Consultivo.

Carmen Coloma Manrique (Decana Facultad de Educación - PUCP).
Lileya Manrique Villavicencio (Directora de CISE - PUCP).
Uldarico Malaspina Jurado (Director IREM-PUCP).

Comité de Apoyo.

Miguel Gonzaga Ramírez (Sección Matemáticas PUCP).
Nélida Medina García (Sección Matemáticas PUCP).

Comité de Página Web.

Elizabeth Advíncula Clemente.
Haydée Zenaida Azabache Caracciolo (Coordinadora).
Jesús Victoria Flores Salazar.
Dirección de Comunicación Institucional PUCP.
Yainso SAC. (Diseño y Programación).

Tabla de contenido

CONFERENCIAS

Imaginación, geometría dinámica y Cabri

Alicia Noemí Fayó
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional General Pacheco. Universidad Nacional de Moreno. Grupo en Investigación Matemática XVIII, Argentina

Resumen

En el Iberocabri 2010, mi conferencia se tituló Creatividad y Cabri. Mi deseo para Iberocabri 2012, es analizar un componente más para fomentar la creatividad. En nuestra profesión, todos sabemos que lo que descubrimos y comprendemos, nos es factible trasmitirlo, pero para descubrir algo y sobre todo en Matemática, debemos contar con: interés en lo que hacemos, compromiso en la búsqueda, ser tenaces ante la adversidad y finalmente necesitamos imaginación. Los profesores, sobre todo, debemos experimentar la búsqueda, el redescubrimiento, maravillarnos y hasta emocionarnos con el encuentro del "saber sabio" para luego imaginar las estrategias de la transposición didáctica. Nos preguntamos entonces ¿Qué es imaginar?, ¿Dónde interviene en nuestras tareas?

A través de la conferencia, analizaremos cómo colabora la imaginación con la investigación y cómo debe ser tenida en cuenta a la hora de interesar a nuestros alumnos en las clases de Matemática. Mostraré diferentes propuestas, algunas para investigaciones en las universidades y otras en la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, a profesores que trabajando con Cabri, han redescubierto temas, para adaptarlos a alumnos de nivel secundario, terciario o universitario. En la exposición de cada experiencia, realizaré una pequeña revisión de conceptos, para refrescar la memoria y ubicar a los asistentes, luego, describiré en qué consistió su exploración.

Imaginar estrategias constituye un trabajo laborioso por parte de los docentes, pero vale la pena la selección de situaciones innovadoras para el aprendizaje, que fomenten la investigación para descubrir nuevos conceptos, recurriendo a conocimientos ya adquiridos.

Palabras claves: Investigaciones con Cabri. Experiencias para el aula.

En la carrera Licenciatura de la Matemática, trabajamos con estudiantes que ya han cursado cuatro años para obtener el título de profesores de Matemática. La carrera tiene una duración de 2 años para llegar a ser licenciados y se requiere de un año más para obtener el título de grado, realizando el primer trabajo de investigación, que se denomina tesina.

A través del trabajo con nuestros estudiantes, hemos visto que la mayoría, tienen una formación sólida para la enseñanza. Por "formación sólida" entendemos que complementan los conocimientos matemáticos para enseñar en las clases, la búsqueda de los recursos necesarios para despertar en sus alumnos el deseo de saber o el desafío de descubrir los nuevos conceptos. En el programa está incluida la materia Fundamentos de la Geometría, y para desarrollarla modelizamos los diferentes temas con Geometría dinámica. Cuando los estudiantes terminan de cursar, para evaluarlos les tomamos un parcial, si lo aprueban están en condiciones de rendir el examen final. El parcial, trata de una pequeña investigación sobre un tema específico dado por nosotros, modelado con Cabri.

Indicamos una bibliografía apropiada y trabajos expuestos en Internet. Este material los guía para elegir el tema, a partir de ahí necesitan toda la imaginación posible para desarrollarlo. Presentan un escrito sobre el trabajo realizado que si es aprobado, los habilita para exponerlo ante sus pares.

Según la licenciada en Ciencias de la Educación, Alejandra Trillo (2000), la imaginación es el uso de todos los sentidos con la finalidad de generar ideas, imágenes y soluciones poco convencionales.

María Judith Aderete y María Eugenia Peralta (2005) expresan al respecto "No hay modo de crear nuevos conocimientos sobre un tema –de resolver los pequeños o grandes enigmas de nuestro mundo –si no se tiene intuición e imaginación, si no se exploran, con mente abierta, los diversos caminos que pueden llevar a la respuesta. Pero esa disposición creativa, que es verdaderamente indispensable, de nada sirve si no se la encausa en un verdadero proceso de análisis, de organización de material disponible, de ordenamiento y de crítica a las ideas pues, no obtendríamos un conocimiento científico sino simples opiniones."

Como Profesores nuestro compromiso actual es presentar la Matemática en forma atrapante, accesible, sin dejar de ser rigurosos y para eso se necesita imaginación. Ante cada grupo de estudiantes, nuestra misión es estudiar sus características, sus saberes previos, cómo encaran el estudio, en qué estima tienen a esta ciencia y a partir de allí intuir, imaginar y crear las estrategias. La Geometría dinámica se transforma en potencial recurso tecnológico. Para que pase de ser potencial a ser efectivo, el "medio" debe ser cuidadosamente preparado. Todo lo que pase en él debe ser significativo y para ello el recurso Geometría dinámica debe ayudar a la exploración, la discusión y la incorporación de los conceptos.

El interés en esta exposición es dar a conocer diferentes aplicaciones de la Geometría dinámica para trabajar en las clases desde el nivel secundario hasta la universidad y aportar experiencias muy sencillas a la investigación científica en Educación Matemática.

Describiré algunas situaciones en la que podemos observar estas experiencias.

Con respecto a los trabajos que citaré:

En primer lugar haré mención de un trabajo cuyo tema fue cómo obtener a partir de los poliedros regulares dos tipos de cortes. Tipo I, es decir aquellos que se obtienen de los platónicos por medio de cortes por los puntos medios de sus aristas y en segundo lugar los de Tipo II que corresponden a los arquimedianos, es decir con cortes hasta obtener caras con polígonos regulares. Para ello se utilizan transformaciones geométricas en el espacio.

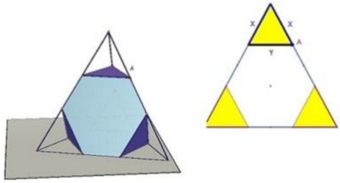


Figura 1: Tetraedro Truncado

En segundo lugar seleccioné otro trabajo sobre el concepto de inversión, por qué se desarrolló este estudio y la manera de encarar la investigación sobre la mantención de la congruencia de ciertos ángulos que le da la categoría de Geometría Conforme.

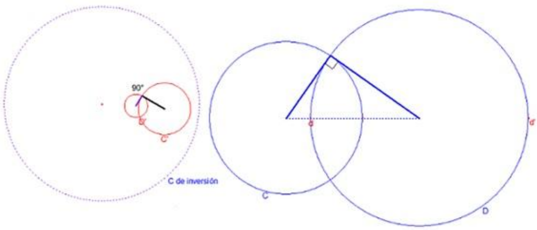


Figura 2: Ángulos en la inversión

En tercer lugar, comentaré sobre la Geometría Fractal con el Árbol de Pitágoras, las estrategias de un alumno-profesor para obtener su movilidad y la vinculación del tema como inspiración para el arte.

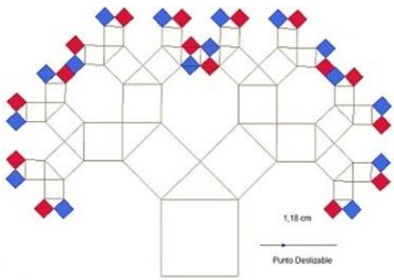


Figura 3: Árbol de Pitágoras

En cuarto lugar abordaré la vinculación de la Geometría con la Astronomía, la modelización de ciertos fenómenos en Cabri 3D, para facilitar el estudio de de la Astronomía de posición, tema encarado por el Profesor Pablo Viveros para obtener su título de Licenciado en Enseñanza de la Matemática.

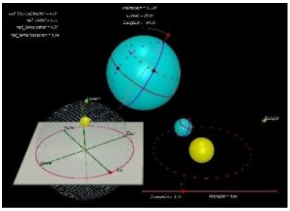


Figura 4: Geometría y Astronomia

Finalmente a nivel universitario citaré dos experiencias en una de las materias que más preocupa a los profesores por el grado de abstracción que requiere de parte de los estudiantes. En nuestro país Álgebra y Geometría Analítica se dictan como una sola asignatura, lo que lleva por razones de tiempo a desestimar la visualización de los conceptos que ofrece la Geometría.

La primera constituye una investigación que comenzó en el 2009 y culmina este año.

El tema que se abordó fue “La Validación Matemática en Transformaciones Lineales basada en un ambiente de Geometría Dinámica”. Se realizó en un primer año de las carreras de ingeniería mecánica de la UTN Facultad Regional General Pacheco.

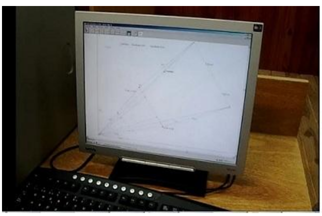


Figura 5: Validación en Álgebra en un entorno de Geometría Analítica

Sobre ella mostraré diferentes registros de la investigación y algunas conclusiones a las que hemos llegado por el momento.

Estas observaciones me animaron para proponer una experiencia con cónicas y cuádricas, en la materia Álgebra y Geometría Analítica de la carrera de ingeniería electrónica en otra universidad donde trabajo, la Universidad Nacional de Moreno.

Caracterizaré la situación y comentaré mis observaciones.

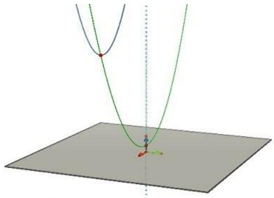


Figura 6: Paraboloide eliptico

Lo expuesto me llevó a querer compartir estas experiencias con mis colegas, para reflexionar sobre la imaginación como factor indispensable en la creación de estrategias. Acrecentemos la imaginación jugando con la belleza de la Matemática, sintiéndonos cautivados y desafiados por ella, buscando los caminos para que nuestros alumnos desde sus inicios la disfruten del mismo modo que lo hacemos nosotros.

Referencias

Alderete, M. J., Peralta, M.E.(2005) Hacia la Investigación Científica. Introducción a los Fractales. Libro digital. Maestría de la Enseñanza de la Matemática. Universidad Nacional de Cuyo. Argentina.

Artigue, M. (2002) Ingeniería Didáctica: ¿Cuál es su papel en la investigación didáctica de hoy? Les dossiers des Sciences de l'Education. Didactiques des disciplines scientifiques et tecnologiques: concepts et méthodes. Revue Internationale des Sciences de l'Education. Presses Universitaires du Mirail Nº 8.

Artigue, M. et al. (1995) Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Coedición: Una Empresa Docente – Grupo Editorial Iberoamericana. Bogotá.

Artigue, Michèle (2004), Problemas y desafíos en educación matemática: qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática, Educación Matemática, 16 (3), pp. 5-28. Editorial Santillana.

Bell, E. T. (2009). Los Grandes Matemáticos. Buenos Aires: Losada.

Binimelis, M. I. (2010). Una nueva manera de ver el mundo, la geometría fractal. España: RBA. p. 95

Bongiovanni, V. Jahm, A. (2009). VI Congreso de Educación Matemática. Explorações de poliedros no ambiente de Geometría dinámica con Cabri 3D. Puerto Mont. Chile

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Recherches en Didactiques de Mathematiques. Vol.7 Nº 2.Recuperado el 12 de junio de 2012 en
http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/sanc_m/Didactica/Unidad%20I/brousoui_ii_.pdf

Dorier, J.L. (ed.) (1997): L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question, Panorama de la Recherche en Didactique sur ce Thème. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1995); "La ingeniería didáctica y al evolución de su relación con el conocimiento" en Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, pág. 61-97. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T., Hillel, J., Sierpinska, A.; (1998) Cabri based linear álgebra: transformations. Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, pp. 209-221. Recuperado el 12 de junio de 2012 en http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g2-dreyfus-et-al.pdf

Eves, H. (1969). Estudio de las geometrías. Tomo I. México: Unión Tipográfica Hispano Americana.

Falsetti, Marino, Rodríguez, M., (2004); "Validación en Matemática en situación de aprendizaje". Actas del VI Simposio de Educación Matemática, UNLU. Argentina. Formato CD.

González, V. y Rodríguez, M.; (2006); "Un modelo para evaluar la validación matemática", Revista Educación Matemática, México, Vol. 18, Nº 3, 2006. pp. 103-124.

Guillén Soler, Georgina. (1997) El mundo de los poliedros. España: Síntesis.

Hernández Sampieri, Roberto; et al. (2001); Metodología de la Investigación. 2ª. ed. México, D.F: McGraw-Hill..

Hillel, J.; Sierpinska, A. & Dreyfus, T. (1998): Investigating linear transformations with Cabri. Proceedings of the International Conference on the Teaching of Tertiary Mathematics, Samos, Greece.

In J.-L. Dorier(ed.),L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire enQuestion, Panorama de la Recherche en Didactique sur ce Thème (pp. 249-268). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Litwin, E. (2008). El oficio de enseñar, Buenos Aires: Paidós.

Proyecto Estalmat Castilla y León recuperado el 11de junio de 2012 en

http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionValencia2010/POLIEDROS-REGULARES-1.pdf

Trillo Perez, A. (2012) recuperado el 20 de junio de 2012 de http://www.terra.es/personal/asstib/mes/creativ.htm

❖❖❖

A construção de situações problemas utilizando o Cabri 3D

Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
zeze@pucsp.br

Resumo

O ensino de Geometria espacial na escola básica brasileira, principalmente, tratada no Ensino Médio (14 a 17 anos), privilegia o estudo de medidas de volume a partir do Princípio de Cavalieri e fórmulas. Em alguns casos, chega-se a solicitar a memorização de fórmulas para as medidas de superfícies e volumes para cada tipo de pirâmide. As figuras são apresentadas como ilustração e não é solicitado ao aluno nem suas construções, nem tão pouco um tratamento que possibilite a solução de alguma situação problema. Embora, muitas ações de formação continuada venham acontecendo os professores ainda se intimidam com a utilização de situações problemas, bem como, de tecnologias em sala de aula. Nesse sentido faremos uma análise de algumas situações em que o software Cabri 3D pode ser utilizado para conduzir o aluno a buscar a construção de sólidos por truncaturas e caminhos para determinar a medida de seu volume levantando conjecturas, comprovando-as, ou não, enquanto desenvolve a solução do problemas apresentado. Trataremos ainda de algumas situações em que as transformações geométricas, não trabalhadas na escola, sejam utilizadas para solucionar problemas. No caso dos sólidos, a escola apresenta simplesmente, prismas e pirâmides e os sólidos de Platão, outros tipos não são tratados. A possibilidade de fazer truncaturas é uma das vantagens do ambiente dinâmico Cabri 3D, pois permite, por exemplo, a construção de sólidos arquimedianos esquecidos no ensino brasileiro desde o século passado, bem como a determinação de medidas de volumes por decomposição de sólidos, como os de Platão.

Palavras-chave: Cabri 3D. Tecnologia. Situações de ensino. Geometria.

Introdução

Almouloud et al (2004) constataram a partir de uma formação continuada que embora, o conceito de distância faça parte do currículo desde as séries iniciais, os professores apresentam dificuldades que se originam pela existência de concepções não estáveis a respeito de linha reta, perpendicularismo e altura, que interferem diretamente na construção do conceito de distância. Além disso, parecem ter mais facilidade em lidar com situações concretas do que com situações que envolvem processos, mais abstratos, o que dificulta a condução dos alunos a um pensamento, mais genérico, mais formal ou mais abstrato. Por outro lado, Manrique, Silva e Almouloud (2002) afirmam que as tecnologias contribuem para a construção de conhecimentos, pois auxiliam na visualização e percepção de propriedades de objetos geométricos e observam que a maioria dos professores, em um grupo em formação continuada, por não terem acesso a uma formação adequada em Geometria, o uso de tecnologias torna-se um problema a mais para resolver.

Uma explicação talvez esteja no relatório de Gatti e Barreto (2009) que, a partir do Censo Escolar de 2006, fizeram um balanço da situação de formação de professores para a educação Básica no Brasil e constataram que dos 10,4% de horas dedicadas aos conhecimentos específicos para a docência nos currículos de formação inicial apenas 2,1% (p. 146) referem-se às tecnologias e ainda que os saberes relacionados à esse assunto no ensino estão praticamente ausentes (p.154).

Esses dados nos conduziram a investir em formação continuada, no sentido de complementar a formação e instrumentar o professor para que ele utilize tecnologias para o ensino, principalmente, de Geometria. Nosso grupo de pesquisa[1], tem

[1] PEA-TIC – Processo de Ensino e Aprendizagem de Geometria em Ambientes Computacionais. Projeto de pesquisa financiado pelo CNPq e coordenado pelo Prof. Saddo Ag Almouloud.

como objetivo buscar caminhos de formação continuada de professores e, em pesquisa, ainda em andamento, constatamos que nenhum deles já trabalhou com tecnologia com seus alunos. Por outro lado, em nossa vivência com professores do Ensino Médio (15 a 17 anos) percebemos que o trabalho com a geometria espacial acontece de forma bastante precária baseada em sólidos como prismas e pirâmides, às vezes a esfera, mas totalmente voltado para a métrica com a disponibilização de fórmulas. Os poliedros de Platão ou os poliedros regulares são apenas definidos para que os alunos memorizem que "todo poliedro regular é poliedro de Platão." Eventualmente, entregam a planificação de alguma superfície para que os alunos construam um modelo em cartão.

Dessa forma, temos tentado mostrar o *Cabri-3D* como ferramenta que auxilia o ensino e a aprendizagem de geometria. Em termos de pesquisas, temos resultados em Ferraz (2010) que utilizou o programa em uma formação de professores para entendessem o Princípio de Cavalieri e obtivessem fórmulas para o cálculo da medida do volume de prismas e pirâmides. Em suas considerações contata que esses professores conseguiram reconstruir vários conhecimentos a respeito desses sólidos, inclusive justificar suas fórmulas para o cálculo de volumes. Em uma segunda pesquisa surgiu o interesse pelos sólidos arquimedianos. Almeida (2010) iniciou o estudo desses poliedros e constatou que esse conteúdo já fez parte do Ensino Básico na disciplina de Desenho e que desapareceu completamente, quando essa disciplina deixou de existir para dar lugar à Educação Artística. Baseando-se na Problemática Ecológica de Chevallard conjecturou que o *Cabri-3D* pudesse ser o ambiente para retomar o estudo desses sólidos por favorecer a representação de figuras espaciais, como também sua manipulação direta, possibilitaria a exploração de conjecturas. Assim, a partir de um estudo histórico encontrou, no Renascimento, as truncaturas de sólidos platônicos de Piero della Francesca (1412-1492) e nele se baseou para construir no *Cabri-3D* alguns dos sólidos arquimedianos. Atualmente, baseado nesses estudos, estamos desenvolvendo atividades para levar o trabalho com esses sólidos para professores. São algumas dessas ideias que apresentaremos neste trabalho, além de tratar de outros conteúdos, mesmo que rapidamente, para melhor mostrar a compreensão de situações-problemas para o ensino de Geometria utilizando o *Cabri-3D*.

As situações problemas e o Cabri 3D

Entendemos que para o aluno aprender temos que produzir um meio, de acordo com Brousseau (1986) que lhe ofereça certas dificuldades, contradições e desequilíbrio a fim de que a adaptação do aluno o conduza a produzir novas respostas às questões apresentadas, o que mostra a aprendizagem. Nesse sentido, o professor deve criar e organizar o meio em que as atividades de ensino serão desenvolvidas para provocar a aprendizagem. Dessa forma, devemos desenvolver situações em que o problema matemático seja escolhido no sentido de conduzir o aluno a agir, falar, refletir e evoluir por conta própria, no sentido de produzir conhecimentos. O professor, assim, deve assumir o papel de mediador criando as condições para que o aluno seja o principal ator na construção de seus conhecimentos. Nesse sentido, entenderemos uma situação problema como a escolha de questões abertas ou fechadas em uma situação que envolva um campo de problemas apresentados em um ou vários campos de conhecimentos matemáticos. Sua função principal é a utilização implícita e depois explícita de novas ferramentas matemáticas por meio das questões que o próprio aluno assume quando busca as respostas. Além disso, os alunos devem compreender facilmente o que for dado, poder explorar o problema com os conhecimentos que dispõem embora sejam insuficientes para a resolução imediata e perceber que existe uma resposta possível.

Outro ponto que deve ser considerado na construção dessas situações problemas é o registro de representação que será utilizado, os tratamentos são possíveis e ainda se a conversão para um outro registro poderá ocorrer ou não. Para Duval (2011, p. 84) "a Matemática é o único domínio em que o progresso dos conhecimentos está estreitamente ligado à invenção de novos sistemas semióticos." Como trataremos de construção de figuras geométricas, principalmente, o autor afirma que a construção de figuras por instrumento ou softwares, dá maior confiabilidade e objetividade porque permitem verificações e observações, que são atividades em que "ver" é importante. Acrescenta que o ensino deve assumir que as figuras formam um registro de representação semiótico específico em que é preciso descrever as operações puramente figurais que permitirão utilizar uma propriedade matemática e ainda transformar qualquer figura em outra. Para o autor:

> As figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou a unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclui a possibilidade de reconhecer outras. Em outras palavras para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada. (Ibid, p. 86).

Quanto à geometria espacial, o autor afirma que há necessidade do olhar que permite ver a forma 2D (duas dimensões) obtida pela intersecção de um sólido por um plano qualquer do espaço. Nesse sentido entendemos que o *Cabri-3D* possibilita a manipulação do plano de base que permite olhar o objeto construído de vários pontos de vista e ainda, nos trabalhos com truncatura, a determinação de pontos em arestas pela visualização de arestas e pontos e ainda a identificação de polígonos quando se corta o objeto por um plano. Essas ações permitirão que o objeto possa ser descontruído dimensionalmente para que se possa "ver geometricamente".

Segundo Duval (1999) a visão consiste em apreender simultaneamente diversos objetos e permite uma apreensão completa do objeto imediatamente, mas é a visualização, enquanto atividade cognitiva, que permitirá ver ao olhar, para poder observar e compreender o que está representado realmente. Flores (2007) atribui à geometria uma atividade do olhar um tanto complexa, porque envolve elementos que não estão relacionados, exclusivamente, às figuras em si e nem a capacidade visual de cada um.

Para Laborde (2007), a tecnologia tem a capacidade de oferecer diversas representações para os objetos matemáticos e por meio de tecnologias digitais, novos sistemas são introduzidos ampliando a capacidade de manipulação e processamento. Cita a capacidade de arrastar nos ambientes de Geometria dinâmica como um exemplo na mudança do tipo de representações que podem ser oferecidos para a atividade matemática e para a construção de significados para seus objetos.

Assim, entendemos que o ambiente *Cabri-3D* poderia produzir as representações necessárias para desenvolver a visualização para compreender e resolver problemas em geometria espacial e, além disso, poderia ser o habitat para o estudo dos sólidos arquimedianos fazendo-os reviver no sistema educativo. No que segue, apresentaremos algumas situações problemas que poderiam ser desenvolvidas com o *Cabri-3D*.

Situação 1: Caracterizando poliedros

A1) Construa utilizando o *Cabri-3D* um dodecaedro e caracterize esse poliedro.

A2) Considere os pontos médios das arestas desse e por um plano que passa pelos pontos médios de três arestas consecutivas, faça o corte do poliedro determinado a partir de cada um dos vértices.

A3) O corte realizado em torno de um vértice acrescenta quantos vértices no novo poliedro?

A4) Caracterize o novo poliedro.

Nesta situação o professor apresenta aos alunos um sólido arquimediano e pode solicitar que pesquisem a respeito. Os alunos, na situação, percebem que o dodecaedro possui 30 arestas, 20 vértices e 12 faces pentagonais (pentágonos regulares) e que o **icosidodecaedro** possui vinte faces triangulares e doze faces pentagonais regulares e ainda tem 60 arestas comuns a um triângulo e a um pentágono, tem ainda 30 vértices comuns a dois triângulos e dois pentágonos, a figura 8 mostra as duas construções solicitadas. Os alunos podem movimentar o plano de base para observar a figura de vários pontos de vista e poder determinar os pontos, e ainda, utilizar cores para ajudar a contagem.

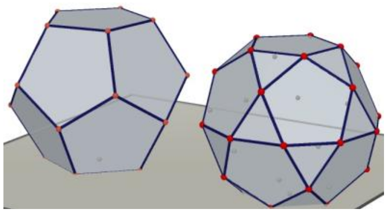


Figura 1: Representação do dodecaedro e do icosidodecaedro

Situação 2: construção de um octaedro e de um cuboctaedro a partir de um cubo e desenvolvimento de fórmulas para o volume[2]

Em uma análise prévia devemos buscar o que é um cuboctaedro e como pode ser construído. Esse poliedro é um dos treze sólidos arquimedianos, mostrados na figura 2 e um dos métodos de construção é por truncaturas. Existem dois tipos de truncaturas[3]: no primeiro o corte se realiza por planos que passam pelos pontos médios das arestas do poliedro platônico de partida, que concorrem em um vértice; no segundo o corte se realiza por planos determinados por pontos que estão a uma distância conveniente de cada vértice do poliedro platônico de partida (truncaturas diretas). Esta distância deve permitir que o resultado dos cortes seja um polígono regular.

Dos treze sólidos, sete deles podem ser obtidos a partir dessas técnicas. Ou seja o cuboctaedro e o icosidodecaedro podem ser obtidos a partir de truncaturas do tipo 1, já o tetraedro truncado, o cubo truncado, o octaedro truncado, o dodecaedro truncado e o icosaedro truncado são obtidos por truncaturas do tipo 2.

---

[2] Neste momento estamos na fase de elaboração de situações que tratam dos sólidos arquimedianos para trabalhar com professores do Ensino Básico.

[3] s.f. Ato ou efeito de truncar. Mineralogia Substituição de uma aresta por uma faceta, num cristal. (Sin.: troncatura.)

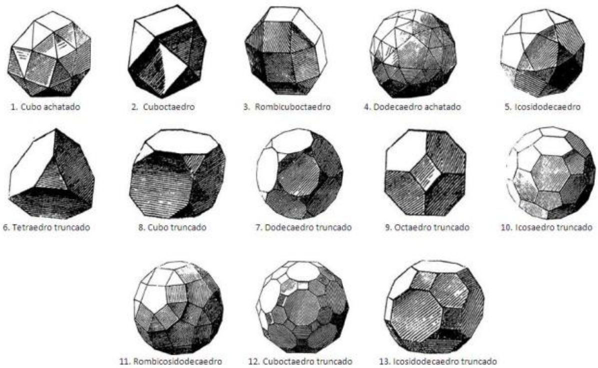


Figura 2: Os treze sólidos arquimedianos

Assim dependendo da quantidade de vértices que concorrem em um vértice podemos obter polígonos diferentes. Por exemplo, a truncatura feita a partir de um vértice de um tetraedro ou de um cubo obtemos um triângulo; se for um octaedro obteremos um quadrilátero e no caso de um icosaedro obteremos um pentágono, como mostra a figura 3. Para tais atividades temos que determinar os pontos na aresta e determinar o plano que passa por três desses pontos.

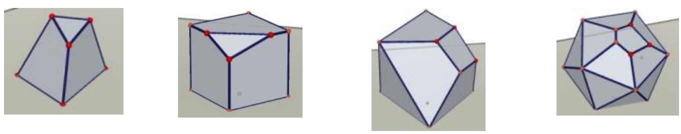


Figura 3: Polígonos obtidos pela operação de truncatura em um poliedro.

Outros quatro sólidos arquimedianos, cuboctaedro truncado, rombicuboctaedro, icosidodecaedro truncado e rombicosidodecaedro são obtidos por uma truncatura a partir de um sólido platônico para se obter um sólido intermediário e a seguir, por nova truncatura, (truncaturas modificadas). Os dois faltantes, cubo achatado e dodecaedro achatado são obtidos por uma operação que, de acordo com Veloso (1998), consiste em afastar todas as faces de um poliedro platônico, girá-las 45° e preencher os espaços vazios resultantes com triângulos.

A situação

A1) Construir utilizando o *Cabri-3D* um cubo.

A2) A partir desse cubo construa um octaedro. Para isso considere apenas a superfície do cubo (altere seu estilo).
Para realizar as duas primeiras atividades o aluno deve construir um cubo utilizando o *Cabri-3D* e saber que um octaedro pode ser obtido a partir do ponto de encontro das diagonais de cada face do cubo (figura 4). De acordo com Duval estamos desenvolvendo visualização na medida em que temos que ver além do que enxergamos, isto é, a princípio enxergamos um cubo, mas passamos a ver quadrados, arestas e pontos nessas arestas.

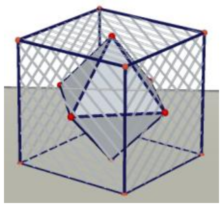


Figura 4: Octaedro inscrito em uma superfície cúbica

A3) Desenvolva uma fórmula para determinar o volume desse octaedro em função da medida *a* da aresta do cubo.

A4) E para um icosaedro qualquer de aresta *x*, construído sem a ajuda do cubo, como ficaria essa fórmula?

Na atividade 3 o aluno pode fazer construções auxiliares como planos e polígonos para buscar uma solução para o problema. Pode, por exemplo, descobrir que em cada quarto do cubo existem dois prismas, cada um com três tetraedros de mesmo volume, sendo que um deles faz parte do icosaedro e representa um oitavo de seu volume. E concluir que o cubo tem 48 tetraedros de mesmo volume e que 8 deles formam o octaedro 8, logo o volume do octaedro será dado por — ou seja, —. Outras soluções poderiam ser encontradas em uma sala

de aula. A atividade seguinte solicita a generalização dessa fórmula, ou seja, reconstruí-la para um octaedro qualquer. Uma solução seria perceber que a aresta do octaedro mede , pois é a diagonal de um quadrado de lado e buscar o valor de x em função de a, isto é, que substituído na fórmula obtida anteriormente nos dá o volume: .
A resolução destas atividades só é possível com a conversão do registro figural para o registro algébrico. O professor pode solicitar aos alunos que verifiquem se a fórmula funciona utilizando a ferramenta medida de volume e a calculadora do *Cabri*, esclarecendo que esse procedimento não demonstra formalmente a veracidade da fórmula encontrada.

A5) Determine os pontos médios de três das arestas do icosaedro em torno de um vértice. Determine um plano por esses três pontos. Recorte o poliedro determinado a partir desse vértice, para isso clique no plano de corte e no poliedro com o vértice. Esconda o plano.

A6) Faça o mesmo para os outros vértices. O sólido que você obteve é chamado de cuboctaedro.
Nestas atividades o aluno deve obter figuras semelhantes às mostradas na figura 5. Observe que parte do octaedro desapareceu, mas utilizando a ferramenta poliedro convexo você pode reconstruí-lo a partir de seus vértices.

A7) Observe as arestas do cuboctaedro e desenvolva uma fórmula para determinar o volume desse cuboctaedro em função de *a.* Relacione o volume do octaedro com o do cuboctaedro.

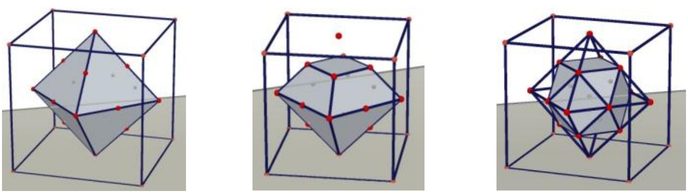


Figura 5: Processo de construção do cuboctaedro por truncatura

A8) E para um cuboctaedro qualquer de aresta medindo *x*, como ficaria a fórmula para o volume?

Nestas atividades os alunos devem levantar a hipótese de que o octaedro é regular (ou mostrar) e que a medidas de cada aresta é porque é a diagonal de um quadrado de lado ou ainda observando o paralelismo na face do octaedro. Da mesma maneira que fizeram em atividades anteriores concluir que o volume do cuboctaedro é: ou ainda que ou seja, o cuboctaedro tem cinco oitavos do volume do octaedro. A generalização será obtida observando que ou seja, e que, portanto, a medida do volume de um cuboctaedro qualquer pode ser dada por .

A9) O cuboctaedro pode ser obtido a partir de cortes nos pontos médios das arestas de um cubo. Construa-o e caracterize esse poliedro.

Nesta atividade os alunos obterão a figura 6 e poderá observar que o cuboctaedro tem 14 faces sendo 8 faces triangulares (triângulos equiláteros) e 6 faces quadradas.

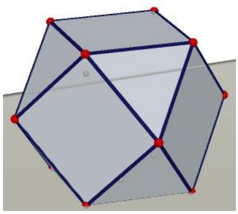


Figura 6: Cuboctaedro obtido a partir de um cubo

A partir dessas duas situações o professor pode solicitar aos alunos que abram o poliedro utilizando o *Cabri-3D* e que construam um modelo para esse sólido em cartão, ou ainda dar essas situações como um projeto para ser desenvolvido em grupos e apresentado como um seminário, o que seria excelente para a formação inicial de professores, por exemplo.

Situação 3: Volume de um icosaedro regular

Descreva um processo para desenvolver uma fórmula que determine o volume do icosaedro regular.

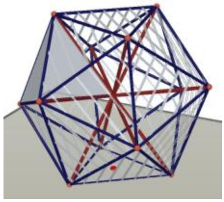


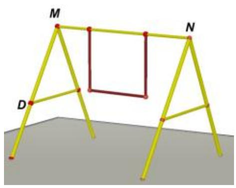
Figura 7: Icosaedro regular

Esta situação foi desenvolvida com alunos do Ensino Médio (POSSANI, 2012) e, embora não tivessem todos os conhecimentos prévios necessários para chegar à solução, conseguiram obtê-la com a ajuda do pesquisador a partir da decomposição do icosaedro regular em 20 pirâmides.

Situação 4: Geometria das Transformações

Salazar (2009) mostrou que é possível trabalhar com as transformações geométricas no Cabri 3D, com alunos do Ensino Médio da rede particular.

A1) Crie um balanço com seu suporte, conforme figura abaixo.[4]



A2) Crie a sombra do balanço anterior. Escolha uma direção qualquer.

Esta é uma situação em que os alunos foram instrumentados com algumas ferramentas e recursos do Cabri que possibilitaram

[4] Atividade adaptada de CABRILOG www.cabri.com/download-cabri-3d.html

sua utilização na resolução de vários problemas como os dessas atividades.

Situação 5: atividades de manipulação

Em caso de cursos a distância de Matemática, como o que coordenamos atualmente, tivemos que substituir as atividades diretas com o *Cabri-3D* por situações de manipulação utilizando o código "html" e o *plug-in*. Nesse caso, o professor constrói a figura e faz questões que se baseiam na manipulação direta.

A-- Geometria Espacial: Movimente os vetores que tem a mesma cor do tetraedro para arrastá-los para o interior da estrutura do prisma (figura 9). O que você pode concluir a respeito dos volumes do prisma e dos tetraedros?
O objetivo é que observem a trissecção do prisma e que os três tetraedros têm mesmo volume.

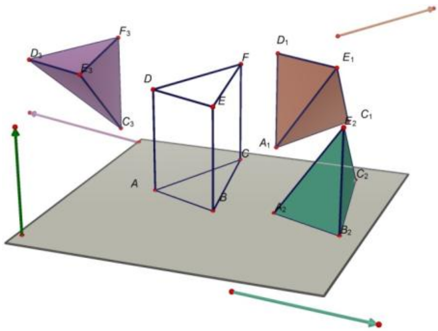


Figura 9: Trissecção do prisma

Considerações finais

Estas situações nos mostram que o Cabri 3D é um ambiente favorável para o estudo de sólidos que não fazem parte do currículo de Geometria espacial. Tratamos aqui de sólidos arquimedianos, mas não há limite para os tipos de sólidos que podem ser tratados. No Ensino Fundamental as truncaturas poderiam ser utilizadas para obter sólidos mais simples, para que os alunos busquem a fórmula do volume a partir da decomposição do sólido inicial. Muitos dos conteúdos do Ensino

Básico poderiam ter o Cabri 3D como ferramenta para a construção de aprendizagens, desde que os professores estivessem formados e instrumentados para construírem e analisarem, prévia e posteriormente, situações adequadas para esse fim.

Referências

Almeida, T.C.S. (2010). Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Almouloud, S.A. et al. (2004). A geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação.* n. 27. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>.

Brousseau, G. (1986) Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches em Didactique de Mathématiques*. 7(2). 33-115.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Tradução: Marlene Alves Dias. Proem Editora, São Paulo, Brasil.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cuernavaca, Morelos, Mexico. 1, 3-26.

Ferraz, M. C. (2010). Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, disponível em:

http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/FERRAZ_marcelo_cardoso.html

Gatti, B. A. & Barreto, E. S.S. (2009). (coord.). *Professores do Brasil: impasses e desafios.* Brasília: UNESCO.

Laborde, C. (2007). The role and uses of technologies in Mathematics Classrooms: between challenge and Modus Vivendi. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*

Manrique, A. L.; Silva, M. J. F. & Almouloud, S. A.. (2002). Conceitos Geométricos e Formação de Professores do Ensino Fundamental. 25ª Reunião da ANPED – Caxambu, MG.

Possani, J. F. (2012, no prelo). Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Salazar, J.V.F. (2009). Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. Tese de doutorado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

❖❖❖

Une analyse didactique de différents types d'interactivité rendus posibles par les technologies Cabri

Colette Laborde
Cabrilog, Grenoble, France
colette.laborde@cabri.com

Abstract

It is commonly accepted that an important feature of technology and technology based tasks lies in their interactivity and in the possibility of providing feedback to students' actions. The talk will adress the notion of interactivity and feedback from a didactic perspective. In particular, the design of tasks based on dynamic mathematics environments and of different types of feedback provided to students will be analyzed. It will be shown that the degree of interactivity may greatly vary and that interactivity affects many aspects of the use of such environments. The discussion will be illustrated by the various Cabri technologies.

Mots-clés: Interactivité, rétroactions, problème, mathématiques dynamiques

1. Le cycle de l'interactivité

1.1. La roue manquante

Partons d'un exemple d'activité avec Cabri Elem, déjà bien connu. Il s'agit de la construction de la roue manquante d'une voiture, activité conçue par H.C. Argaud et C. Fini (Restrepo, 2008, p.60) avec Cabri II plus et qui est maintenant transposée dans Cabri Elem.

La première page du cahier montre une voiture avec ses roues, que les élèves peuvent faire avancer sur une route en pente en la prenant directement avec la souris et en la déplaçant. Il n'est nul besoin de dire aux élèves qu'ils peuvent déplacer la voiture, ils le font très rapidement après ouverture du fichier (Fig.1). Page suivante, la même voiture apparaît mais une roue manque

(Fig.2). La tâche de l'élève est de remettre une roue à la voiture, en utilisant les outils disponibles (cercle, segment, milieu).

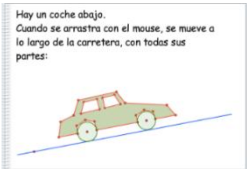


Fig. 1: La voiture complète

Fig. 2: Une roue manque

La stratégie la plus fréquente chez les élèves de 8 à 12 ans est d'utiliser l'outil « Cercle » en raison de la forme circulaire présente sur l'icône de l'outil, de créer un cercle en dehors de la voiture, de taille estimée à l'œil identique à celle de l'autre roue, puis de déplacer le cercle à la place de la roue et d'ajuster éventuellement sa taille. L'élève déplace alors la voiture qui bouge mais la roue reste immobile (Fig. 3), en général au grand amusement de l'élève. L'élève interprète cette rétroaction en termes du contexte de la voiture: «Bien sûr, je n'ai pas attaché la roue à la voiture».

Il passe donc à la page suivante du cahier où figurent à nouveau la voiture sans la roue et les mêmes outils. La stratégie la plus fréquente des élèves consiste alors à vouloir attacher à la voiture le cercle qu'ils créent. Pour cela, l'élève place au jugé un premier point qui sera le centre du cercle et clique sur l'un des points d'attache de la roue. Il ajuste ensuite le cercle en déplaçant son centre pour qu'il passe par l'autre point d'attache. Il déplace alors la voiture et à son grand étonnement, le cercle s'enfle ou diminue de taille suivant le sens du déplacement de la voiture (Fig.4).

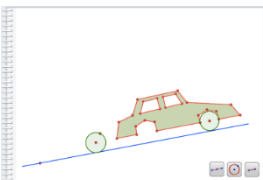


Fig. 3: La roue non attachée

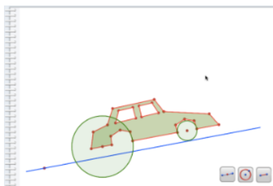


Fig. 4: La roue qui enfle ou diminue

En général, les élèves ne savent pas interpréter cette rétroaction en termes d'usage des outils de géométrie et sont bloqués. Dans le déplacement de la voiture, le centre du cercle qui a été seulement placé sur l'écran et non construit à partir d'autres points ne bouge pas puisqu'il ne dépend d'aucun point. Le point d'attache en revanche suit la voiture dans son déplacement puisqu'il a été construit en lien avec les éléments de la voiture. Le rayon du cercle varie alors en fonction du déplacement du point d'attache. Les élèves ne savent pas en général développer une telle analyse et l'intervention de l'enseignant est nécessaire.

L'enseignant peut débloquer les élèves en reformulant le problème en termes d'usage de l'outil «Cercle», empêchant leur frustration et centrant leur attention par un processus analogue à celui, qualifié par Wood et ses collègues, de signalisation des caractéristiques déterminantes («marking critical features», Wood et al. 1976). L'enseignant fait remarquer que pour créer un cercle dans Cabri, il faut cliquer sur deux points, le centre et un point de la circonférence, le cercle est alors créé. Mais les élèves voudraient bien pouvoir cliquer sur 3 points, le centre et les deux points d'attache. Or, comme le fait remarquer l'enseignant, dès que l'on déplace la voiture, le cercle ne passe plus par le second point d'attache parce qu'on n'a pas pu cliquer sur ce point pour signifier qu'il appartient bien au cercle. Le problème est donc de construire le centre du cercle de façon à être sûr que le cercle passe toujours par le deuxième point d'attache, alors qu'on n'a cliqué que sur l'un des deux points. La solution réside dans la construction du centre comme milieu des deux points d'attache.

Dans cet exemple, on peut observer comment la rétroaction de l'absence de déplacement de la roue simplement posée et non liée à la voiture conduit les élèves à changer leur stratégie de construction de cette roue manquante. C'est ce qui est schématisé dans le paragraphe suivant par le cycle de l'interactivité.

1.2. Le cycle de l'interactivité

Nous considérons qu'il y a interactivité quand un cycle d'actions et de rétroactions se produit entre l'environnement informatique dans lequel est donnée la tâche et l'élève au cours de la résolution de la tâche. L'élève agit dans l'environnement, reçoit une ou des rétroactions qu'il interprète, il tire des inférences pour prendre des décisions sur les nouvelles actions à réaliser dans l'environnement pour obtenir le comportement attendu de la voiture (cf. Fig.5).

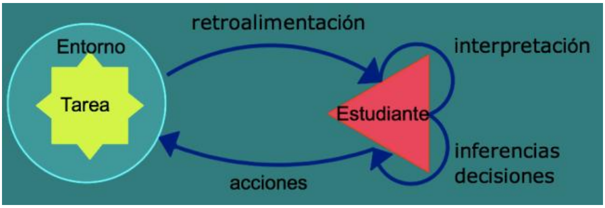


Fig. 5: Le cycle de l'interactivité

Pour que ce cycle puisse fonctionner, il faut que l'élève puisse agir sur l'environnement et qu'il reçoive des rétroactions visibles de l'environnement. Il faut donc que les élèves disposent d'outils dans l'environnement et que l'environnement dispose de moyens d'expression des rétroactions. Le moyen d'expression de Cabri est ici le déplacement qui conserve toutes les propriétés géométriques données à la construction et celles qui en découlent.

Mais il faut aussi comme on le voit après la rétroaction à la seconde construction que l'élève puisse interpréter la rétroaction. Il a donc besoin de certaines connaissances sur l'environnement et sur les mathématiques pour se livrer à une interprétation et en tirer des conséquences sur les nouvelles actions à réaliser pour construire une roue qui reste attachée à la voiture. C'est dans ce deuxième cycle qu'en général les élèves n'arrivent pas à mettre en œuvre dans l'environnement les connaissances mathématiques sur le centre du cercle et que l'intervention de l'enseignant est nécessaire, mise en œuvre qui requiert la coordination de connaissances mathématiques et de connaissances sur l'usage des outils.

Ces différentes composantes du cycle de l'interactivité sont résumées dans le schéma suivant (Fig. 6).

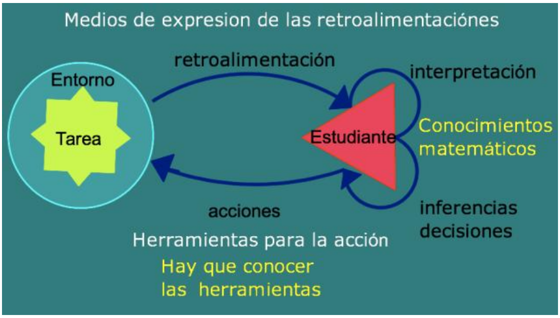


Fig. 6: Sources des interactions dans le cycle de l'interactivité

Cette interprétation en termes de cycle est fortement inspirée de la notion de milieu de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) qui modélise dans la situation le système antagoniste de l'élève sur lequel ce dernier peut agir et dont il tire des informations de par ses rétroactions.

Elle est aussi très proche de la notion de «co-action» développée par Moreno Armella et Hegedus (2009) justement pour l'usage de technologies dynamiques d'apprentissage : « [The notion of co-action] describes how the user of a dynamic environment guides the actions upon the environment and is guided by the environment as a fluid activity. [...] The student and the medium re-act to each other and the iteration of this process is what we call co-action between the student and the medium.»
Cette interprétation est aussi fortement inspirée de la notion de schème (Vergnaud, 1990) en ce qu'elle modélise le fonctionnement du sujet cognitif en situation problème.

Un schème est une organisation invariante de conduites pour une classe de situations données, une totalité dynamique fonctionnelle dépendant d'une intention, d'un but lié au cours temporel de l'action, autour des composants

- Anticipations du but et sous buts à atteindre
- Règles d'action en situation, de prise d'information et de contrôle
- Invariants opératoires qui constituent la conceptualisation nécessaire à l'action
- Possibilités d'inférence en situation

Les invariants permettent de sélectionner les traits jugés pertinents de la situation et de faire des inférences qui permettent d'anticiper les buts et sous-buts à atteindre, et de décider des règles d'action en situation. Les connaissances mathématiques et sur les outils constituent ces invariants. Dans l'exemple, l'une des inférences faites par les élèves est que si la roue ne suit pas la voiture, c'est qu'elle n'est pas liée à la voiture, inférence utilisant des invariants opératoires issus du quotidien et non de connaissances mathématiques. Les élèves utilisent ensuite la règle d'action selon laquelle dans Cabri, pour lier le cercle à la voiture, il faut cliquer sur le point d'attache. L'intervention de l'enseignant demande en un second temps aux élèves d'utiliser des invariants relevant des mathématiques: le centre du cercle est le milieu de deux points extrémités d'un diamètre. Elle demande aussi de savoir mettre en œuvre cette connaissance dans l'environnement en construisant d'abord le centre comme milieu de deux points puis le cercle qui représente la roue.

En la siguiente, la exposición ilustra la manera como la tecnología Cabri Elem proporciona herramientas y medios de expresión que pueden ser utilizados para crear interactividad.
Los ejemplos han sido tomados de cuadernos de actividades elaborados por varios profesores en diferentes países.

1.3. La tecnología Cabri Elem

Cabri Elem es una tecnología Cabri con dos ambientes:

- Cabri Elem Creator, para los autores de los recursos
- Cabri Elem Player para los alumnos y profesores cuando utilizan los recursos

Cabri Elem Creator permite crear cuadernos de actividades interactivas en toda la matemática de la escuela primaria y del comienzo de la escuela secundaria.

Cabri Elem Creator y Cabri Elem Player son dos ambientes de manipulación directa. No hay lenguaje de programación en el Creator para los autores, hay solamente una programación visual: es suficiente seleccionar con un clic, desplazar representaciones de objetos teóricos y reales.

2. Interactivité des objets de l'environnement

2.1. Dans la donnée du problème

Los estudiantes experimentan la tarea como un verdadero problema si se enfrentan a restricciones o incidentes visibles para ellos que les impide resolver la tarea de manera habitual. Nous renvoyons ici à la notion de situation adidactique de Brousseau (1998).

Ce sont les fonctionnalités du logiciel qui permettent de créer ces limitations. Donnons l'exemple du cahier "Coccinelle" destiné à des élèves de première année d'école élémentaire (6-7 ans), cahier de la collection « 1 2 3… Cabri » (www.cabri.com). Dans la première page, l'élève doit mettre des gommettes sur les taches de la coccinelle. Il s'agit d'une tâche mettant en œuvre perception et motricité et ne mettant pas en jeu de mathématiques.

Dans la seconde page, on demande à l'élève de préparer exactement ce qu'il faut de gommettes dans une boîte pour couvrir toutes les taches de la coccinelle et que toutes les gommettes de la boîte soient bien utilisées (Fig.7). Dans cette page, il n'est plus possible de mettre directement les gommettes sur les taches de la coccinelle: les gommettes sont rejetées par la coccinelle (Fig.8). Le logiciel permet en effet à la coccinelle de reconnaître les gommettes et de les rejeter.

Fig. 7: La tâche de préparer les gommettes

Fig. 8: Une gommette rejetée

C'est dans cette limitation d'action que le problème mathématique trouve sa source. L'élève doit élaborer un moyen pour mettre un nombre de gommettes égal à celui des taches de la coccinelle. Plusieurs stratégies différentes peuvent conduire à la solution:

- Une stratégie visant à créer une collection de gommettes équipotente à la collection de taches en reproduisant par exemple la configuration des taches de la coccinelle;
- Une stratégie de mise des gommettes une par une dans la boîte, en marquant à chaque fois avec le crayon une tache de la coccinelle
- Ou encore des stratégies de comptage des taches.

Les outils disponibles, crayon, curseur, bande numérique sont évidemment essentiels dans la mise au point de stratégies. L'élève peut dans la page qui suit vérifier si la collection de gommettes préparées convient, car cette fois il peut prendre les gommettes de la boîte et les placer sur les taches de la coccinelle.

Comme on le voit, la source du problème et l'interactivité qui s'établit entre les outils du logiciel et les actions de l'élève résident dans la limitation de départ. Une action de l'élève rendue impossible génère un problème mathématique à résoudre pour dépasser cette limitation.

2.2. Le jeu sur les limitations

Des problèmes mathématiques peuvent donc être posés aux élèves en créant des limitations dans leurs actions. Ce principe peut être utilisé pleinement dans un cahier de plusieurs pages, où les limitations peuvent varier selon les pages, créant ainsi une progression de différents problèmes.

Le cahier « La grenouille et le cabri » de la collection « 1 2 3… Cabri » illustre bien une telle progression dans les limitations. Dans les premières pages la grenouille qui peut être pilotée à l'aide de flèches doit rejoindre le cabri sur un quadrillage avec des obstacles visibles (Fig.9). Plus loin dans le cahier, un nuage masque une partie du quadrillage et des obstacles sauf pendant 8 secondes au début de l'activité (Fig. 10).

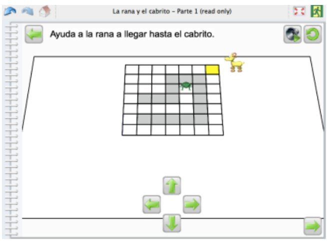


Fig. 9: On pilote la grenouille en voyant les obstacles

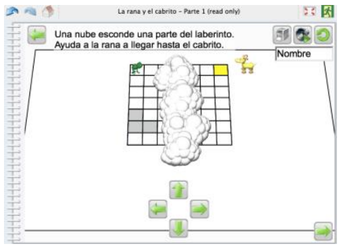


Fig. 10: On ne peut voir les Obstacles 8s

Chaque fois que l'élève se trompe, il peut recommencer l'activité et voir ainsi à nouveau le quadrillage et les obstacles pendant un temps limité. La limitation apportée par le nuage oblige les élèves, soit à mémoriser rapidement la place des obstacles (ce qui est possible dans les premières pages), soit à se créer un quadrillage sur papier avec un codage des cases (par exemple A1, A2,… B1,…) et à y noter les cases portant un obstacle pendant que le nuage n'est pas sur le quadrillage. Notons que la progression dans la difficulté est due à la fois au masquage par le nuage au temps laissé pour voir le quadrillage et à la place plus ou moins complexe des obstacles.

Enfin, dans la dernière page, le nuage ne disparaît jamais. « Problème impossible à résoudre », s'exclament parfois des enseignants découvrant le cahier. Trouver le chemin qui conduit au cabri est tout à fait possible comme dans un labyrinthe réel, mais une démarche au hasard ne permet pas d'y arriver. Il faut élaborer une stratégie systématique d'avancement de la grenouille.

2.3. Placer le problème dans un contexte

Placer les activités dans un contexte familier des élèves ou compréhensible facilement par eux, est un moyen de donner sens à l'activité pour les élèves et de rendre les rétroactions de l'environnement logiciel plus visibles par ces derniers car exprimées dans ce contexte. Ainsi l'invalidation de la création d'un cercle au jugé figurant une roue de voiture est immédiatement perçue par les élèves.

L'environnement Cabri Elem Creator permet aisément de créer des contextes de par la possibilité de représenter des scènes de la réalité en incluant des media, images 2D ou modèles 3D. Cabri Elem Creator permet aussi de représenter les objets mathématiques, nombres, figures de géométrie, expressions etc.

Tous ces objets, mathématiques ou media sont manipulables et réagissent aux actions des élèves. Les objets mathématiques réagissent selon des critères mathématiques. La combinaison de représentations d'objets mathématiques et d'objets réels permet d'inclure des objets mathématiques dans des contextes réels, les mathématiques jouant ainsi un rôle de modélisation du monde qui entoure les élèves. A titre d'exemple, dans le cahier « La roue des 10 », les disques ne tournent que si la somme des points des cartons mis sur le disque est égale à 10 (Fig.11). Si la somme est différente, le disque reste immobile. Autre exemple: Si des livres portant chacun un nombre décimal ont rangés sur une étagère selon l'ordre décimal, tout livre placé par l'élève ne respectant pas cet ordre est éjecté de l'étagère (Fig.12).

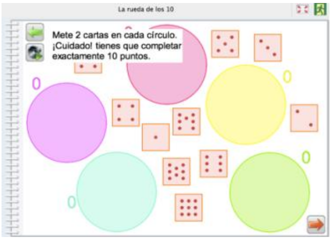


Fig. 11: La roue des 10

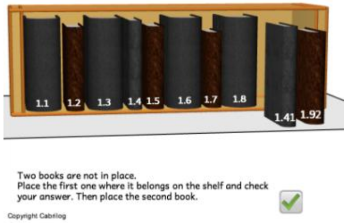


Fig. 12: Les livres sur une tagère

Les rétroactions aux actions et réponses des élèves peuvent ainsi être en termes du contexte et être plus visibles pour les élèves. Donnons un exemple tiré d'un cahier d'une collection en cours dans le canton du Tessin en Suisse (Gruppo Ticino, http://www.e-sco.ch/botteghe/CE/Home.html), créée par des enseignants de ce canton avec Cabri Elem Creator. Il s'agit de créer sur un carré blanc quadrillé une forme verte qui soit telle que l'ensemble des cases restantes blanches constitue une forme superposable à la forme verte, comme dans l'exemple ci-dessous (Fig. 13).

Lorsque les élèves créent une forme verte, ils ont ensuite des outils de Cabri Elem qui leur permettent d'obtenir un distributeur de telles formes. Ils peuvent ainsi obtenir deux formes (Fig. 14) et les placer dans le carré en effectuant un demi-tour (Fig. 15) de l'une d'elles de façon à vérifier si elles s'emboîtent bien pour refaire tout le carré (Fig. 16). L'objectif mathématique du cahier est l'apprentissage du demi-tour (ou symétrie par rapport à un point). Il est ici contextualisé dans un problème de formes qui doivent s'emboîter permettant ainsi des rétroactions immédiatement perceptibles par les élèves et porteuses d'informations.

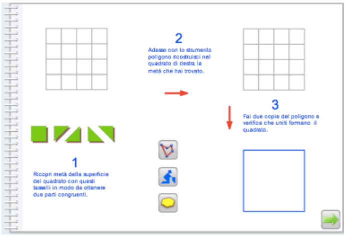


Fig. 13: La tâche de construire une moitié du carré

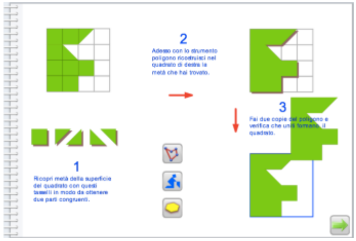


Fig. 14: Création d'une seconde forme identique

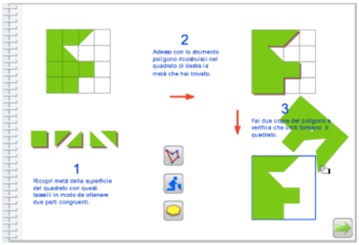


Fig. 15: Demi-tour de la seconde forme

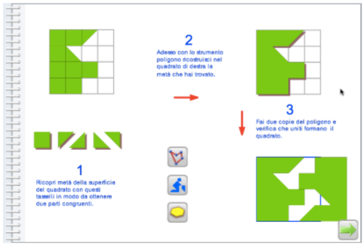


Fig. 16: Les deux formes ne s'emboîtent pas

Si la forme créée ne convient pas, les formes ne s'emboîtent pas (Fig. 16). Il y a conflit entre ce que les élèves attendent et ce qu'ils observent dans le placement des formes. De plus, la juxtaposition des formes permet aux élèves de repérer pourquoi les formes ne se raccordent pas. En particulier le mouvement de demi-tour d'une des formes montre aux élèves que ce qui est en haut dans la forme verte doit être identique à ce qui est en bas dans la partie blanche du quadrillage. Les élèves prennent ainsi conscience de ce que devient une forme dans un demi-tour, ce qui leur permet d'anticiper dans la création de la forme verte qu'une fois la rangée horizontale du haut de la forme verte choisie, la rangée horizontale du bas est déterminée comme complément à la rangée blanche obtenue par demi-tour de la rangée verte du haut.

2.4. Extension de la notion de contexte

La notion de contexte peut être étendue au-delà du contexte réel. Un contexte peut être un contexte interne aux mathématiques, tels un contexte géométrique ou un contexte numérique.

Une source de problèmes est justement constituée par le passage d'un domaine mathématique à un autre. En effet, chaque contexte facilite certains traitements mathématiques et en rendent plus difficile d'autres.

Les contextes numériq3ue et géométrique diffèrent de par les caractéristiques mathématiques qu'ils mettent au premier plan et rendent accessibles. L'écriture numérique d'une fraction comme 2/5 donne sa valeur exacte. Sa représentation géométrique comme une partie d'une barre égale à 1 ne fournit pas sa valeur exacte dans la seule estimation visuelle. En revanche la représentation géométrique de deux fractions sur la même barre permet de les comparer aisément par la perception alors que ce n'est pas toujours immédiat dans le contexte numérique: il n'est pas immédiat de comparer 108/221 et 266/541 sans calculatrice. Ces différences entre contextes mathématiques peuvent être exploitées pour poser des problèmes et fournir des rétroactions visibles aux élèves.

Un cahier de la même collection du Tessin demande aux élèves de délimiter la partie d'une barre égale à une fraction donnée sous forme numérique (Fig.17). L'élève peut ensuite vérifier sa réponse en obtenant l'affichage de la place correcte de la délimitation (Fig. 18). Il peut voir immédiatement si sa réponse est éloignée ou proche de la réponse correcte, si elle est plus grande ou plus petite. La rétroaction du contexte géométrique est porteuse d'informations que l'élève peut analyser.

Fig. 17: Réponse de l'élève

Fig. 18: La solution correcte en jaune

Comme montré Fig. 17 et Fig. 18, un élève représentant la fraction 4/9 par une barre allant au-delà de ½ verra lors de la vérification que sa réponse n'est pas du même côté de ½ que la réponse correcte et sera conduit à se poser la question de la place de la fraction par rapport à ½ pour les fractions suivantes à placer.

3. Interactivité issue de la voix du professeur

Les rétroactions dues aux seuls objets de l'environnement ne permettent pas toujours à l'élève de trouver le chemin vers une réponse correcte. Dans l'exemple de la roue manquante, les élèves sont souvent bloqués après la seconde rétroaction de l'environnement, ils comprennent bien que leur solution n'est pas correcte mais ne savent pas comment la changer pour qu'elle fournisse une réponse correcte, une roue qui reste de taille invariante dans le déplacement. L'intervention de l'enseignant est nécessaire pour débloquer la situation et reformuler différemment le problème sans toutefois donner la solution.

Il a donc été prévu que Cabri Elem Creator permette d'afficher des messages ou des boutons allant à des pages d'aide, soit si les élèves font un grand nombre d'essais donnant lieu à des réponses fausses, soit si un temps assez long se passe sans que l'élève réponde. Il est possible aussi par à une analyse a priori des erreurs possibles des élèves, fondée sur des résultats de recherche et d'expérimentation, de prévoir des messages ou des aides différentes selon le type d'erreur effectué.

La difficulté de création de telles rétroactions exprimant la voix du professeur est d'ordre didactique. Il faut trouver l'aide à donner aux élèves qui leur permette d'aller de l'avant dans l'activité sans anéantir le cœur du problème. En effet, l'élève apprend en construisant des réponses à des problèmes. Lui donner trop d'éléments de solution risque de ne plus lui demander la mise en œuvre de connaissances critiques justement visées par le problème en question.

Chaque activité demande donc une étude a priori de ce qu'on laissera à la charge de l'élève et de ce qu'on lui fournira comme éléments d'information. Quelques principes généraux peuvent certes soutenir les études cas par cas. On peut donner des éléments d'information à l'élève sur ses erreurs sans dire ce qu'elles sont exactement: par exemple donner le nombre d'erreurs faites sans les indiquer de façon précise, indiquer que le nombre trouvé est trop grand ou trop petit ce qui peut conduire l'élève à réfléchir sur les raisons pour cela… On peut ne laisser afficher la correction que pendant le seul appui sur le bouton de vérification, comme dans cette activité de la collection du Tessin (Fig. 19 et Fig.20).

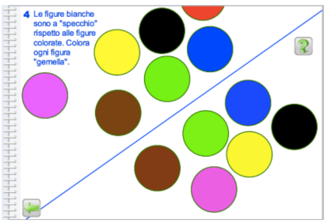


Fig. 19: Une réponse erronée

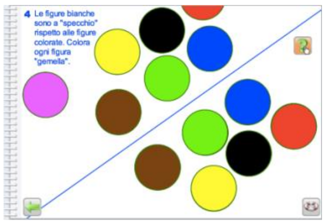


Fig. 20: La correction visible endant l'appui du bouton

Une autre solution constructive pour l'apprentissage consiste à combiner une information à l'élève sur ses erreurs et des moyens d'exploration pour qu'il puisse comprendre où résident ses erreurs et comment construire une réponse correcte. Ce pourrait être le cas dans l'exemple ci-dessus en ajoutant une page accessible après appui sur le bouton de vérification, dans laquelle l'élève peut déplacer les disques et observer le comportement du disque symétrique (Fig. 21).

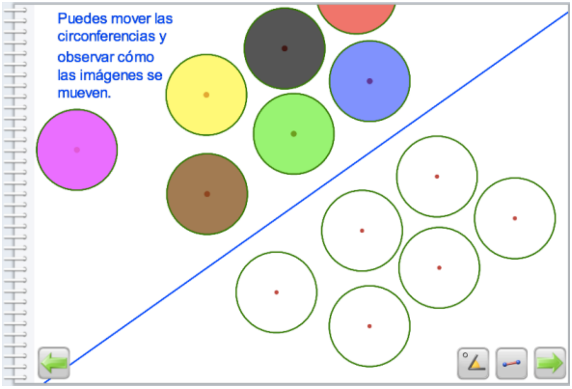


Fig. 21: Une page d'exploration du comportement des symétriques

Il est à noter que l'exploration venant après un problème à résoudre est vécue différemment par l'élève d'une page d'exploration avant confrontation à un problème. En effet, avant tout problème, l'élève ne sait pas tirer parti de l'exploration car il n'a pas d'objectif. Après avoir été confronté à une difficulté, il utilise la page d'exploration avec des questions en tête, comme « Pourquoi le symétrique du disque violet n'est pas là où il croyait ? ». L'exploration intervient comme un étayage face à un problème, au sens de Wood et al. déjà cité plus haut. De façon générale, les rétroactions en termes de voix du professeur se situent dans la « Zone Proximale de développement » au sens de Vygotsky. Elles sont là pour permettre aux élèves d'apprendre suite à une difficulté rencontrée.

4. Conclusion : le cycle de l'interactivité revisité

Deux types de rétroaction ont été présentés, des rétroactions en terme de milieu de situations adidactiques et des rétroactions correspondant à des interventions de l'enseignant. Ce second type peut être vu comme une expansion du milieu au sens de Assude, Mercier et Sensévy (2007). Le milieu est alors envisagé comme un système de contraintes et de ressources matérielles ou symboliques dans lesquelles évoluent le professeur et les élèves. Il nous semble que les ressources informatiques doivent combiner ces deux types de rétroaction si elles veulent pouvoir favoriser des apprentissages. Le cycle de l'interactivité peut donc être revisité en insérant le professeur (Fig. 22).

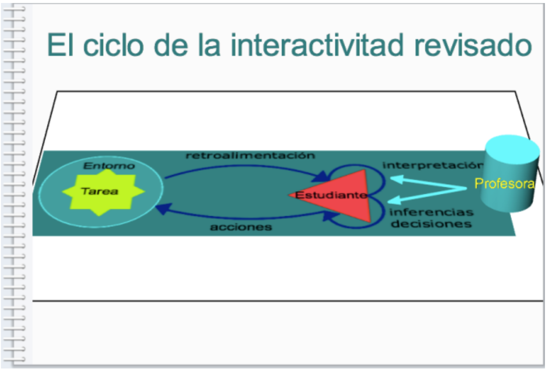


Fig. 22: Le cycle de l'interactivité revisité

La conception de telles ressources n'est pas facile car il faut trouver le degré optimum d'intervention de la voix de l'enseignant comme indiqué plus haut. Si la voix est trop faible, l'élève peut être bloqué, si la voix est trop forte, le professeur tue le cœur du problème et l'élève n'a plus de problème à résoudre. Savoir graduer le bon degré d'intervention de l'enseignant est un terrain d'étude des recherches en didactique.

Les rétroactions qu'elles soient au sens de milieu adidactique ou de son expansion (la voix du professeur) sont objets d'étude de recherches en didactique des mathématiques. Nul doute que la création de ressources informatiques doit tenir compte des résultats de ces recherches et que la conception de logiciels auteurs de ces ressources doit offrir des fonctionnalités qui permettent d'implémenter les résultats des recherches.

Références

Assude, T. Sensevy, G. & Mercier, A. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 27- 2, 221-252.

Brousseau, G. (1998). .
.

L., Moreno Armella; S. Hegedus (2009) Co-action with digital technologies, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Mathematics Education*, 41: 505-519.

A., Restrepo (2008) *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6e*, Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.10, n°2-3

Wood, D. ; Bruner, J ; Ross, G. (1976) The role of tutoring in problem solving, *Journal of Child Psychology and. Psychiatry*, Vol .17, Issue 2, 89-100

❖❖❖

Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that mean? Quelque exemples tirés de Cabri

Jean-Marie Laborde
Cabrilog, France
Jean-Marie.Laborde@cabri.com

Abstrait

S'il est un mot qui a été galvaudé, c'est bien celui d'"interactivité". Par exemple dans de très nombreuses annonces interactivité est quasiment mis pour "digital" dans le sens de "non papier".Pourtant il y a un monde entre simple interactivité de type "j'appuie sur un bouton" (ou plutôt une représentation de bouton) et une authentique "manipulation directe" dans un cadre d'"engagement direct" favorisant une interaction vértiable entre dispositif informatique et utilisateur, pour nous l'élève ou le professeur. Différents exemples dont certains "historiques" et d'autres caractéristiques du développement de Cabri (Cabri I-II, 3D, sur calculatrices ainsi que le nouveau Cabri LM) viendront illustrer ce propos.

Mots-clés: Mathématqiues Dynamiques, Visualisation 2D et 3D, Manipulation Directe d'objets mathématqiues.

Referencias

Douglas Butler, Nicholas Jackiw, Jean-Marie Laborde and Michal Yerushalmy. *Design for transformative practices*. in *Invited Panel at 17th ICMI Study*. [2006]. Hanoi University of Technology, Vietnam.

Jean-Marie Laborde, *Playing in 3 and 4 dimensions: Special session of the Mathematical Colloquium* (for the delivry of Honorary Degree), St Olaf College, Northfield, MN, USA *2009*, dec. 3 [2009]

Schneidermann B. (1983). Direct Manipulation: a step beyond programming languages, *IEEE Computer*, vol. 16, 57-69.

❖❖❖

Utilizar la geometría axiomática para analizar los dibujos en Cabri 3D

Joris Mithalal
IUFM de Paris
Laboratorio de Didáctica André Revuz, Francia
joris.mithalal@paris.iufm.fr

Resumen

La geometría espacial es generalmente un tema muy difícil que enseñar: los alumnos ya no pueden leer informaciones en los dibujos, porque no hay tipo de representación –perspectiva paralela, modelos…– adecuado para resolver problemas de geometría.

Hay dos ventajas con software de geometría dinámica espacial. Primero, las simulaciones informáticas permiten leer más informaciones en los dibujos. Luego, si embargo no se puede leer todos los resultados, y en estos casos el análisis matemático es muy eficiente para tener más informaciones.

Por eso, se puede provocar el uso de geometría axiomática natural (GII) (Houdement, Kuzniak, 2006) por los alumnos con situaciones mucho más simples que en el contexto de la geometría plana. Además, en estos casos hay menos ruptura entre los problemas de geometría natural (GI) y los de geometría axiomática natural, porque GII puede permitir estudiar los dibujos informáticos por si mismo.

Más que estudiar unas situaciones, se tratará en esa conferencia de describir un posible camino entre GI y GII. Utilizaré el trabajo de Duval (2005) para describir precisamente cómo los alumnos pueden utilizar los dibujos, y mostraré que la “déconstruction instrumentale” desempeña un papel muy importante en el proceso de evolución desde GI hasta GII. En efecto la déconstruction instrumentale permite construir dibujos concretos – y por eso responde a problemas de GI – utilizando objetos matemáticas teóricos – que solo se puede concebir con GII. Ejemplos sacados del uso de unas situaciones ilustraron la

importancia de pequeñas variaciones en la deconstruction instrumentale.

Palabras clave: geometría 3D; geometría dinámica; visualización; paradigmas geométricos; Cabri 3D.

Referencias

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10: 5 – 53.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11: 175 – 193.

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

❖❖❖

Cabri: Cálculo y Física

Ruben Sabbadini
Liceo Farnesina, Roma, Italia
rusabba@tin.it

Resumen

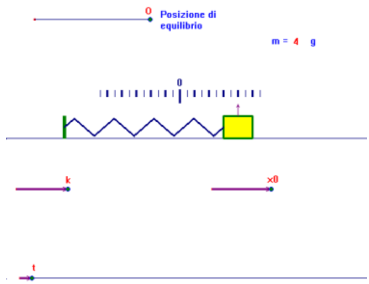
Cabri non è solo geometria, ma anche analisi matematica, calcolo delle probabilità, fisica. Io ho scritto un libro (FisiCabri Principato Milano Italia) con circa 150 applicazioni Cabri (io chiamo così le mie figure dinamiche) che simulano altrettanti fenomeni fisici. E' uno strumento portentoso per la didattica, si possono mostrare cose che una figura, statica, su una pagina di libro non potrebbero far vedere. Ad esempio un'onda dipende da due parametri, spazio e tempo e, in una figura statica, o si mostra la dipendenza dallo spazio o quela dal tempo. In una applicazione Cabri, invece, si vede contemporaneamente la dipendenza dallo spazio, quella dal tempo, l'onda e la particella di materia che si muove di moto periodico.

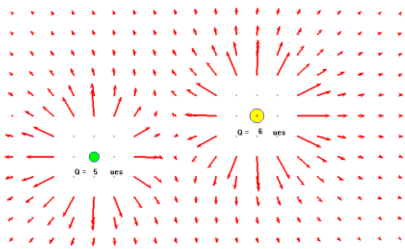
Si può facilmente disegnare una funzione in Cabri, con lo strumento "Trasporto di misura", lo insegnerò nel taller. Si può facilmente calcolare la derivata e l'integrale della funzione e se ne possono tracciare i grafici.

Si possono dimostrare graficamente, e in maniera didatticamente efficace, i teoremi fondamentali del Calcolo delle Probabilità: il teorema di De Moivre- Laplace e la Legge dei grandi numeri.

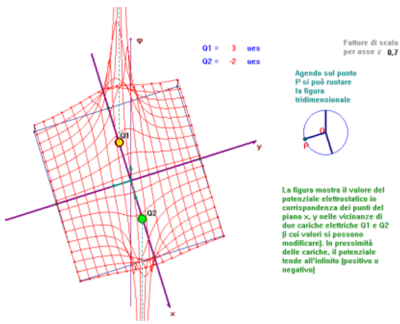
Palabras clave: Cabri, Fisica, Analisi Matematica

Cabri es un instrumento sensacional para aprender la fisica. Se pueden realizar cosas como estas:

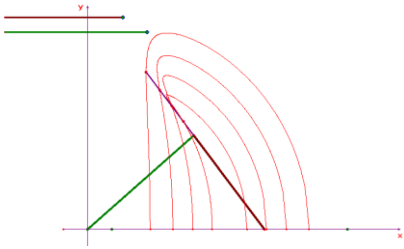




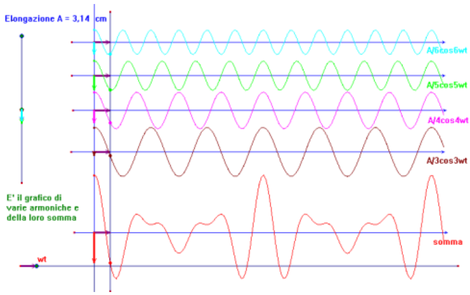
funciones en 2 variables como esta:



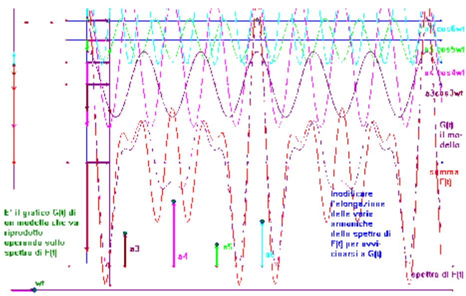
Se pueden enseñar, con facilidad, movimientos complejos como esto:



Calculos complicados como estos:



Para entender, oh!, la trasformada de Fourier (los calculos los hace Cabri!):

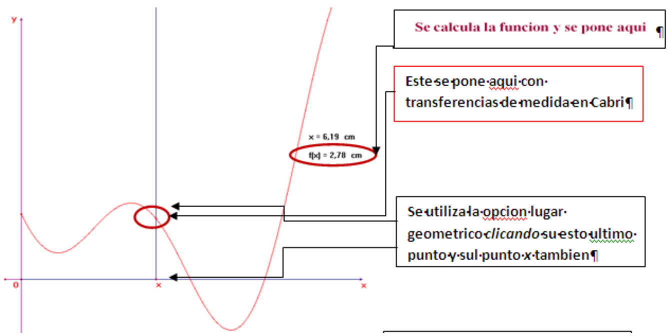


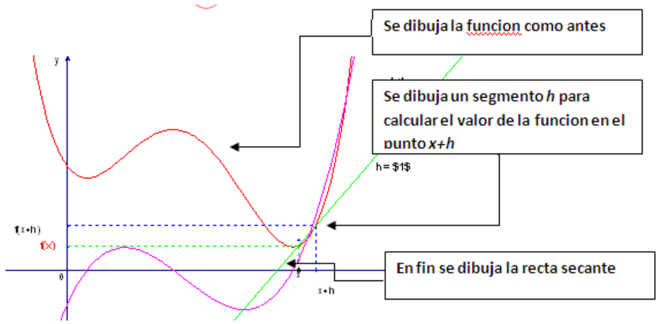
Pero Cabri puede hacer cosas fenomenales tambien por la Matematica: no solo geometria sino tambien Analisis, Calculo de las probabilidades y mucho mas! Sucede como con los hijos: cuando son niños uno espera sera ingeñero como el papà, profesora como la mama y despues… van por su proprio camino!

La tradicional pizarra, y tambien el retroproyector, se pueden ayudar con otros instrumentos de aprendizaje para las materias cientificas.

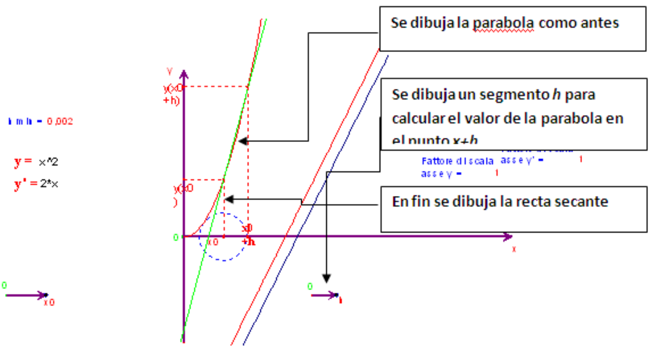
Cuerpo del documento

Pero Cabri puede hacer cosas fenomenales tambien por la Matematica: no solo geometria sino tambien Analisis, Calculo de las probabilidades y mucho mas! Sucede como con los hijos: cuando son niños uno espera sera ingeñero como el papà, profesora como la mama y despues… van por su proprio camino! La tradicional pizarra, y tambien el retroproyector, se pueden ayudar con otros instrumentos de aprendizaje para las materias cientificas. Por ejemplo A ver como se dibuja el grafico de una funcion.



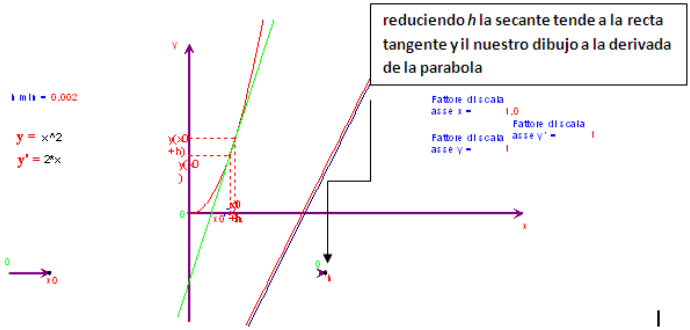


Come exemplo de esto en el taller hacimos tratado la derivata de una parabola $y = x^2$ como ne la seguinte figura:



Con lo serramiento de Cabri "pendentia" tenemos il valor de la pendentia de la recta secante, esto valor se puede dibujar como una otra funcion.

Ahora modificando la medida del vector *h* se puede veher facilmiente que la recta roja tende a sobraponerse a quela azul. Hamos dibujato la derivata de una funcion.



Lo mismo se puede hacer para una qualunque function. Lo unico limite es la potencia del computador porque funciones mucho complicades necessitan un trabajo mui grande por parte del software abri

Referencias

Atkins, P. W (1984). *Il secondo principio.* Zanichelli Editore, Bologna (Italy).

Gnedenko, B. V. (1979). *Teoria della Probabilità* Editori Riuniti Edizioni MIR, Roma (Italy).

La Fisica del Berkley. (1971), *Elettricità e Magnetismo (Parte prima)*, Zanichelli, Bologna)

Moreno Gordillo J. A., Rodriguez Gallegos R., Laborde C., *Equations différentielles dans Cabri II Plus* Atti della Conferenza Internationale CabriWorld 2004 del settembre 2004 a Rome, Italia (in via di pubblicazione). Preprint in spagnolo sul sito:

http://wwwm.imag.fr/Rodriguez/Ruth_fichiers/PaperCW2004.pdf

Orear J., *Fisica generale*, 1970, Zanichelli, Bologna.

Sabbadini R. (2005), *FisiCabri*, 2005, Principato, Milano

Sabbadini R., *Cabri Géomètre: un potente strumento per la didattica della fisica* in Progetto Alice vol. IV n. 11 II tr. 2003

Sabbadini R. *(2005), Da Keplero a V. Panisperna (passando per Rutherford): quattro secoli di modelli planetari* in Progetto Alice vol. VI n. 16 I tr. 2005.

R. Sabbadini R. (2005), *Rendere visibile la matematica: Analisi, Calcolo delle Probabilità e Fisica si mettono in mostra* in Ipotesi Anno 8 n. 1/2005.

Sabbadini, R. (2006). *Vedere la matematica e la fisica: la soluzione di equazioni differenziali con Cabri Géomètre. in* Progetto Alice Anno III vol. VII n° 21 Editrice Pagine, Roma, 547-560

Tomasi L. (2002), *Cabri Géomètre II Plus: novità e potenzialità dell'ultima versione del software*, CabrIrsae, Ottobre 2002

❖❖❖

Un registro Semiótico importante en la evaluación de actividades matemáticas: El registro verbal

Eugenio Díaz Barriga Arceo
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de México
eugeniux@hotmail.com

Resumen

En este documento presentamos algunos resultados preliminares de investigaciones en marcha realizadas en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México y el Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, referentes al desempeño de estudiantes en pruebas piloto referentes a los cursos de Álgebra Superior, Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo de Varias Variables. Los ejercicios presentes en dichas pruebas trabajaban simultáneamente diversos registros de representación semiótica, en especial, el registro de representación verbal. Un primer análisis de dichos resultados apunta a en el sentido de que la tarea de estructurar coherentemente el registro verbal marca poderosamente el tránsito entre los diversos registros de representación. Se busca profundizar el análisis de los protocolos de las sesiones para clarificar la relación entre las representaciones escritas (sean simbólicas o con palabras) con la expresión espontánea de los estudian.

Palabras clave: registro semiótico verbal, complementación, autoevaluación, cabri.

Introducción

Un problema educativo dentro de las aulas de matemáticas que se ha hecho muy notorio en particular en la Facultad de Ingeniería de la UAEM es la gran dificultad que tienen los alumnos para interpretar adecuadamente los enunciados de los problemas que se les proponen. Esta no es sino una más de las secuelas que en el ámbito educativo se arrastran con las deficiencias al trabajar las habilidades lectoras en los estudiantes en los diferentes niveles educativos previos a la formación universitaria, donde en la prueba PISA 2000 México se ubica en el último lugar de lectura entre los miembros de la OCDE y para la evaluación de OCDE y UNESCO, México se encuentra entre los últimos lugares de los 43 países participantes (Gómez, 2008).

Para explorar el desempeño de los estudiantes de ingeniería en cuanto a la resolución de problemas y el tratamiento que realizan del registro verbal de los mismos, se propuso la exploración de las siguientes actividades, desarrolladas en ambientes virtuales dentro de escenarios creados con Cabri II plus. En el caso de la exploración de las 3 actividades para el curso de Ecuaciones Diferenciales, se contó también con el software Camtasia, que permitió recolectar los diálogos entre los estudiantes y el trabajo que efectuaron en cada computadora. Se ha trabajado con estudiantes de Ingeniería en Sistemas Energéticos Sustentables de la Facultad de Ingeniería de la UAEM y con estudiantes de ingeniería del Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez.

En la nueva carrera de Ingeniería de Sistemas Energéticos Sustentables, para intentar atacar esta carencia de habilidades lectoras y de resolución de problemas, se han propuesto iniciar los cursos de Álgebra Superior y de Álgebra Lineal con el planteamiento de problemas matemáticos, dando énfasis al análisis de los enunciados donde éstos incluso se desglosan en párrafos, se buscan significados de las palabras que se desconocen y se selecciona aquello que pueda ser relevante del problema para expresarse matemáticamente; posteriormente se clasifican temáticamente los métodos de solución de los problemas y, eventualmente se trata su resolución.

La resolución de problemas matemáticos involucra profundamente la verbalización de todos y cada uno de los procesos que se llevan a cabo; desde la identificación de datos, los tanteos numéricos, la exploración de las relaciones cuantitativas en el problema, la selección de una estrategia de resolución, la interpretación de los resultados parciales y totales. Einstein afirmaba que "si no lo puedes explicar de forma simple, es que no lo entiendes lo suficiente".

Para alcanzar un manejo gradual del registro verbal, podríamos partir de actividades en que la expresión oral y escrita de los estudiantes es cerrada hasta la construcción de ensayos libres. En las actividades que presentamos aquí, hemos preferido iniciar con el estudio de cómo se realiza la reconstrucción de textos matemáticos más que la construcción total y libre de dichos textos, tarea que puede ser cognitivamente más demandante para los estudiantes.

Dentro de las actividades que se han propuesto para establecer una mejor forma de iniciar los mencionados cursos de Álgebra se encuentran la búsqueda de raíces (sufijos y prefijos) en las palabras matemáticas, la complementación de textos matemáticos y la asociación de párrafos con algunas expresiones algebraicas que los representen.

La primera actividad se plantea como una búsqueda de los significados de prefijos como bi, tri, poli, semi, y sufijos como gono, edro, triz, entre otros,; además, se solicita que el estudiante aporte un par de ejemplos matemáticos (preferentemente expresiones algebraicas o fórmulas) que tengan que ver con combinaciones de ellos). Esta actividad es grupal y se socializan los ejemplos encontrados; el docente invita a los participantes a buscar tanto los ejemplos más cotidianos como los más raros.

La complementación de textos matemáticos ya ha sido tratada anteriormente (Pluvinage, 1988); en nuestro caso hemos fragmentado textos matemáticos siguiendo los lineamientos generales de la investigación mencionada, con la salvedad de que hemos dado al estudiante un conjunto de palabras y expresiones algebraicas (una sopa de palabras, números y expresiones) dentro de las cuales se encuentran aquellas que complementan el texto correctamente, mezcladas con otras que son distractores o alteran el sentido del texto (hemos llamado a esta tarea complementación de textos dirigida). Se ha contrastado con la complementación de textos (libre) de la investigación mencionada. Se busca que las mezclas propuestas incluyan errores frecuentes en el manejo algebraico (Booth, 1984; Filloy, E., Rojano, T., 1985) y palabras cuyo significado pueda eventualmente requerir una consulta a un diccionario.

En la tercera actividad hemos elegido algunos problemas algebraicos de textos recreativos clásicos (Perelman, 1978; Gardner, 1983) para que los estudiantes los planteen. Los problemas son presentados regularmente en forma de tablas a dos columnas, donde la primera columna presenta en lenguaje verbal algún fragmento del problema (desde una oración hasta un párrafo) y en la segunda columna se dejan espacios vacíos que el estudiante debe llenar con expresiones algebraicas o respuestas numéricas; se propone una mezcla de expresiones algebraicas y respuestas numéricas, correctas e incorrectas, para que el estudiante las utilice asociándolas con los fragmentos del problema propuesto.

En estas actividades se hace énfasis en el tránsito entre los registros verbal, numérico y algebraico de un problema dado.

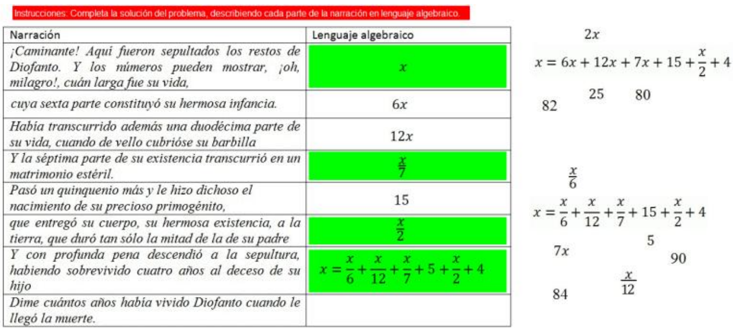
Como anexo a un curso de Ecuaciones Diferenciales del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, se trabajó la presentación de la representación de las pendientes dinámicas asociadas a una ecuación diferencial de primer orden en el entorno de geometría dinámica que ofrece Cabri II plus. Un resultado importante de un anterior estudio con estudiantes en la misma institución revelaba que, a pesar de la familiarización en esta tarea, los estudiantes aún presentaban ciertas limitaciones para asociar los campos de pendientes a sus ecuaciones diferenciales, pues aún no obtenían logros significativos al operar con el registro gráfico de las ecuaciones diferenciales (Moreno, J., Rodríguez, R., Laborde, C., 2004).

Una conjetura al respecto es que las limitaciones pueden ser debidas, entre otras causas, a una escasa verbalización de las relaciones entre las pendientes dinámicas construidas, los campos de pendientes y las curvas solución. Se propuso la experimentación de un conjunto de 3 actividades, en las cuales los estudiantes debían realizar dicha asociación, debiendo primeramente completar un breve texto que describía la forma gráfica que presentaba el campo de pendientes.

Los problemas

Problema 1.

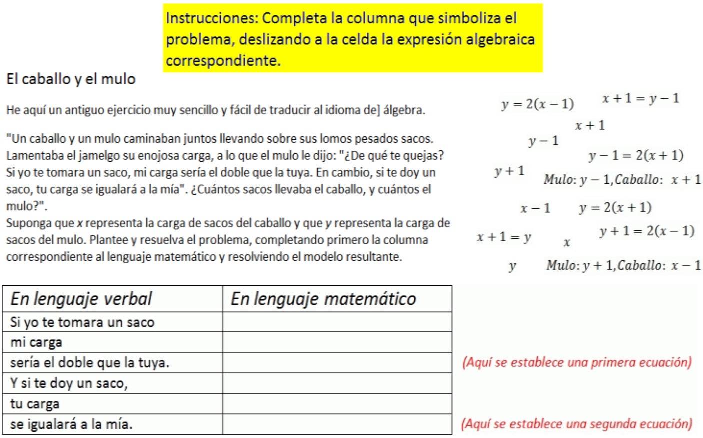
En esta actividad se ha considerado central que el estudiante pueda arrastrar expresiones algebraicas dentro de las celdas vacías; además de las expresiones solución, se tienen expresiones incorrectas frecuentes entre los estudiantes, con el propósito de que la actividad sea más demandante desde un punto de vista cognitivo. El entorno cambia a modalidad de evaluación al usar el botón “Solución”, el cual se encuentra escondido.


Instrucciones: Completa la solución del problema, describiendo cada parte de la narración en lenguaje algebraico.

Narración	Lenguaje algebraico
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida,	x
cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	$6x$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla	$12x$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$\frac{x}{7}$
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	15
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre	$\frac{x}{2}$
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$
Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte.	

Problema 2

Actividad similar a la anterior. Algunas de las celdas tienen comentarios que eventualmente ayudan a la solución del problema. El entorno cambia a modalidad de evaluación al usar el botón “Solución”, el cual se encuentra escondido.



Instrucciones: Completa la columna que simboliza el problema, deslizando a la celda la expresión algebraica correspondiente.

El caballo y el mulo

He aquí un antiguo ejercicio muy sencillo y fácil de traducir al idioma de] álgebra.

"Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentaba el jamelgo su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía". ¿Cuántos sacos llevaba el caballo, y cuántos el mulo?".

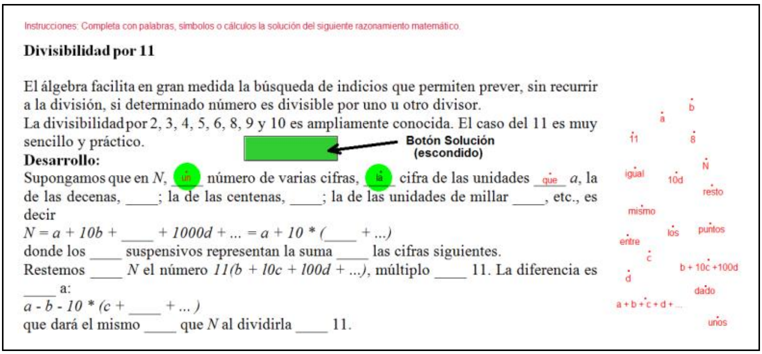
Suponga que *x* representa la carga de sacos del caballo y que *y* representa la carga de sacos del mulo. Plantee y resuelva el problema, completando primero la columna correspondiente al lenguaje matemático y resolviendo el modelo resultante.

$y = 2(x-1)$ $x+1 = y-1$ $x+1$ $y-1$ $y-1 = 2(x+1)$ $y+1$ $Mulo: y-1, Caballo: x+1$ $x-1$ $y = 2(x+1)$ $x+1 = y$ x $y+1 = 2(x-1)$ y $Mulo: y+1, Caballo: x-1$

En lenguaje verbal	*En lenguaje matemático*	
Si yo te tomara un saco		
mi carga		
sería el doble que la tuya.		*(Aquí se establece una primera ecuación)*
Y si te doy un saco,		
tu carga		
se igualará a la mía.		*(Aquí se establece una segunda ecuación)*

Problema 3

En esta actividad se han eliminado algunas palabras y expresiones algebraicas del texto del problema y su solución originales. Se provee al estudiante de una gran miscelánea de alternativas para que intente reconstruir al original. El entorno cambia a modalidad de evaluación al usar el botón "Solución", el cual dará luz verde a cada palabra o expresión correcta.



Instrucciones: Completa con palabras, simbolos o cálculos la solución del siguiente razonamiento matemático.

Divisibilidad por 11

El álgebra facilita en gran medida la búsqueda de indicios que permiten prever, sin recurrir a la división, si determinado número es divisible por uno u otro divisor.
La divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10 es ampliamente conocida. El caso del 11 es muy sencillo y práctico.

Botón Solución (escondido)

Desarrollo:
Supongamos que en *N*, un número de varias cifras, la cifra de las unidades que *a*, la de las decenas, ____; la de las centenas, ____; la de las unidades de millar ____, etc., es decir
N = a + 10b + ____ *+ 1000d + … = a + 10 * (*____ *+ …)*
donde los ____ suspensivos representan la suma ____ las cifras siguientes.
Restemos ____ *N* el número *11(b + 10c + 100d + …)*, múltiplo ____ 11. La diferencia es ____ a:
*a - b - 10 * (c +* ____ *+ …)*
que dará el mismo ____ que *N* al dividirla ____ 11.

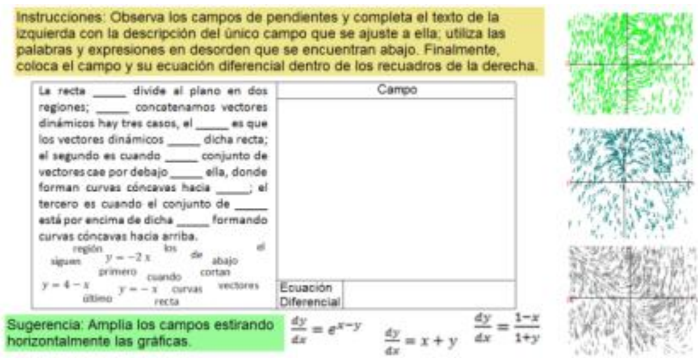
b a 11 8 N igual 10d resto mismo los puntos entre c b + 10c +100d d dado a + b + c + d + … unos

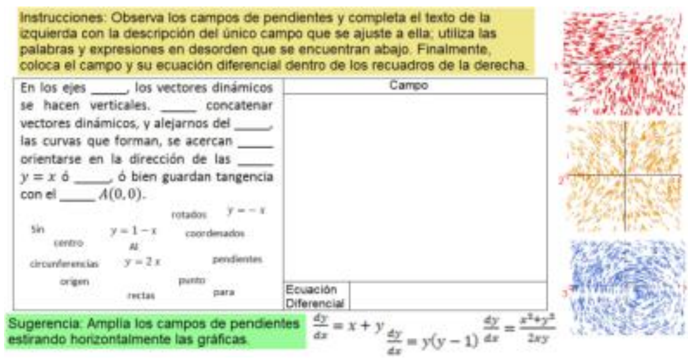
Problemas 4 al 6

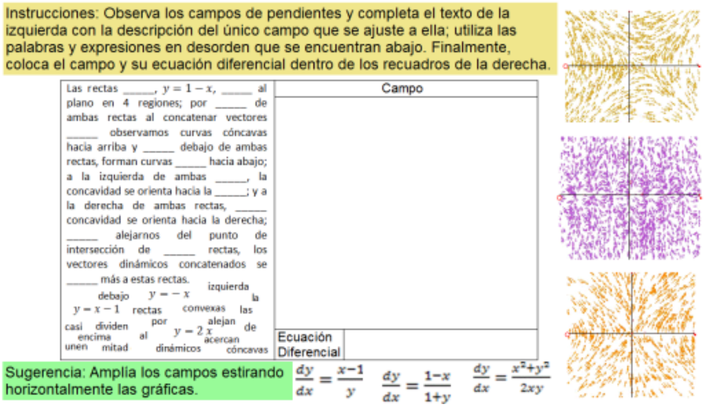
Descripción del campo de pendientes de una ecuación diferencial.

Actividades que realizan el tratamiento de 3 registros de representación diferentes (verbal, gráfico y algebraico). En proceso de experimentación en el aula, este ambiente evalúa el grado de apoyo que ofrece la descripción verbal para reconocer un campo de pendientes con su ecuación diferencial asociada.

Hay que señalar que en la descripción verbal se buscó que no se refiriera a lo que sucedería en la forma algebraica ecuación diferencial en puntos, rectas, circunferencias u algún otro objeto específico del plano.







Las actividades de planteamiento de problemas algebraicos

En el curso de Álgebra Superior las actividades exploradas permitieron observar deficiencias en la estructuración de textos matemáticos por parte de los estudiantes. Sin embargo, hay que señalar que hubo mucho éxito para la reconstrucción total de los problemas 1 y 2, mientras que el problema 3, al ser más extenso y mezclar texto con expresiones algebraicas, su comprensión y reconstrucción fue más difícil.

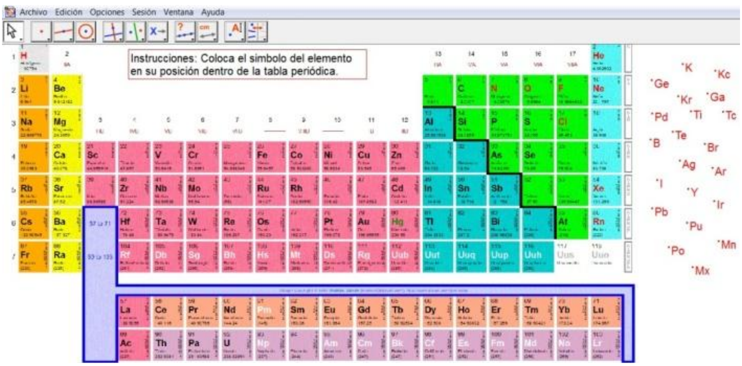
Las actividades del curso de Ecuaciones Diferenciales

Al resolver las actividades diseñadas, se observó que los estudiantes dialogaban más sobre la reconstrucción del texto que acerca de la forma algebraica de la ecuación diferencial o la forma del campo de pendientes; no se observó que utilizaran mucho el recurso de ampliar o reducir los campos de pendientes que debían probar para asociarlo al texto correspondiente. Y también fue palpable que no hubo grandes debates sobre la forma algebraica de la ecuación diferencial asociada a las actividades, ni exploraciones numéricas en ella; parecía que ya se le reconocía una vez reconstruida la descripción del texto y elegido el gráfico del campo de pendientes.

Reiteramos que, a pesar de la aparición del registro verbal en estos problemas, en ningún caso se verbalizó la exploración de lo que ocurriría en el plano si se dieran valores a la ecuación diferencial, ni tampoco se pensó en el comportamiento de la ecuación diferencial sobre objetos geométricos como rectas o circunferencias fáciles de identificar en el plano (como o). Pensamos que la complementación dirigida del texto limitó en este sentido lo que el estudiante podría realizar espontáneamente.

Actividad. Complementación de la Tabla periódica de los elementos

En esta actividad se han omitido los símbolos de diversos elementos dentro de la tabla periódica y se pide a los estudiantes que los identifiquen y reubiquen en sus posiciones. Para que en la actividad no puedan resolverse los últimos elementos por eliminación, se han colocado símbolos adicionales que no corresponden a ningún elemento químico.



Conclusión

Las actividades que se han presentado en este documento integran el registro verbal a la discusión de los problemas matemáticos. Al menos en el caso de la experiencia en el curso de Ecuaciones Diferenciales se documentan posibilidades de una más completa comprensión de las relaciones entre campos de pendientes y ecuaciones diferenciales de primer orden.

En el caso del curso de Álgebra Superior, permiten enfatizar la importancia del análisis de los enunciados matemáticos; de que el estudiante realice una reflexión cuidadosa acerca de los significados más relevantes que plantea el enunciado; de que el estudiante identifique las palabras clave en un enunciado; que pueda discriminar si cambia o no un enunciado al cambiar una palabra en él, por ejemplo, al cambiar una palabra por su antónimo, como en "divisible por" y "divisible entre", o al cambiar un sustantivo por otro en el contexto del problema, como en "recta" y "segmento".

En el caso del curso de Ecuaciones Diferenciales, ha quedado patente que la integración del registro verbal es muy importante para ir profundizando la comprensión de la resolución de problemas en el caso de las ecuaciones diferenciales de primer orden; también se observa que la complementación de textos dirigida contextualiza el problema, aunque al mismo tiempo lo segmenta. Un rediseño de estas actividades podría aclarar que textos pueden los estudiantes construir por su propia iniciativa y cuales es mejor impulsar mediante instrucción.

Referencias

Booth, L. (1984). *Algebra: Children´s Strategies and Errors*, Windsor, Reino Unido, nfer-Nelson.

Díaz Barriga, E. (2011). Conferencia: Cabri en auxilio de la resolución de problemas algebraicos. *III Congreso Internacional en Formación y Modelación en Ciencias Básicas*. Medellín, Colombia.

Filloy, E., Rojano, T. (1985a), "Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies", en L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Utrech, Holanda, State University of Utrecht, pp. 154-158.

Filloy, E., Rojano, T. (1985b), "Operating unknown and models of teaching (A clinical study with 12-13 years old with a high proficiency in pre-algebra)", en S. K. Domarin y M. Shelton (eds.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Columbus, Ohio, EUA, Ohio State University, pp. 75-79.

Gardner, M. (1983). ¡*Ajá*!. Editorial Labor.

Gómez, L (2008). El desarrollo de la competencia lectora en los primeros grados de primaria. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, Vol. XXXVIII, Núm. 3-4, 2008, pp. 95-126. Centro de Estudios Educativos, A.C. México.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Moreno, J., Rodríguez, R., Laborde, C. (2004). *Ecuaciones Diferenciales en Cabri II Plus*, Equipo de trabajo "Informática y Aprendizaje de las Matemáticas" (IAM-MAGI), Grenoble, Francia.

Moreno, J. (2006). *Articulation des registres graphique et symbolique pour l'étude des équations différentielles avec Cabri Géomètre. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

Perelman, Y. (1978). *Álgebra recreativa*. Editorial Mir, Moscú.

Pluvinage, F. (1988). *Complementación de textos matemáticos. Cuadernos de Investigación*. Sección de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

❖❖❖

La demostración y sus contextos

Luis Moreno Armella
Cinvestav-IPN, México
lmorenoarmella@gmail.com

Resumen

La presencia de la tecnología digital no ha resultado enteramente compatible con los usos y costumbres de los sistemas educativos, pues estos son producto de la cultura estática del papel. Consecuentemente, la tecnología digital no ha encontrado una atmósfera de bienvenida incondicional: no olvidemos que las organizaciones curriculares requieren cierto grado de estabilidad para evaluar sus virtudes y sus defectos.

Empero, no podemos hacer como si la presencia de la tecnología digital fuese solamente una prótesis que produce alivio pasajero a los problemas de la cotidianidad educativa: como si fuese una lupa, un mediador cuyo papel equivale a permitirnos hacer mejor lo que de todas formas podíamos hacer sin él. Entonces, las matemáticas a cuyo auxilio vendría esta tecnología, queda *intocada*.

La tecnología digital, tal como está encarnada en un medio semiótico como Cabri, va más lejos. Su sistema de representación permite rebasar el nivel de la mera ilustración visual y acceder al nivel de las estructuras: Cabri es un *microscopio matemático* y escolar. Las consecuencias son de varios tipos: aparte de la erosión curricular del conocimiento estático, hay consecuencias profundas de corte cognitivo y epistémico.

Nuestra presentación versará sobre las consecuencias cognitivas y epistémicos para *la demostración* que emergen del nuevo orden dinámico y estructural.

La escuela, como mediador protagónico del conocimiento, no puede renunciar a las consecuencias de este nuevo orden que, en cierta medida, subvierte el establecido hasta hoy

Palabras clave: demostración, epistemología, cognición, curriculum

La infalibilidad de las matemáticas como un obstáculo para su enseñanza y su aprendizaje

Bernardo Camou Font
Academia Bolzano y Liceo 10, Uruguay
bernardocamou@adinet.com.uy

Resumen

La exaltación del carácter abstracto, exacto e infalible de la matemática en vez de favorecer su aprendizaje frecuentemente lo obstaculiza. Una presentación que permanentemente enfatiza estos aspectos, esconde el carácter concreto, particular y aproximado de la construcción del conocimiento matemático. Se subestiman las representaciones que son consideradas tan sólo elementos auxiliares de los objetos matemáticos.

Un claro ejemplo de subdesarrollo de una rama de la matemática debido a los obstáculos que plantea la representación es el de la geometría del espacio. He venido desarrollando durante los últimos 20 años, un enfoque para enseñar y aprender geometría del espacio que he denominado iMAT (integrando multirepresentaciones, aproximaciones y tecnología). Dicho enfoque ha sido implementado y evaluado con éxito con 134 estudiantes de nivel Secundario de Estados Unidos y Uruguay constituyendo mi reciente tesis de doctorado en la University of Georgia.

El supuesto fundamental del enfoque es que para progresar en el estudio de la geometría del espacio es necesario e ineludible utilizar un conjunto de representaciones, que de diferentes formas, aproximan el mismo objeto geométrico. Entre la representaciones concretas (modelos 3D) y las abstractas (dibujos 2D), las representaciones semi-abstractas que CABRI 3D suministra, constituyen un elemento fundamental para poder realizar exitosamente el proceso de conceptualización del objeto geométrico.

La presunta infalibilidad de la matemática le cierra los caminos a todo lo que le dio origen: el ensayo y el error, el caso particular, la aproximación de la representación y pierde así su mayor

virtud: ser una maravillosa aventura intelectual para todo ser humano.

Palabras clave: aproximaciones, Cabri 3D, infalibilidad, representaciones, geometría del espacio.

Cuerpo del documento

La matemática tiene reputación de ser abstracta, general, objetiva, exacta e infalible pero si reflexionamos en profundidad y analizamos su historia ¿Es realmente así?

Por citar tan sólo un ejemplo hace 200 años la geometría euclideana era la única estructura posible del espacio; por un punto exterior a una recta existía únicamente una recta paralela y la suma de los tres ángulos interiores a un triángulo era siempre 1800. Sin embargo luego de los trabajos de Lobachevski, Bolyai y Riemann estas verdades infalibles y absolutas establecidas 2000 años antes por Euclides cayeron por tierra. La geometría euclideana pasó a ser sólo un caso particular donde la curvatura de las superficies es 0. Si la curvatura de la superficie es positiva la suma de los tres ángulos de un triángulo no es constante y es mayor que 1800 y si la curvatura de la superficie es negativa la suma de los tres ángulos de un triángulo (tampoco es constante) y es menor que 1800. En la Figura 1 (construida con Cabri 3D) podemos observar como la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico supera el ángulo llano.

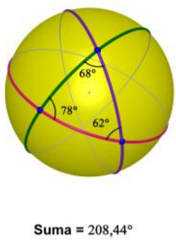


Figura 1

Querer una matemática infalible es una cosa; que efectivamente la matemática sea infalible es otra muy diferente.

Creemos que la matemática es objetiva; una verdad matemática es cierta independientemente de la persona que la enuncie. A pesar de esto, la historia de la matemática nos muestra como la subjetividad y la autoridad de los matemáticos de cada época se han opuesto tenazmente a la aparición de nuevas y desafiantes teorías matemáticas. Nikolai Ivanovich Lobachevski tuvo que enfrentar las más brutales críticas del matemático ruso más prestigioso en su época: Ostrogradski y Janos Bolyai no recibió del gran Gauss el mínimo reconocimiento por su magna obra sino tan sólo el mezquino comentario que él mismo ya había llegado a las mismas conclusiones hacía varios años.

Años más tardes George Cantor tuvo que soportar, a costa de su propia salud, la más cruel de las persecuciones académicas por parte del más prestigioso matemático alemán de su tiempo Kronecker, por su revolucionaria teoría de los cardinales transfinitos. ¿Puede considerarse la matemática objetiva cuando en un determinado tiempo predomina una teoría sobre otra, basada solamente en la tradición o la autoridad académica que matemáticos encumbrados ejercen sobre otros matemáticos más humildes o desconocidos?

Si cada uno de nosotros es subjetivo, si cada ser humano es falible ¿Podemos nosotros los seres humanos construir una ciencia infalible?

Pero además de enseñar la matemática como si fuera infalible se la enseña además como si fuera completa es decir como si todas, absolutamente todas las propiedades y teoremas sobre un tema se supieran. Y justamente Kurt Gödel demostró que en todo sistema axiomático existen proposiciones indecidibles o sea que existen proposiciones que no podemos demostrar ni que son verdaderas ni que son falsas. Esta visión abstracta, general, infalible y completa de la matemática tiene implicaciones muy perjudiciales para la enseñanza y el aprendizaje ya los aspectos concretos, particulares, falibles e incompletos son desdeñados y tratados a lo sumo como males necesarios para llegar a la perfección de la matemática. Nos concentramos sólo en la parte visible del iceberg que está sobre el agua olvidándonos que la mayor parte del iceberg no está a la vista por estar sumergido bajo el agua.

El camino que parte de lo concreto, de lo particular que está lleno de aproximaciones, de ensayos y errores, de hipótesis o pruebas fallidas es lo que genera el conocimiento matemático y lo que da sentido al resultado final.

En palabras de I. Lakatos (1976): ¨En el estilo deductivo todas las proposiciones son verdaderas. Las matemáticas son presentadas como un conjunto de verdades eternas e inmutables. El estilo deductivo esconde la lucha, disimila la aventura. Toda la historia desaparece. Las sucesivas tentativas de formulación de un teorema durante el proceso de demostración quedan en el olvido mientras que el resultado final es exaltado y elevado a una infalibilidad sagrada¨.

Hace más de 20 años en mis comienzos como profesor de matemática quedé muy sorprendido por no poder resolver un problema muy sencillo de geometría del espacio: calcular el volumen de todos lo poliedros regulares. Percibí la incongruencia de una enseñanza que había recibido sobre muchas temas algunos muy complejos y prácticamente nada o muy poco sobre geometría del espacio al punto que estos únicos cuerpos regulares (en particular los de 12 y 20 caras) eran completamente desconocidos para mi.

Esto fue el comienzo de la creación y desarrollo de un nuevo enfoque para aprender geometría del espacio que he denominado ingeniería iMAT (integrando multirpresentaciones, aproximaciones y tecnología). Este trabajo de investigación me llevó primeramente a la realización de un Master en la Universidad J.Fourier de Grenoble donde incorporé el uso del software Cabri 3D como pieza fundamental en el enfoque iMAT y luego a la realización de un doctorado en la Universidad de Georgia donde tuve la oportunidad de experimentar dicho enfoque con 134 alumnos liceales de dos diferentes nacionalidades: uruguaya y estadounidense.

El experimento consisitió en enseñar durante dos semanas un curso de geometría del espacio donde se usó diferentes representaciones para los poliedros regulares. Dichas representaciones incluyeron entre otras: modelos 3D en cartulina, figuras Cabri 3D y dibujos. Se trabajó con la relación de Euler , con los ángulos diedros, las áreas y volúmenes de los poliedros además de construir poliedros arquidemianos con Cabri 3D y figuras con regla y compás.

En la prueba diagnóstica inicial se comprobó una hipótesis inicial: los alumnos de los dos países (de edades entre 16 y 18 años) desconocían en su gran mayoría lo que es un poliedro regular.

Ante la pregunta de ¿Qué es un octaedro regular? al inicio de la experimentación los resultados pueden ilustrarse con la Figura 2:

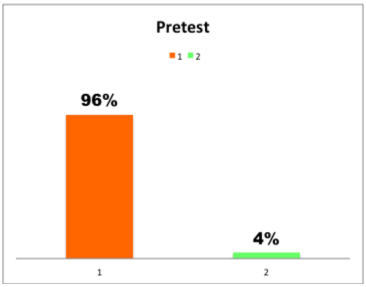


Figura 2

El 96% de los alumnos no pudieron dar una respuesta aceptable y sólo el 4% pudieron dar una respuesta satisfactoria.

Luego de la experimentación donde construyeron en cartulina el octaedro regular, lo construyeron con Cabri 3D, lo dibujaron en papel y jugaron con dados poliédricos, ante la misma pregunta en la evaluación final, los resultados fueron los que podemos observar en la Figura 3.

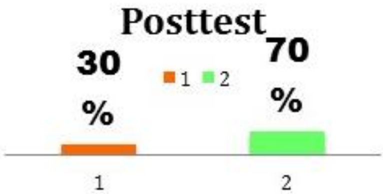


Figura 3

Ahora solamente el 30% no suministró una respuesta aceptable mientras que el 70% de los alumnos fue capaz de dar una respuesta satisfactoria a la pregunta de ¿Qué es un octaedro regular?

iMAT propone que para poder conceptualizar correctamente un objeto matemático 3D es imprescindible utilizar un conjunto de representaciones utilizando diferentes tecnologías. Cada representación aproxima el objeto en una forma diferente y la integración del conocimiento obtenido con cada representación produce la conceptualización. La integración además se produce entre diferentes ramas de la matemática como geometría, álgebra y trigonometría y entre la geometría 2D y 3D.

Un ejemplo de cómo una aproximación creciente e integrada contribuye efectivamente en la conceptualización del objeto es el ángulo diedro de los poliedros regulares.

Comenzamos estimando el ángulo (como podemos ver en la Figura 4) y midiéndolo luego con un semicírculo o transportador.

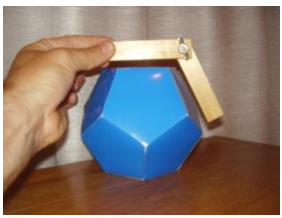


Figura 4

Luego medimos dicho ángulo diedro con Cabri 3D para finalmente calcular el ángulo utilizando trigonometría. La posibilidad de hallar el ángulo diedro en forma independiente usando tres diferentes representaciones refuerza el concepto a medida que el alumno obtiene respuestas similares con los tres distintos procedimientos.

El otro aspecto de la integración como hemos dicho es estudiar problemas análogos de geometría plana y del espacio. Así como para todo triángulo existe la circunferencia circunscrita y la circunferencia inscrita, para todo tetraedro (regular o no) existe una esfera circunscrita y una esfera inscrita como podemos apreciar en la Figura 5 y la Figura 6.

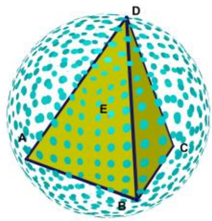


Figura 5. Esfera de centro E circunscripta al tetraedro ABCD

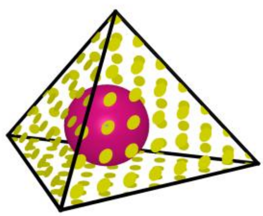


Figura 6. Esfera inscripta a un tetraedro cualquiera

El aceptar la necesidad imperiosa de usar multirepresentaciones para estudiar geometría del espacio es tácitamente aceptar el hecho que trabajamos con aproximaciones falibles del objeto matemático ideal y exacto. En nuestros curriculums liceales existe un 80% de geometría plana contra tan sólo un 20% de geometría del espacio.

- No nos dediquemos a intentar tornar infalible un pequeño territorio matemático cuando tenemos todo un rico mundo (el de la geometría del espacio) inexplorado, lleno de maravillosas aventuras por experimentar y con fantásticos tesoros por descubrir.
- Uno de dichos formidable resultados es la fórmula de Euler: $C + V - A = 2$ que establece que en un poliedro la suma del número de caras más los vértices menos las aristas es siempre igual a 2. Otro formidable resultado es el llamado Teorema de Descartes para la suma de los defectos de los vértices de un poliedro. El defecto en un vértice es la diferencia entre 3600 y la suma de los ángulos de las caras alrededor del vértice. Así el defecto del vértice de un octaedro regular es 360 − 4x60 (4 triángulos equiláteros) lo que da 1200. Lo que establece el Teorema de Descartes es que si sumamos los defectos de todos los vértices el resultado siempre es 7200.

En su libro Pruebas y Refutaciones I.Lakatos muestra múltiples fallas en la demostración que efectuó el matemático L.Euler de la relación que lleva su nombre y sin embargo esta fórmula además de ser sorprendente e increíble, es permanentemente usada en varias ramas de la matemática por su vasta aplicabilidad. Algo similar sucede con el Teorema de Descartes para la suma de los defectos. Ambas enuncian una propiedad simple que se cumplen para los poliedros. Pero aquí chocamos con la piedra contra la cual chocó Euler y otros muchos ilustres matemáticos: ¿Qué es un poliedro?

Leemos en Wikipedia: ¨El pecado original de la teoría de poliedros viene desde Euclides, pasando por Kepler, Poinsot, Cauchy y muchos otros que no fueron capaces de definir lo que era un poliedro¨

La fórmula del Teorema de Descartes además, establece un maravilloso vínculo entre la Geometría euclideana (geometría con curvatura 0) y la geometría esférica (geometría de curvatura positiva): el defecto angular en un vértice es exactamente igual a la curvatura de la superficie poliédrica alrededor de dicho vértice.

En la esfera la curvatura de un triángulo se calcula como el exceso de 1800 de la suma de los tres ángulos interiores del triángulo. Así la curvatura del triángulo esférico de la Figura 1 es 208,44 – 180 = 28,44o lo equivale a 0,4964 radianes.

La curvatura de un cuadrilátero esférico es el exceso sobre 360o (la suma para un cuadrilátero plano) de la suma de los 4 ángulos interiores del cuadrilátero.

Vemos en la Figura 7 un cuadrilátero alrededor del vértice de un octaedro regular

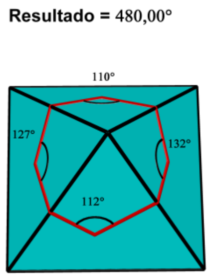


Figura 7

La suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero de la Figura 7 es 480o por lo que su exceso es 480– 360 = 1200. O sea que la curvatura alrededor de un vértice de un octaedro regular es 120o y en la página anterior vimos que 1200 también era el defecto en el vértice. O sea que simplemente calculando los defectos en los vértices de los poliedros estamos calculando también la curvatura de la superficie alrededor de dicho punto!

Para finalizar mencionaré una frase que dijo alguna vez un ilustre matemático:

La geometría es el arte de razonar bien sobre una mala figura

Dicen que una verdad a medias puede ser una gran mentira y este es el caso.

La frase anterior no es ni suficientemente abstracta ni suficientemente concreta.

Modestamente yo la corregiría diciendo:

La geometría es la ciencia de razonar bien sin ninguna figura, luego de haber razonado mal durante algún tiempo con buenas figuras.

Referencias

Abbot, E. A. (1885). *Flatland: a romance of many dimensions*. University of Michigan Libraries

Accascina, G. & Rogora, E. (2006) Using Cabri 3D Diagrams for Teaching Geometry. *International journal for Technology in mathematics Education, Volume 13, No 1*

Bainville, E. & Laborde, J.M. (2004) *Cabri 3D*. Cabrilog. Grenoble, France.

Bakó, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. *In Proceedings of the Third Conference of the European society forResearch in Mathematics Education.*

Balacheff, N. (1995) Conception, connaissance et concept Denise Grenier (Ed.) *Seminaire Didactique et Technologies cognitives et Mathematiques (pp 219-244)*. *Grenoble*.

Bronshtein, I & Semendiaev (1976). *Manual de Matematicas para Ingenieros y Estudiantes.* Ediciones Sapiens, Buenos Aires

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des Situations Didactiques*. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V.Warfield (Eds.) Grenoble, France: La Pensée Sauvage

Bruner, J. (1977). *The Process of Education*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Bruner, J (1973). *Beyond the Information Given*. New York: W.W.Norton & Company, Inc.

Camou, B. (2006). *Diario de un Profesor de Matematica*. Montevideo,Uruguay: Ediciones Brio.

Chaachoua, H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.

Grenier, D. et Tanguay, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratiques et théoriques des polyèdres réguliers. *Petit x*, 78: 26 – 52.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The logic of Mathematical Discovery.* London: Cambridge University Press.

Margolinas, C. (1998). Relations between the theoretical field and the practical field in mathematics education. In A.Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics education as a research domain: A search for identity.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 575-593.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

University of Cambridge. (2002) *Why do we study geometry? Answers through the ages.* Retrieved from:

http://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-G_opening_ppr.pdf.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2.3):133–170.*

Vygotski, L. (1930). *Mind in Society*. *The development of higher psychological processes*. Edited in 1978 in Cambridge, Massachusets.

Warfield, M., V. (2007). *Invitation to Didactique*. Bloomington, IN: Xlibris Corporation.

Windslow, C. (2007). Didactics of mathematics: an epistemological approach to mathematics education. *The Curriculum Journal. Vol 18, No 4, December 2007, pp.523-536*.

❖❖❖

La Geometría, el Cabri y los amores a primera vista

Francisco Ugarte Guerra
Pontificia Universidad Católica del Perú
Departamento de Ciencias – Sección Matemáticas
fugarte@pucp.edu.pe

Resumen

En eta conferencia hablaré un poco de mi experiencia con el Cabri y de mi último reencuentro con él para la comprensión de las transformaciones del plano. Ejemplificaré la construcción de la máquina de Pitágoras, el inversor de Newton, la variante de Hart y cómo podemos utilizarlas en la construcción de cuádricas y cuárticas.

❖❖❖

TALLERES

Cómo es que las trayectorias de las cónicas pueden generar las cuádricas

Alicia Noemí Fayó
María Cristina Fayó
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional General Pacheco
Universidad Nacional de Moreno, Grupo XVIII
Investigación en Matemática Educativa, Argentina
aliciafayo@ciudad.com.ar
mcfayo@hotlmail.com

Resumen

A través de investigaciones, en nuestro país, hemos detectado que en los últimos años de la escuela secundaria y primer año de la universidad, se desaprovecha la posibilidad de estudiar las cónicas geométricamente. En general su estudio, se realiza a través de sus expresiones analíticas. El alumno que encuentra cuál es el mecanismo de resolución, termina siendo un gran calculista desconociendo el concepto y aplicación del tema. No estudiar las cónicas en su plenitud, implica desconocer todo aquello que dependa de ellas. Nuestro objetivo en este taller es enseñar, en una forma muy sencilla a través de Cabri 3D, la generación de cuádricas como resultado de las trayectorias de las cónicas. Mediante un paseo por sus aplicaciones recorreremos las obras más notorias de los arquitectos del siglo XX. Bastará recordar, entre otros, los modelos utilizados por Gaudí. No faltarán en nuestro recorrido, la ingeniería mecánica, las ciencias aeroespaciales hasta la astronomía que nos llevará a ver en sus diseños, superficies impensables que toman como referencia los modelos de las cuádricas. Nuestra orientación queda expresada por la respuesta dada por un matemático a la pregunta de un asistente a su conferencia– "¿La Matemática explica el mundo"? El catedrático contestó: "La matemática no explica el mundo. Nunca una teoría matemática pura podrá decirnos nada del universo real…. La Matemática estudia los modelos. La única ciencia que no estudia el mundo es la Matemática, ella estudia los modelos ideales." Los esperamos para construir juntos estos magníficos modelos en Cabri 3D.

Palabras clave: cuádricas, cónicas y cuádricas, cuádricas con Cabri, generación de cuádricas, trayectoria de cónicas.

Ejes temáticos: Geometría plana y espacial con Cabri. Experiencias educativas con asistencia de Cabri.

Marco teórico

La Geometría necesita un proceso visual, que podemos clasificar de largo proceso que tiene como finalidad la formación de imágenes mentales. Poco a poco como una filigrana, con asociaciones con otras imágenes anteriores acumuladas en la memoria, se construye la representación que nos interesa. Los estímulos visuales y los hábitos de concebir interiormente la imagen contribuyen desde el comienzo a las representaciones mentales de los objetos.

Según Claudi Alsina, Carme Burgués, y Joseph Fortuni (1975) : "En la construcción del proceso (visual) interviene nuestra experiencia previa haciendo asociaciones con otras imágenes mentales almacenadas en nuestra memoria. El desarrollo completo del proceso visual es esencial para lograr una adecuada percepción espacial. De hecho es un primer paso para obtener un conocimiento de las estructuras espaciales que nos rodean" y hacen referencia a que llas habilidades y técnicas de saber ver y saber interpretar para percibir objetos tridimensionales pueden ser aprendidas.

Irma Saiz y Noemí Acuña (2006) expresan: "Partimos de la idea de que los objetos matemáticos son por naturaleza abstractos. Duval (1993) considera que son accesibles sólo por medio de sus representaciones y que su conceptualización pasa por la capacidad de identificar un concepto en diferentes registros. Por lo tanto se necesita un trabajo específico en los estudiantes cuyo objetivo sea la articulación de diferentes registros alrededor de un objeto matemático en particular."

Colette Laborde (1999) afirma: "una parte de la esencia de las matemáticas es la actividad de resolución de problemas, y esta actividad está basada en la interacción entre varios registros y el tratamientos en cada registro".

Desde la antigüedad, la Geometría coexiste con diferentes disciplinas y el arte. Es así que la encontramos en la arquitectura, la ingeniería, el diseño hasta en el arte abstracto. El saber ver es encontrar los rastros de la Geometría.

El estudio de las superficies regladas alabeadas se trasladó al arte, la arquitectura y la ingeniería, gracias al descubrimiento del hormigón armado. Un genio como Antoni Gaudí lo aprovechó para crear los arcos, las bóvedas y las columnas para diseñar amplios ventanales y alcanzar grandes alturas.

Hoy en día el descubrimiento de otros materiales aptos para la confección de modelos, han llevado a otras disciplinas a considerar superficies especiales que permiten utilizar recursos existentes y optimizar eficientemente su uso.

Introducción

Es innegable la importancia de la enseñanza de las cónicas debido a que trasciende los límites del estudio de la Matemática, modelizando un sinfín de situaciones de otras disciplinas. Sin embargo, en los ámbitos tanto de educación media como superior, terciaria o universitaria en nuestro país, no se dedica el tiempo ni los recursos adecuados, para su enseñanza.

Por otra parte los profesores no están exentos de seguir las modas que lamentablemente se impusieron en el mundo relegando a la Geometría en pos de otros conceptos que no la incluyen y tienden muchas veces al mecanicismo.

Es así que los estudiantes se han viso impedidos de incorporar estos conocimientos, y por lo tanto al ver objetos de la actualidad desde un parapente a una turbina, consideran que estas formas exóticas son creadas por un diseñador o un artista, sin reconocer la matemática que subyace en ellas.

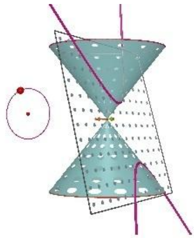


Fig. 1: Generación de cónicas

Como docentes debemos investigar específicamente dónde están las dificultades para tratar de subsanarlas y remediar los huecos de la enseñanza. Es así que después de una experiencia llevada a cabo el año pasado en la universidad en la cátedra de Álgebra y Geometría Analítica decidimos compartir en un taller nuestra experiencia.

Nos hemos apartado de la idea clásica de construir las cuádricas generadas como superficies regladas ya que Cabri nos da la posibilidad de crearlas en 3D mediante desplazamientos de las cónicas. Esta forma de concebirlas brinda la posibilidad de diferenciar las generadas por rotación alrededor de un eje, de las que no lo son. Las primeras son llamadas superficies de revolución en donde toda sección perpendicular al eje de revolución es una circunferencia, mientras que las que no son de revolución son generadas por cónicas de diferentes excentricidades, constituyendo aquellas un caso particular de estas últimas.

Desarrollo del taller:

Objetivo: interpretar, construir y visualizar la generación de las cuádricas.

PRIMER ENCUENTRO:

Temas a desarrollar: Cuádricas generadas por la revolución de cónicas alrededor de un eje.

Presentaremos el tema mediante un video mostrando la presencia de las cuádricas en el mundo. Visualizaremos en él las cuádricas e identificaremos las cónicas que les dan origen. Seguidamente intercambiaremos con los participantes maneras de enfocar la enseñanza de las cuádricas en los distintos países. Luego, para comenzar a trabajar, repasaremos la formación de cónicas en una superficie cónica intersecada por un plano.

Propuestas de actividades:

Construcción de un elipsoide de revolución

Construiremos una elipse con el menú de Cabri 3D, para recordar las condiciones de su determinación. Seguidamente se los invitará a construir otra elipse sobre un plano. Se observará la variación de los parámetros y sus efectos.

Luego propondremos la construcción del elipsoide de revolución que constituye una de las cuádricas más simples. Se muestran en las figuras Fig.1 y Fig.2.

De esta forma podremos describir las propiedades del elipsoide, considerado como lugar geométrico y analizarlo como un caso especial de la definición que dice lo siguiente:

Elipsoide, ecuación reducida(Burgos,J.1994): En el espacio euclídeo , y respecto de los ejes rectangulares , se consideran los puntos A(a,0,0), A'(-a,0,0), B(0,b,0), B'(0,-b,0), C(0,0,c) y C'(0,0,-c) donde a>0, b>0,c>0 son dados. Sean las elipses cuyos ejes son BB' y CC', CC' y AA', AA' y BB' respectivamente. Se llama elipsoide que tiene por vértices a A, A', B, B', C y C' al lugar geométrico definido, entre otras, de las siguientes maneras, equivalentes sí:

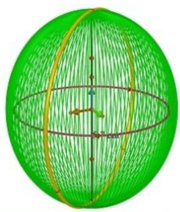


Fig. 2: Elipsoide de revolución

1. Lugar geométrico que describe una elipse, variable, situada en un plano perpendicular al eje .
2. Lugar geométrico que describe una elipse, variable, situada en un plano que contiene al eje , que tiene sus vértices en C y C'.

Dicho elipsoide, referido a ejes rectangulares , admite por ecuación a:

— — —

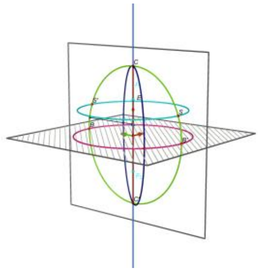


Fig. 3: Elipsoide de Revolución

Construcción de un paraboloide.

Terminada la actividad descripta continuaremos proponiendo a los asistentes la construcción de un paraboloide de revolución.

Construcción de hiperboloides

Finalizaremos con la construcción de un hiperboloide de una hoja y de dos hojas siempre de revolución.

SEGUNDO ENCUENTRO: Construcciones de cuádricas que no son de revolución.

Construcción de un hiperboloide de una hoja.

Realizaremos esta construcción para la cual tendremos en cuenta la definición de **Burgos, J. (1994)**

En el espacio euclídeo , y respecto de los ejes rectangulares , se consideran los puntos A(a,0,0), A'(-a,0,0), B(0,b,0), B'(0,-b,0), C(0,0,c) y C'(0,0,-c) donde a>0, b>0,c>0 son dados. Sean la elipse cuyos semiejes son AA' y BB' y H y H' las hipérbolas cuyos ejes reales son AA' y BB' y su eje imaginario es CC', para ambas. Se llama hiperboloide de una hoja que tiene por ejes reales a AA', BB' y por eje imaginario CC' al lugar geométrico definido, entre otras, de las siguientes maneras, equivalentes entre sí:

1. Lugar geométrico que describe una elipse, variable, situada en un plano perpendicular al eje y que tiene sus vértices en las hipérbolas .
2. Lugar geométrico que describe una hipérbola, variable, que contiene al eje , que tiene sus vértices en y sus extremos del eje imaginario son .

El hiperboloide de una hoja, referido a los ejes , admite por ecuación:

— — —

Nota: a este hiperboloide se lo llama también hiperboloide reglado o hiperboloide hiperbólico.

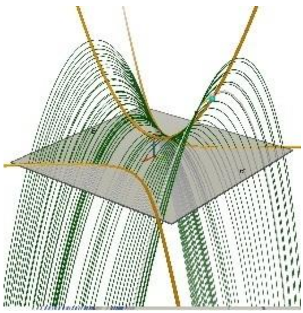


Fig. 4: Paraboloide hiperbólico

Orientaremos a los participantes para construir el

a. Hiperboloide de dos hojas.

b. Paraboloide elíptico.

c. Paraboloide hiperbólico.

Resultados esperados:

Como logros del taller esperamos la posibilidad de parte de los asistentes de:

- Identificar las cuádricas por sus propiedades geométricas.
- Dada una consigna, construir la cuádrica correspondiente.

Referencias

Alsina, C. Burgués, C. Fortuni, J. Invitación a la Didáctica de la Geometría. Madrid. España. Síntesis.

Burgos, Juan de (1994). Algebra Lineal. Madrid. España. MacGarw-Hill.

Duval, A (1993) en Saiz, I. Acuña, N (2006) Ministerio de Educación (Argentina). La inserción de las tecnologías ¿puede cambiar las prácticas matemáticas actuales? Recuperado el 20 de junio de 2012 de http://aportes.educ.ar/matematica/autores.php

Laborde, C. (1999). "A dynamic and visual approach of the teaching of functions with Cabri-Geometre". Seminario Internacional. XXIV Jornadas de Resolución de Problemas. Córdoba. Argentina. Olimpíadas Matemáticas Argentinas (OMA)

Saiz, I. Acuña, N. (2006) Ministerio de Educación (Argentina). La inserción de las tecnologías ¿puede cambiar las prácticas matemáticas actuales? Recuperado el 20 de junio de 2012 de http://aportes.educ.ar/matematica/autores.php

❖❖❖

Cabri 3D na sala de aula

Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
zeze@pucsp.br

Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

Este taller tiene como objetivo concebir y explorar construcciones geométricas espaciales utilizando el *Cabri 3D* y está dirigido a profesores del nivel secundario que enseñan cursos que contienen temas de Geometría Espacial. Resaltamos que no es necesario tener conocimientos del uso de este ambiente de geometría dinámica para participar del taller.

Pensamos que las herramientas y recursos del *Cabri 3D* se pueden transformar en instrumentos, de acuerdo con Rabardel y ser el hábitat en el sentido de Chevallard, para contenidos que no son trabajados en el aula con lápiz y papel, por lo que abordaremos específicamente los temas: algunos tópicos de Geometría Analítica, sólidos arquimedianos, medida de volumen de sólidos y Geometría de las Transformaciones incorporando este ambiente de Geometría dinámica.

Las actividades del taller serán realizadas en dos sesiones de una hora cada una. En la primera sesión, se explorarán los principales recursos y herramientas del *Cabri 3D* mediante la construcción de objetos geométricos espaciales. En la segunda sesión las actividades serán orientadas a construcciones más complejas para solución de problemas de geometría espacial, en las que haremos uso de diversos recursos, inclusive de animación que el *Cabri 3D* posee. Por fin, se hará una reflexión sobre la importancia del buen uso de la tecnología informática, en nuestro caso del *Cabri 3D* en la enseñanza y aprendizaje de geometría espacial.

Palabras clave: Geometría Espacial, Sólidos Arquimedianos, Geometría de las Transformaciones.

Eje temático: Geometría plana y espacial con Cabri

Introducción

Uno de los actuales problemas en el ámbito de la investigación en Didáctica de las Matemáticas es analizar las potencialidades del uso de tecnologías, en particular los *software* como herramientas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En ese sentido, a pesar de que algunas investigaciones señalan ventajas cuando los profesores trabajan con tecnologías en las clases de matemática, sabemos que no están del todo incorporadas en la práctica docente. Es así que aún es posible encontrar profesores que no tienen un computador porque no tienen los recursos o porque lo rechazan o, encontrar aquellos que lo tienen y lo utilizan en clase, solamente como un tutorial es decir, que presentan a sus alumnos una serie de "pasos" a ser seguidos pues esto los mantiene solamente controlando sus producciones.

Para el taller como pensamos trabajar con contenidos de Geometría Espacial utilizaremos el *Cabri 3D*, que como un ambiente de geometría dinámica permite la manipulación directa de los objetos construidos por medio del arrastre.

Sin embargo, no podemos transponer para este ambiente las mismas tareas presentadas en los libros de texto por el contrario es necesario, que las tareas sean concebidas específicamente para este ambiente. Por otro lado, la enseñanza de geometría espacial presenta dificultades para los profesores por ejemplo, muchos de ellos no consiguen representar figuras espaciales; y para los alumnos ya que a veces no logran utilizar sus diseños para apoyar su raciocinio.

Es así que nos centraremos en algunos contenidos matemáticos utilizando el *Cabri 3D* como por ejemplo: la búsqueda de técnicas para la construcción de sólidos arquimedianos, que de acuerdo con Almeida (2010), el estudio de este tipo de sólidos ya formó parte del currículo escolar brasileño y ahora puede ser recuperado porque este ambiente de geometría dinámica permite disminuir las dificultades de representación; la búsqueda de fórmulas para la determinación de la medida del volumen de por ejemplo, sólidos que no son los usualmente utilizados (prisma y pirámide), como el icosaedro ó un arquimediano; la enseñanza de la geometría analítica que, a pesar de no tener grandes problemas de representación con lápiz y papel puede ser enriquecida, con la manipulación directa, para desarrollar por ejemplo, la relación entre la representación espacial de planos y su ecuación; finalmente, la enseñanza de la geometría de las transformaciones, también olvidada en muchos currículos, puede ser ampliada de su visión única en el plano para el espacio. En ese sentido adaptaremos, para el presente taller, algunas actividades de Salazar (2009).

Marco teórico

Para la elaboración de las actividades del taller nos basamos en dos referenciales teóricos, el enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y la teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1992).

El enfoque Instrumental estudia como un artefacto se transforma en un instrumento de tal forma que se integra al sujeto para construir conocimiento matemático (Artigue, 2002). De acuerdo con Rabardel (1995), el instrumento es una entidad mixta, compuesta por el artefacto (material o simbólico) y esquemas de utilización. Es así, que la transformación de artefacto a instrumento articula al sujeto, con sus habilidades y competencias cognitivas, al instrumento y al objeto para el cual la acción es dirigida. Este proceso de transformación de artefacto en instrumento, es llamado por el autor de Génesis Instrumental (G.I.).

Además, Rabardel (1995) señala que la G.I. tiene dos dimensiones: la instrumentación, orientada hacia el sujeto, en la que el artefacto es integrado a su estructura cognitiva, por medio de los esquemas de utilización y que en general exige adaptación; y la instrumentalización, orientada hacia el artefacto y que está determinada por las posibilidades que el sujeto le da a éste y que van más allá de las que el creador le atribuyó.

Así, en un primer momento el *Cabri 3D* es un artefacto para aquel sujeto que nunca tuvo contacto con el software sin embargo, después de explorar algunas de sus herramientas y/o funciones para desarrollar una determinada tarea, éste se puede transformar en instrumento.

Por su parte, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), de acuerdo con Bosch y Chevallard (1999) permite analizar, describir y estudiar las prácticas institucionales, considerando la organización del saber matemático que está en juego. Para Chevallard (2002), el primer aspecto de esa organización se caracteriza por el saber-hacer. Las actividades matemáticas componen una tarea (t) de un cierto tipo (T) por medio de al menos una técnica (τ). El segundo aspecto caracteriza el saber en un sentido restringido, considerando una cierta tecnología (θ) que justifica le técnica y permite, por un lado, pensar al respecto de la técnica y por otro, producir nuevas técnicas. Además, considera una teoría (Θ) que justifica la tecnología.

De acuerdo con Bittar (2011) "el enfoque Instrumental permite comprender mejor como el profesor aprende e incorpora la tecnología en su práctica pedagógica". Es en ese aspecto que la TAD parece complementar al enfoque Instrumental, en el sentido de investigar el aprendizaje matemático, pues permite identificar, en la acción del sujeto, los posibles esquemas de utilización en la construcción de una técnica que permita cumplir una tarea propuesta.

El taller

El objetivo del taller es concebir y explorar construcciones geométricas espaciales utilizando el *Cabri 3D* y está dirigido a profesores del nivel secundario que enseñan cursos que contienen temas de Geometría Espacial.

El taller está dividido en dos sesiones de una hora cada una. En la primera sesión, se explorarán los principales recursos y herramientas del *Cabri 3D* mediante la construcción de diversos objetos geométricos espaciales, como por ejemplo en la tercera actividad, llamada traslación de cubos, (figura 1) que muestra la construcción de la letra T utilizando traslaciones.

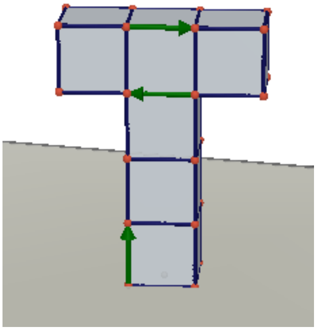


Figura 1: Construcción de la letra T trasladando cubos

En la segunda sesión, las actividades serán orientadas a construcciones más complejas para solucionar problemas de Geometría Espacial, en las que haremos uso de diversos recursos que el *Cabri 3D* posee. Por ejemplo, en la actividad 2 de esta sesión, mostrando la figura 2 abajo, se preguntará cuál sería la fórmula para determinar el volumen del sólido arquimediano cuboctaedro.

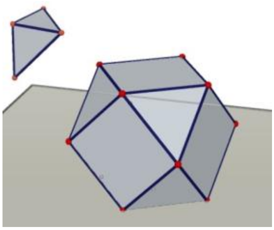


Figura 2: Cuboctaedro

En ambas sesiones se desarrollarán algunos tópicos de geometría analítica, sólidos arquimedianos (figura 2) y medida de volumen de sólidos.

Algunas reflexiones

Esperamos que el taller permita a los profesores identificar las ventajas que el *Cabri 3D* posee para explorar propiedades de objetos espaciales.

Por otra parte, deseamos resaltar que el desarrollo de contenidos de Geometría Espacial solamente usando lápiz y papel no permite, por ejemplo, visualizar todas las caras de un poliedro, mientras que al utilizar este ambiente de geometría dinámica, específicamente el recurso "cambiar el punto de vista" esta dificultad puede ser superada, pues este recurso favorece, identificar las características de un poliedro. Así, resaltamos la importancia de emplear este ambiente de geometría dinámica para crear situaciones en las que su uso sea pertinente.

Las actividades que presentamos en el taller movilizan nociones elementales de Geometría Espacial como: punto, recta, plano, sólidos arquimedianos etc. Señalamos que algunos objetos ya están pre-definidos en las diferentes cajas de herramientas del software y que la combinación de estos, permite construir otros objetos geométricos. Además, las actividades promueven establecer relaciones entre el software y los conocimientos matemáticos de los profesores. En ese sentido, brindan indicios del proceso de Génesis Instrumental, porque las acciones de los profesores al trabajar las actividades durante las dos sesiones del taller, explorando y manipulando las herramientas y recursos del software pueden poner en evidencia algunos esquemas de utilización preestablecidos o desarrollar nuevos esquemas.

Referencias

Almeida, T.C.S. (2010). Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. Tesis de Maestría en Educación Matemática. Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work.

International Journal of Computers for Mathematical Learning. 7, 245-274.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-123.

Cabri 3D: Manual do usuario. Disponible en: http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv2/user_manual_pt_br.pdf

Chevallard Y. (2002). *Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble, 3-32.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Salazar, J.V.F. (2009). Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. Tesis de Doctorado en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

❖❖❖

O Cabri 3D como ferramenta para desenvolver visualização dos primeiros axiomas de geometria euclidiana no espaço

José Carlos Pinto Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Brasil
leivasjc@yahoo.com.br; leivasjc@unifra.br

Resumo

A oficina destina-se a estudantes e professores de diversos níveis educativos interessados no ensino e na aprendizagem de Geometria Espacial; não exige pré-requisitos, a menos de pequena familiarização com softwares de Geometria Dinâmica e se desenvolve em duas sessões. Em Educação Matemática visualização adquire cada vez importância maior, especialmente a partir do desenvolvimento de softwares, os quais constituem uma das possibilidades para o desenvolvimento de habilidades visuais. Leivas (2009, p.22) define visualização como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos". Suas pesquisas apontam para a relevância do Cabri nessa construção. Autores como Zimmermann e Cunninghanm (1991) e Presmeg (2006) dão importância ao tema no sentido de desenvolvimento da habilidade de visualização com o que acreditamos poder contribuir com esta oficina, num tema bastante complexo no inicio da organização da axiomática de Hilbert, em particular, no que diz respeito a Geometria Espacial. Em geral, estudantes não compreendem facilmente os axiomas de incidência e de ordem, base para a edificação do arcabouço geométrico e professores têm dificuldades de criar atividades para seu ensino. A oficina tem por objetivo divulgar e realizar construções no Cabri 3D que facilitem tal compreensão, ao mesmo tempo em que irá explorar as ferramentas do software. Pretende-se propor atividades de reconhecimento de características do plano e da reta como entes geométricos infinitos e ilimitados; posições relativas entre retas, planos e construção de conceito de distância entre eles.

Palavras-chave: visualização, geometria espacial, Cabri 3D, grupos de axiomas.

Eixo temático: Geometría plana y espacial con Cabri.

Geometria, quando estudada com metodologias alternativas aos métodos dedutivos convencionais, torna-se atrativa e prazerosa para os estudantes. Nesse sentido, o uso das tecnologias oferecidas pelos softwares de geometria dinâmica muito têm a contribuir, possibilitando que a mesma se torne tema integrador para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento. Para Almeida (2000, p. 20), *muitos dos desafios enfrentados atualmente têm a ver com a fragmentação do conhecimento, que resulta tanto de nossa especialidade quanto, e principalmente, do processo educacional do qual participamos.*

O software Cabri, um dos pioneiros para o ensino e a aprendizagem em geometria, apresenta uma interface que favorece e estimula a descoberta matemática, especialmente, a partir dos aspectos intuitivos que o professor pode proporcionar na organização do processo educacional sob sua responsabilidade.

Para Fischbein (1987) a intuição é uma forma de conhecimento que possibilita a aquisição de confiança e certeza em fatos matemáticos que se podem "ver" com a própria mente.

> É a necessidade para uma certeza comportamental, prática, não convencional, implicitamente significativa que cria a crença quase instintiva na existência de tais certezas finais e, consequentemente, a busca por elas. Foi provavelmente Descartes quem melhor expressou esta visão: se conhecimento é sempre o produto de uma mente ativa, tem-se de encontrar na própria mente o critério pelo qual uma certa verdade pode ser distinguida de certas aparências. (FISCHBEIN, 1987, p. 7)

Para o mesmo autor a percepção, uma forma de conhecimento, difere da intuição, pois essa vai além dos fatos perceptíveis, necessitando uma extrapolação das informações advindas desses fatos. As representações intuitivas das atividades podem ser obtidas na tela gráfica do Cabri, e, posteriomente, devem ser comprovadas pelo processo intuitivo. Com isso, a passagem da representação visual na tela pode proporcionar a construção de estruturas mentais que denomino de visualização: *um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos*.

O Cabri 3D, quando utilizado para desenvolver geometria espacial, é um facilitar deste processo de construção uma vez que, como afirmou Sancho (2006), a sala de aula deve ser ampliada de modo a tornar-se um ambiente comunicativo onde professores e alunos possam atuar numa nova perspectiva do que seja interação entre as partes. As ferramentas oferecidas pelo software proporcionam ao estudante experimentações dinâmicas e um número muito grande de possibilidades de realizar construções em curto espaço de tempo.
Borba e Villarreal (2005, p.75) indicam que o tratamento experimental ganha força ao se utilizar tecnologias, pois ele proporciona:

> - A possibilidade de testar uma conjectura usando um número maior de exemplos e de oportunidades de repetir o experimento, devido ao rápido feedback proporcionado pelo computador;
>
> - A oportunidade de fornecer diferentes tipos de representações de uma dada situação mais facilmente;
>
> - Uma maneira de aprender matemática que se alinha com modelagem e tratamento pedagógico.

A oficina tem por objetivo introduzir as ferramentas do Cabri 3D ao mesmo tempo em que busca realizar atividades de construção da axiomática euclidiana do espaço tridimensional. Mediante uma sequência de três atividades, os participantes podem reconhecer nomenclatura, axiomas e relações entre pontos, retas, planos e espaço.

Atividade 1. Represente três pontos quaisquer no espaço, usando o Cabri 3D e os denomine por A, B e C.

Esta atividade tem por objetivo explorar as primeiras construções de ponto, reta, cor de ponto e de reta, estilo de ponto e de reta, tamanho de ponto e raio de curva, bem como explorar o registro das construções utilizando “nova vista de texto”. Espera-se que os participantes sejam capazes de identificar axiomas de incidência no espaço (pertencer ou não pertencer). Para tal é proposta a sequência de construções a seguir.

1. Existe reta passando pelos três ao mesmo tempo?
    1.1. Qual estratégia usar para responder? Registre-a em uma “nova vista de texto”.
    1.2. Traçar retas r, s, t passando por cada dois dos pontos representados.
2. Em caso de responder não à pergunta 1, existe plano contendo os três? Do contrário, deslocar um dos pontos de modo a não estarem os três alinhados.
    2.1. Registre sua justificativa em “nova vista de texto”.
    2.2. Os três pontos estão nos limites visuais do plano?
    2.3. Em caso negativo à sua última resposta, movimente-os de modo a que fiquem na parte sombreada, ou seja, nos limites visuais do plano.
    2.4. O que podes concluir sobre os pontos antes e depois de movimentá-los? Qual é a característica principal do plano que isso sugere?
3. Enuncie o axioma que relaciona pontos e plano, ou seja, determinação do plano?
4. Considerando o axioma correspondente ao anterior para ponto e reta, quando do estudo de Geometria Plana, como enuncias o axioma que relaciona ponto – reta – plano no espaço?
5. Obtenha uma reta r num plano α. Modifique sua cor para amarelo e espessura “muito largo”. Altere a cor do plano e o estilo para vazio.
    5.1. Crie um ponto A fora do plano α. Como saber se o ponto pertence ou não ao plano? Argumente isso numa “nova vista de texto” em sua construção.
    5. 2. Obtenha a reta t passando por A e perpendicular ao plano α.

- Como garantir que a reta foi construída corretamente? Elabore uma estratégia e comprove.

Atividade 2. Ilustre com uma construção a afirmação: “uma reta e um ponto fora dela determinam um único plano”.

Esta atividade busca, em uma nova construção, relacionar as descobertas axiomáticas obtidas na atividade 1, de modo que os participantes possam desenvolver argumentações convincentes a partir dos resultados obtidos.

1. Descreva a sua construção e registre-a em “nova vista de texto”.
2. Nomeie cada um dos objetos geométricos construídos.
3. Você poderia utilizar argumentos, axiomas e definições anteriores para comprovar a afirmação?

Atividade 3. Represente um plano α no espaço, na posição vertical ou inclinada, no estilo hachuras finas e esconda o ponto.

A atividade avança nas ferramentas disponíveis no Cabri 3D na medida em que são exploradas aqui cor, espessura e estilo de superfícies, no caso, do plano α.

1. Represente dois pontos distintos quaisquer P e Q no espaço, na cor azul e no estilo diamante.
2. Construa o segmento de reta PQ, vermelho, com raio da curva muito fino.
3. O segmento PQ atravessa o plano? Use os recursos do Cabri para justificar como verificas isso.
   - 3.1. Caso não tenha conseguido, obtenha a intersecção entre o segmento de reta e o plano, nomeando-a por A.
     - Se o ponto não aparecer movimente uma das extremidades do segmento até ele surgir.
     - Se o ponto A já apareceu na sua construção, movimente uma das extremidades do segmento até ele desaparecer.
   - 3.2. A partir dessa exploração defina semi espaço.

3.3. Faça uma analogia plano/semi espaço/espaço de forma similar a feita com ponto/semirreta/reta.

Espera-se que as atividades aqui propostas possam contribuir para a prática docente dos participantes, uma vez que podem ser aplicadas a classes de estudantes que iniciam o estudo de geometria espacial, sem conhecimentos prévios tanto do software quanto de geometria, fornecendo assim uma contribuição didática do Cabri 3D ao ensino, que poderá vir a contribuir para um melhor aproveitamento na aprendizagem dessa área do conhecimento matemático.

Para finalizar, enunciamos os axiomas de Hilbert (2003), os quais esperamos que sejam retomados durante a oficina.

Grupo 1: axiomas de incidência – pertencer ou não pertencer

1. Para cada dois pontos A, B há sempre uma reta que está associada com os dois.
2. Para dois pontos A, B não há mais do que uma reta que está associada com os dois.
3. Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta.
4. Para quaisquer três pontos A, B e C que não estão sobre uma mesma reta, há sempre um plano α, que está associado com os três. Para cada plano há sempre um ponto que está associado com ele.
5. Para cada três pontos que não estão sobre uma mesma reta, não há mais do que um plano que está associado com qualquer dos três pontos A, B e C.
6. Se dois pontos A e B de uma reta r estão num plano α, então cada ponto de r está no plano α.
7. Se dois planos α e β têm um ponto comum A, então têm, pelo menos, mais um outro ponto em comum.
8. Há, pelo menos, quatro pontos que não estão no mesmo plano.

Referências

Borba, M.C. and Villarreal, M.. (2006). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*: information and communication technologies, modeling, experimentation an visualization. USA: Springer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

Hilbert, D. (2003). *Fundamentos da geometria*. Lisboa: Gradiva.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese (Doutorado em Educação)–Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

Presmeg, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: Gutierrez, A.; Boero, P. (Ed.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers. p. 205-235.

Sancho, J. M., Hernández, F. (2006). *Tecnologias para transformar a educação*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

Zimmermann, W; Cunningham, S. (1991).*Visualization in teaching and learning mathematics: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America*. Washington, USA: Mathematical Association of America.

❖❖❖

Una propuesta didáctica, a partir de la construcción de mandalas en Cabri II, para potenciar las estrategias de aprendizaje en geometría

Lilian del C. Vargas Villar
Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles, Chile
lilivargas@udec.cl

María F. Villalobos Villar
Universidad de Concepción
Campus Los Ángeles, Chile
mvillalo@udec.cl

Resumen

Este taller nace con el propósito de abordar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva psicopedagógica que contribuya al desarrollo de las capacidades cognitivas de los alumnos/as y al logro de los objetivos actitudinales asociados a esta.

La construcción de mandalas utilizando el software CABRI II permite al alumno desarrollar habilidades visuales básicas como la coordinación visomotora, percepción figura fondo, etc, habilidades de comunicación, ampliando su lenguaje geométrico, desarrollando conceptos y relaciones geométricas a través del dibujo y la construcción.

La propuesta pedagógica propone situaciones de aprendizaje utilizando CABRI II en la construcción de mandalas. *El mandala es un arte milenario que permite por medio de un soporte gráfico llegar a la meditación y a la concentración, para exprimir nuestra propia naturaleza y creatividad. Está constituida por un conjunto de figuras y formas geométricas concéntricas.*

Estas situaciones de aprendizaje fueron aplicadas con alumnos de pregrado de Educación General Básica de la Universidad de Concepción Campus Los Ángeles y pueden ser desarrolladas desde sexto año básico de acuerdo a los programas de estudio

oficial del MINEDUC, donde se incorporan conceptos geométricos como: construcción de polígonos inscritos en una circunferencia, construcción de circunferencias tangentes interiores a una circunferencia dada, construcción de una circunferencia tangente a los lados de un ángulo, simetrías, rotaciones, traslaciones, homotecias, etc.

El taller está dirigido a profesores de Educación Básica y media y permite a los participantes desarrollar habilidades para utilizar las herramientas de CABRI II, creando macros para dividir segmentos en razón áurea, construyendo pentágonos a partir de un segmento dividido en razón áurea, dibujando espirales áureos y polígonos regulares inscritos en una circunferencia, aplicando transformaciones isométricas para dar sentido y belleza a la creación de los mandalas.

Palabras clave: mandala, razón áurea, circunferencia, transformaciones isométricas.

Eje temático: Experiencias educativas con asistencia de Cabri.

El mandala es un círculo "mágico" con efectos relajantes que actúa sobre nosotros armonizando nuestro mundo interior con el exterior. Los mandalas están inspirados en la naturaleza, reproducen sus simetrías y sus colores en una estructura con forma de círculo, constituida por un conjunto de figuras y formas geométricas concéntricas.

El mandala es originario de la India, pero también encontramos estas representaciones en otras culturas como los indígenas de América (Navajos, Aztecas, Incas, etc.) o los aborígenes de Australia.

El mandala es un instrumento de pensamiento. Es también una forma de arte-terapia. Sus virtudes terapéuticas permiten recobrar el equilibrio, el conocimiento de si mismo (intuición creativa e interpretación de sus propias creaciones), el sosiego y la calma interna (concentración y olvido de los problemas), necesarios para vivir en armonía. En la construcción de mandalas se utilizan trazos, distintas formas y colores, se emplean conceptos geométricos tales como puntos, segmentos, ángulos, circunferencia, polígonos regulares, polígonos estrellados, rotaciones, traslaciones, círculo, sectores circulares, etc.

Para diseñar un mandala revisaremos algunas construcciones básicas utilizando CABRI II consiguiendo objetos complejos e interesantes.

Construcciones básicas.

Para diseñar un mandala que tenga en su interior triángulos equiláteros, hexágono y la flor de la vida (formada por doce arcos de circunferencia), se divide la circunferencia en seis partes congruentes.

Para ello primero dibujamos circunferencia con centro O y radio a elección.

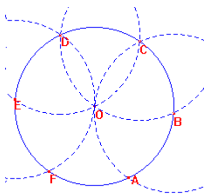


Figura 1

Luego dibujamos triangulo equilátero uniendo mediante la herramienta triángulo los puntos A, C, E. Aplicando rotación del triángulo ACE a 180° con respecto al punto O, tenemos nuestro primer mandala.

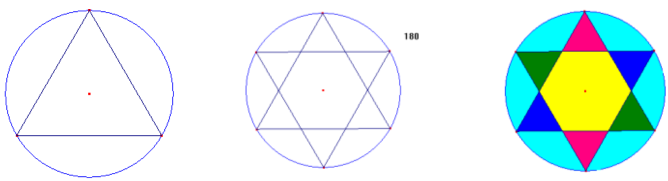


Figura 2

Dibujando luego el hexágono inscrito en la circunferencia y combinando con los triángulos anteriores, tenemos un nuevo diseño en el que podemos ahora observar nuevos polígonos producto de las intersecciones de los polígonos dibujados. Si observamos con atención podemos identificar trapecios, triángulos obtusos, rombos, trapezoides, etc.

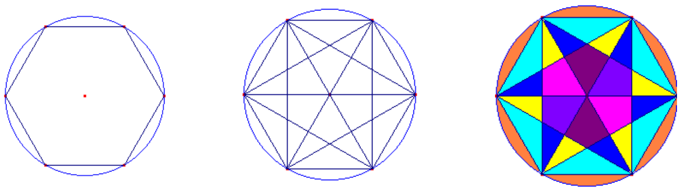


Figura 3

Otro modelo interesante es el diseño de la flor de la vida, en este modelo se trabaja sólo con circunferencias siempre del mismo radio.

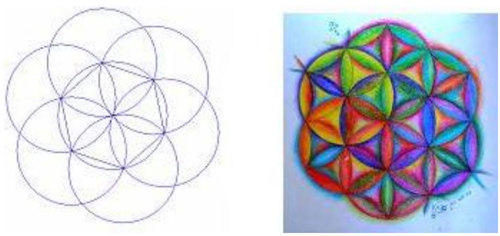


Figura 4

Un modelo interesante resulta de trabajar el concepto de circunferencias tangentes interiores en un ángulo cualquiera. Para ello se dibuja un ángulo y se traza la bisectriz, luego dibujamos un punto O cualquiera en la bisectriz y trazamos recta que pase por O, perpendicular a cada lado del ángulo

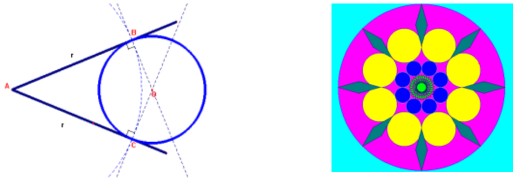


Figura 5

Mandala dibujado con circunferencias tangentes interiores a una circunferencia dada.

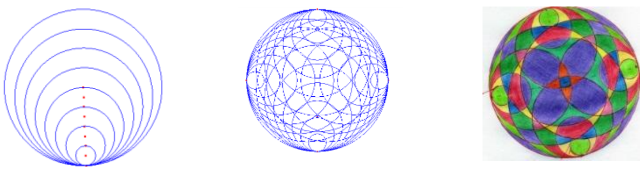


Figura 6

Diseño de mandala con circunferencias tangentes entre sí y tangentes interiores a una circunferencia mandálica.

Para dibujar este diseño:

Se divide la circunferencia dada en doce partes iguales.

Se traza recta tangente a la circunferencia en el punto P y prolonga el radio O1 que corta a la tangente AP en M.

Dibujamos bisectriz del ángulo OMP que corta al radio PO en N se describe una circunferencia que cortará a los radios 2,4,6,8,10 y P en los centros de las circunferencias.

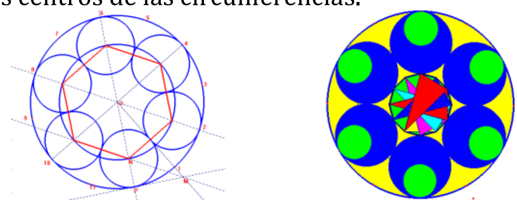


Figura 7

Diseño de mandala utilizando pentágono regular, pentágono estrellado y la razón Áurea.

Primero construimos macro para dividir un segmento en razón áurea.

División de un segmento en razón áurea.

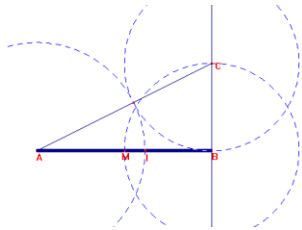


Figura 8

Sea el segmento AB trazamos perpendicular en B. M punto medio de AB. Con centro en B y radio BM dibujamos circunferencia que determina el punto C.

Trazamos segmento AC.

Trazamos arco de circunferencia de centro C y radio CB, que corta AC en D.

Trazamos arco de circunferencia de centro A y radio AD, que corta AB en I

El punto I divide al segmento AB en razón Φ

Construcción del Pentágono regular.

1. Construye segmento AB dividido en razón áurea
2. traza perpendicular a AB en O.
3. Dibuja circunferencia de centro O y radio OA.
4. Dibuja circunferencia de centro D y radio DB.
5. Ya tienes dos de los lados del pentágono DE y DF.

6. Con radio DE y centro en E determina el punto H.
7. Con centro en F y radio FD encuentra G.
8. Con Polígono dibuja pentágono EDFGH

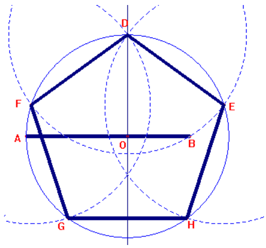


Figura 9

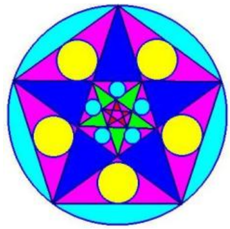


Figura 10

El pentágono se construye a partir del segmento AB dividido en razón áurea en el punto O.

Al construir el pentágono regular EDFGH se tiene:

Otras construcciones utilizando hexagono regular y otros polígonos

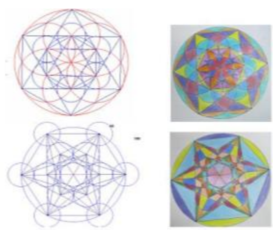


Figura 11

Referencias

Barrales Marco. (2002). Taller de Geometría con TI-92 plus. En *Actas Segundo Encuentro de Matemática*. Colegio Alemán de Concepción. Chile.

Carral Michel. (1995). *Géométrie.* Editorial ellipses. Francia.

Chamorro María del Carmen. (2005). *Didáctica de las Matemáticas.* Editorial Pearson Educación. Madrid. (España).

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Organización de Estados Iberoamericanos para Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. Depósito Legal: M-9207-1993.

❖❖❖

El Uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software Cabrí "Del pensamiento numérico al pensamiento algebraico-variacional"

Jose Francisco Puerto Monterroza
Institucion Educativa Antonio Lenis
Universidad de Sucre, Colombia
Jopuermon@Gmail.Com

Resumen

El propósito de este taller es mostrar como con el uso del cabrí, y la construcción de algunos fractales (conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y el copo de nieve de Von Koch) se pueden identificar patrones numéricos y/o geométricos. Esta propuesta se fundamenta en el desarrollo de actividades de **generalización** de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras; se involucra la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización como lo propone Mason (1992). Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico para mejorar el proceso de **transición de la Aritmética al Algebra.**

Palabras Clave: patrones numérico, generalización, sistemas algebraicos, expresión algebraica, fractales.

Pertinencia

"La exposición repetida de construcciones de formulas, como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las

expresiones algebraicas que aparecerán después en el estudio del algebra". Demana (1990).

Diferentes investigaciones realizadas en los últimos años (TIMSS, PISA, etc) develan las dificultades que presentan los estudiantes de los primeros niveles de la educación secundaria cuando se enfrentan a problemas algebraico, manipulación de expresiones algebraicas y significación de éstas, interpretación de información dada en distintos lenguajes (gráficos, tabulares, algebraicos) y solución de problemas de cambio y variación, entre otros. Esto se debe quizás a que el currículo durante los primeros grados está basado solamente en el estudio de la Aritmética, y que tópicos como **el Algebra**, que podrían ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas de pensamiento como: observar, analizar, conjeturar, **generalizar**, etc., son reservados para ser estudiados en los grados superiores. Además, la aritmética frecuentemente se enfoca en los resultados de los procesos de cálculo más que en los aspectos relacionales y estructurales, oponiéndose así al reconocimiento de las reglas del álgebra, que constituyen expresiones que expresan **generalidades**, donde los patrones que se observan aparecen en las mismas colecciones de números, y en las operaciones comunes que se hacen con estos números o como modelos que describen situaciones.

El hecho de que el álgebra pueda ser vista como la formulación y manipulación de proposiciones generales sobre los números, hace que la experiencia previa que el estudiante ha tenido con la estructura de expresiones numéricas en la escuela, tenga efecto sobre la habilidad para asignarle sentido a esta. Por esto el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM), establece que se deben propiciarse actividades que involucren la **generalización** de patrones numéricos para modelar, representar o describir patrones físicos, regularidades y patrones que se hayan observado. Estas exploraciones informales de conceptos algebraicos deben contribuir a que el estudiante adquiera confianza en su propia capacidad de abstraer relaciones a partir de información contextual y de utilizar toda una gama de representaciones para describir dichas relaciones. Cuando los estudiantes elaboran gráficas, tablas de datos, expresiones, ecuaciones o descripciones verbales para representar una relación simple, descubren que representaciones diferentes dan lugar a diferentes interpretaciones de una situación.

Esta propuesta se fundamenta en lo descritos anteriormente y se plantean actividades de **generalización** de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras; se involucra la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización como lo propone Mason (1992). Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. De esta manera, el pensamiento algebraico surge como **generalización** del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación.

La metodología a utilizar en este taller esta fundamentada en el uso del software de geometría dinámica **Cabrí**, y la inmersión en el fascinante mundo de los **fractales** que permite a través de construcciones geométricas modelar y explorar problemas que conllevan a desarrollar en los alumnos los pensamientos matemáticos.

Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a los primeros niveles de educación superior.

Marco teorico

La **generalidad** es un aspecto central en la actividad matemática, a todo nivel, y, a la cual se puede retornar una y otra vez, cualquiera que sea el tema particular de discusión. Las matemáticas comprenden muchas generalizaciones, ya sea que tomen forma de métodos, procedimientos, o de fórmulas, y estas pueden ser vistas como originándose de la misma manera que las propias generalizaciones de los patrones, hechas por los alumnos.

La generalización es uno de los procesos que ocurren en cualquier nivel del pensamiento matemático y que está incluido en uno más global, el proceso de abstraer, "*To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity*" (Dreyfus, 1991, p. 35). La generalización es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y **algebraico**, es base de la abstracción (Mason, 1985), es indudable entonces la importancia de su tratamiento. Está relacionada con otros procesos propios de la actividad matemática, que podrían denominarse más particulares como: inducir, observar, descomponer, hacer analogías e identificar características comunes. Y debe pasar por varias etapas; a saber: La percepción de un patrón, la expresión del patrón, el registro del patrón y la prueba de validez del patrón (Mason, Socas, Sessa, Butto y Rojano)

Por otra parte las reglas del álgebra constituyen expresiones que expresan **generalidades**, pero los patrones que se observan aparecen en las mismas colecciones de números, y en las operaciones comunes que se hacen con estos números o como modelos que describen situaciones. El álgebra es el lenguaje con que se expresa dicha generalidad. Para aprender el lenguaje del álgebra es necesario tener algo que decir, se debe percibir algún patrón o regularidad y luego tratar de expresarlo en forma sucinta, para poder comunicarlo a alguien. (Rutas hacia el álgebra. John Mason y otros, 1999). Es así como el mayor reto en la enseñanza del álgebra es promover la percepción de la "**generalidad**" que esta detrás de los símbolos, para lo cual es necesario ampliar la notación del lenguaje aritmético y utilizar las propiedades características de los sistemas numéricos. De esta manera, el pensamiento algebraico surge como **generalización** del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación.

Una manera propicia de experimentar con procesos de generalización y búsqueda de patrones, entre otros, es aprovechar las posibilidades que brindan la incorporación de las TICs en el aula y muy especialmente el software de geometría dinámica CABRI, por que permite: el descubrimiento, la experimentación, la exploración, la construcción de modelos, la formulación de hipótesis, la demostración, la responsabilidad, la creatividad, el análisis, el trabajo colaborativo, en fin la actividad del estudiante sobre el objeto-conocimiento desde diferentes aristas (Cervantes & Viquez, 1994, 144), es decir, ver la matemática de una manera mas activa y dinámica: la matemática experimental.

Este taller se fundamenta en este software y en la hoy naciente **GEOMETRÍA FRACTAL**, que es una poderosa herramienta que permite modelar fenómenos impredecibles y fascinantes de la naturaleza y que fue dada a conocer al mundo en los años setenta por Benoît Mandelbrot. El término **fractal** fue acuñado por el y hace referencia a la idea de "partido" o "fracturado". Como característica fundamental se considera la autosemejanza o autosimilaridad de su forma, la reiteración o iteración en la formación de su modelo, la dimensión que intenta describir su tamaño o densidad y el concepto de atractor para caracterizar la figura cuando el proceso de iteración tiende al infinito. Esta idea es suficiente para pensar en figuras que, por ejemplo, tienen área finita y perímetro infinito. Quizás algunos conjuntos ya clásicos puedan resultar familiares, y que podrían servir de ejemplos bastante sencillos para estas características (como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, o la curva de Koch).

Cabe indicar que este trabajo se centra mas en las regularidades numéricas que se presentan entre los elementos constitutivos del fractal, que en la construcción formal de los conceptos fractales.

El trabajo con actividades sobre reconocimiento de patrones y su generalización, proporciona la oportunidad de acordar nuevas formas de comunicación en las que prevalece y se le da sentido al lenguaje algebraico como una forma sucinta para expresar conjeturas, y someterlas a verificación y refutación. Las actividades planteadas sobre generalización, posibilitan el desarrollo de habilidades como la predicción y la sistematización, las cuales se deben explicitar, para propiciar la discusión sobre su importancia no solo en las matemáticas sino en situaciones cotidianas.

El propósito de este proyecto de aula es mostrar como con el uso del **Cabrí,** y a través de la manipulación de objetos geométricos y la identificación de regularidades numéricas, se puede mejorar el tratamiento del proceso de transición de la Aritmética al Algebra, trabajando dos aspectos centrales: el desarrollo del Pensamiento Numérico y el Pensamiento Algebraico.

Se pretende abordar la enseñanza-aprendizaje de las nociones de variable (la letra con sentido algebraico), expresiones algebraicas y ecuaciones, integrando contextos numéricos (pensamiento numérico) y geométricos (pensamiento geométrico), en un marco del álgebra como lenguaje, en un medio ambiente informático de aprendizaje.

Objetivo general

Favorecer un acercamiento significativo a conceptos fundamentales del álgebra como expresiones algebraicas y ecuaciones, desde actividades funcionales y de **generalización**.

Objetivos específicos

1. Fomentar el uso de las TICs en el desarrollo de los procesos de aula.
2. Propiciar en los estudiantes el desarrollo de competencias para: observar, medir, valorar, analizar e interpretar situaciones numéricas.
3. Desarrollar en los estudiantes competencias para: ver relaciones y establecer conexiones, hacer predicciones y **generalizaciones**, hasta llegar a la modelización y la formalización de leyes
4. Fomentar el desarrollo del razonamiento inductivo-deductivo.
5. Propiciar el desarrollo de la competencia comunicativa.
6. Crear espacios para el trabajo cooperativo.

7. Mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Resultados que se esperan obtener

Afianzar la comprensión de las operaciones matemáticas básicas. El desarrollo de valores como: la autoestima, la responsabilidad, la autonomía, la solidaridad, la creatividad y el emprendimiento.

La ceración de nuevas ideas a partir de lo concreto para interiorizar conceptos abstractos.

El desarrollo de competencias para la identificación de regularidades numéricas para su generalización y modelación.

Familiarizar al estudiante con el manejo del lenguaje gráfico-tabular-algebraico.

Desarrollar en los alumnos habilidades de orden superior como explorar, conjeturar, razonar, reflexionar y comunicar matemáticamente, así como habilidad para usar efectivamente sus habilidades cognitivas y metacognitivas en la solución de problemas rutinarios.

Minimizar las deficiencias que se presentan en el proceso de transición de la aritmética al algebra.

Fomentar el trabajo cooperativo.

Estandares de calidad a desarrollar

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

1. Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, etc).
2. Identificar regularidades y patrones numéricos, las propiedades de los números, sus relaciones y operaciones utilizando calculadoras o computador.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos:

1. Diferenciar atributos y propiedades de objetos bidimensionales y tridimensionales.

2. Hacer conjeturas y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

1. Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, etc).
2. Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
3. Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
4. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).
5. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.
6. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas

Actividades

1. Construir, mediante una secuencia de instrucciones usando Cabrí, el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y el copo de nieve de Von Koch
2. Encontrar patrones aritméticos y algebraicos en el proceso de construcción del conjunto de Cantor, triángulo de Sierpinski y copo de nieve Von Koch.

Referencias

Briggs, J. (1994). *Espejo y Reflejo: Del Orden al Caos.* Barcelona: Gedisa.

Guzmán, M. (1993). *Estructuras Fractales y sus Aplicaciones*. Barcelona: Labor.

García, A. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de Las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas*. Bogotá: Punto Exe editores.

Mason J. (1999). *Rutas hacia el álgebra*.Traducción por Cecilia Agudelo Valderrama. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares Básicos de calidad - Matemáticas*.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares - Matemáticas*.

Rosillo, N. (1997). *Fractales con el Miniordenador TI-92*. Madrid: Faster

Soca, M. M., (1997): "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, cap. 5, pp. 113-141" en L. Rico y otros: *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Ed. Horsori (en prensa)

Soca, M. M., y otros (1989). *Iniciación al Algebra*. Síntesis. Madrid.

Soca, M. M., y Palarea, M. M. (1987). *Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el algebra escolar*. Uno, núm14, pp. 7-24. Barcelona

❖❖❖

Un acercamiento al concepto de función a través de la manipulación de objetos geométricos, donde se presentan patrones funcionales de dependencia y de generalización, utilizando el Cabrí

Jose Francisco Puerto Monterroza
Institución Educativa Antonio Lenis
Universidad de Sucre
Sincelejo-Sucre, Colombia
jopuermon@gmail.com

Experiencias educativas con asistencia de cabrí

Resumen

Con este taller se pretende mostrar como con el uso de cabrí se puede favorecer un acercamiento significativo al concepto de **función** a través de actividades funcionales y de generalización y una movilidad por los diferentes sistemas de representación (verbal, tabular, gráfico y algebraico).

Se inicia haciendo la construcción de un cuadrado (triángulo o círculo) a partir de un segmento dado y mediante la manipulación de este se puede establecer una relación funcional de dependencia entre una **variable inicial** (segmento) y una **variable final** (tamaño, perímetro o área) del cuadrado (triángulo o círculo), posibilitándose así la **visualización** y el reconocimiento de patrones de variación y cambio entre magnitudes. Se hace un registro **tabular** (lado vs perímetro o lado vs área) que nos permita determinar de una manera **cuantitativa** la relación de dependencia entre variables, en este caso geométricas.

Finalmente se hace un registro **gráfico** que permite ver de manera **cualitativa** las características globales de la función, lo que facilitara la identificación y caracterización de un **modelo** funcional y su correspondiente **expresión algebraica.**

El cabrí, es por tanto el software ideal para el desarrollo de este trabajo por que permite el estudio de fenómenos de cambio y su expresión a través de diversos sistemas de representación.

Esta dirigido a docentes de todos los niveles y tiene una duración de 90 minutos.

Palabras Clave: variable inicial, variable final, patrones funcionales, generalización, función.

Pertinencia

Es muy difícil comprender nuestro mundo circundante si lo consideramos sin movimiento, *sin cambio*, de hecho no existe fenómeno en la naturaleza o en la sociedad que escape al fenómeno del cambio. Nuestra vida diaria y el mundo que nos rodea son siempre cambiantes, por ejemplo: en las carreteras los autos recorren distancias cambiantes, la temperatura ambiental cambia periódicamente, la población de nuestro país también cambia, el volumen de un recipiente que se llena con agua va cambiando, etc. En todos estos fenómenos hay siempre cosas que cambia; esas cosas cambiantes como la distancia, la temperatura, la población y el volumen, pueden ser medidas y suelen llamárseles **Magnitudes Variables** , pero estas magnitudes no varían por si solas sino que dependen de la variación de otras.

La finalidad de llegar a determinar con precisión como varían ciertas magnitudes que dependen de otras, es lo que da origen al estudio de las funciones, entendiéndose de forma intuitiva a una función matemática: **"Como una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables"**

Uno de los conceptos matemáticos con aplicaciones directas en la vida diaria es el de **función**. A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real y describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo. Las diferentes representaciones de las funciones nos permiten obtener información rápida para resolver problemas.

Por sus múltiples aplicaciones, el concepto de función es fundamental en el estudio de cualquier rama científica. Por esto se pretende con este trabajo, y mediante el software **CABRI,** presentar una estrategia didáctica que permita un acercamiento significativo al concepto de función a través de la manipulación de objetos geométricos donde se presentan patrones funcionales de dependencia. Cuando los patrones expresan regularidades numéricas se establece una relación funcional general que se presenta en lenguaje natural, tablas de valores, gráficos cartesianos y expresiones simbólicas que recogen las características fundamentales del patrón de variación.

Es decir que mediante este software se pueden modelizar situaciones de variación usando las representaciones verbales, concretas, pictóricas, gráficas y algebraicas tal como lo propone el NCTM (2000).

Marco Teorico

En l637, el matemático francés RENE DESCARTES (l596-l650), revolucionó las Matemáticas al unir sus dos ramas principales: Álgebra y Geometría. Con ayuda del plano Coordenado de Descartes, los conceptos geométricos pudieron formularse analíticamente y los conceptos algebraicos visualizarse gráficamente. Lo que generó una estrecha relación entre las técnicas gráficas y algebraicas (ecuaciones).

En el siglo XVI el estudio del movimiento apareció como problema central de la física y como consecuencia de ello se desarrollaron las matemáticas que estudiaban la interdependencia de las magnitudes variables, es decir el concepto de variable y de función. Así se puede afirmar que las leyes físicas son proposiciones que describen la forma en que ciertas magnitudes dependen de otras cuando éstas varían. A los problemas generados por la física y especialmente al estudio del movimiento, se deben añadir las numerosas situaciones que se pueden encontrar en el medio y en las otras ciencias, incluidas la propia matemática.

La idea de función nace a partir del estudio de los fenómenos de cambio y la finalidad de llegar a determinar con precisión como varían ciertas magnitudes que dependen de otras, es lo que da origen al estudio de las funciones. El estudio de las funciones es un tema que presenta diferentes dificultades en torno a su aprendizaje. Históricamente es un concepto que evolucionó en el tiempo. Dentro de las definiciones que registra dicho proceso, podemos enunciar a la función como una fórmula, la función como una regla de correspondencia, la función como un conjunto de parejas ordenadas, todas las cuales pueden ser exploradas dentro del ambiente informático Cabrí-Géométre.

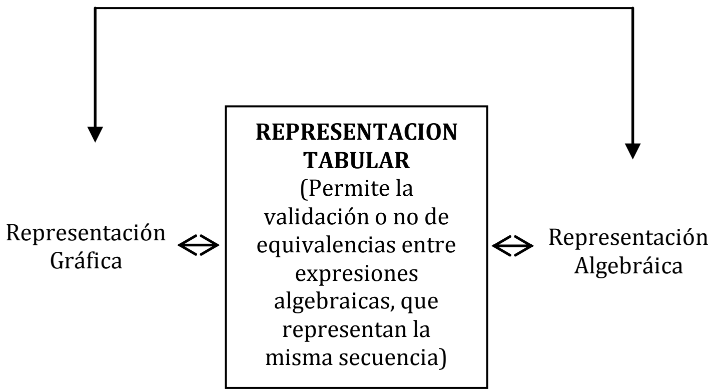
La metodología a utilizar en este taller esta fundamentada en el uso del software de geometría dinámica Cabrí, que permite a través de construcciones geométricas modelar y explorar problemas que conllevan a desarrollar en los alumnos los pensamientos matemáticos.

El trabajo se inicia con la construcción, a partir de un segmento, de un cuadrado y se empieza a explorar la variación que sufren el perímetro y el área. Se hace una tabulación de estos datos y se determina la relación funcional que hay entre la longitud del lado con el perímetro y con el área. Se hacen sus respectivas trazas y se contrasta la gráfica del lugar geométrico con la relación funcional obtenida de la tabla. Por ultimo se determina la ecuación y confrontan con los resultados obtenidos.

Esto también se hace con un triángulo equilátero y con un círculo.

Las nuevas teorías del Aprendizaje así como las nuevas tendencias en Educación Matemática han puesto de manifiesto la importancia de realizar tareas de conversión de una representación a otra del concepto matemático en cuestión. Los estudios de Matemáticas deben dar oportunidad a los estudiantes para que puedan modelizar situaciones usando representaciones verbales, concretas, pictóricas, gráficas y algebraicas" (NCTM, 2000).

En este proyecto se pretende hacer uso eficiente de las diferentes representaciones de las funciones y sus correspondientes tareas de conversión de una representación a otra. El proceso se realiza teniendo en cuenta siempre el siguiente esquema:



En donde las flechas representan que el proceso no necesariamente se da en un orden determinado. La representación tabular en el centro da cuenta de su carácter mediador entre las representaciones de los diferentes lenguajes que anteriormente se conocían (lenguaje gráfico y habitual) y un nuevo lenguaje (lenguaje algebraico). Por otro lado las actividades que involucran los elementos enunciados con este esquema permiten que se utilice la letra como incógnita (en situaciones donde se requiere encontrar el valor de una de las variables cuando la otra toma un valor cualquiera), la letra como representante de un numero generalizado (en el momento de simbolizar un patrón de generalización) y la letra evaluada (cuando verifican la simbolización que encontraron).

Objetivo general:

Favorecer un acercamiento significativo al concepto de **función** a través de actividades funcionales y de generalización y una movilidad por los diferentes sistemas de representación (verbal, tabular, gráfico y algebraico).

Objetivos especificos

- Posibilitar que los estudiantes reconozcan patrones de variación y cambio y los expresen a través de diferentes representaciones que permitan su tratamiento, conversión y manipulación operatoria.
- Propiciar en los estudiantes el desarrollo de competencias para: observar, medir, valorar, analizar e interpretar situaciones numéricas.
- Desarrollar en los estudiantes competencias para: ver relaciones y establecer conexiones, hacer predicciones y **generalizaciones**, hasta llegar a la modelización y la formalización de leyes
- Fomentar el desarrollo del razonamiento inductivo-deductivo.
- Propiciar el desarrollo de la competencia comunicativa.
- Crear espacios para el trabajo cooperativo.
- Propiciar un aprendizaje significativo.

Resultados que se esperan obtener

Afianzar la comprensión de las operaciones matemáticas básicas. El desarrollo de valores como: la autoestima, la responsabilidad, la autonomía, la solidaridad, la creatividad y el emprendimiento.

La ceración de nuevas ideas a partir de lo concreto para interiorizar conceptos abstractos.

El desarrollo de competencias para la identificación de regularidades numéricas para su generalización y modelación.

Familiarizar al estudiante con el manejo del lenguaje gráfico-tabular-algebraico.

Desarrollar en los alumnos habilidades de orden superior como explorar, conjeturar, razonar, reflexionar y comunicar matemáticamente, así como habilidad para usar efectivamente sus habilidades cognitivas y metacognitivas en la solución de problemas rutinarios.

Minimizar las deficiencias que se presentan en el proceso de transición de la aritmética al algebra.

Fomentar el trabajo cooperativo.

Estandares a desarrollar

Pensamiento numérico y sistemas numéricos:

1. Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, etc).
2. Describir, comparar y cuantificar situaciones con diversas representaciones de los números, en diferentes contextos.
3. Identificar regularidades y patrones numéricos, las propiedades de los números, sus relaciones y operaciones utilizando calculadoras o computador.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos:

1. Diferenciar atributos y propiedades de objetos bidimensionales y tridimensionales.
2. Comparar y clasificar objetos bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con sus componentes y características.
3. Hacer conjeturas y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

1. Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, etc).
2. Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
3. Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
4. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).

5. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.
6. Modelas situaciones de variación con funciones polinómicas

Referencias

Alarcón, J., Escalante, C. C. (1986). *Graficación de funciones sin Cálculo.* Sección de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN. 2ª impresión.

Azcarate, C. y Deulofeu, J. (1988). *Funciones y gráficas*. Editorial Síntesis. Madrid.

Escalante, C. C. (1979). *Graficación de funciones con Cálculo*. Sección de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN.

Mason J. (1999). *Rutas hacia el álgebra* .Traducción por Cecilia Agudelo Valderrama. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares Básicos de calidad - Matemáticas*.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares - Matemáticas*.

Rojas P. (2000). *Transición Aritmética-algebra: Actividades para potenciar las diferentes interpretaciones de la letra*. XVII Coloquio Distrital de Matemáticas.

Socas M. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Editorial Síntesis. Madrid.

❖❖❖

Différents types de tâches avec Cabri 3D reliant les aspects géométriques, numériques et algébriques d'objets de l'espace

Colette Laborde
Cabrilog, Grenoble, France
colette.laborde@cabri.com

Abstrait

L'objectif de l'atelier est de relier les propriétés géométriques d'objets de l'espace

- et leurs mesures comme aire ou volume
- ou leurs représentations algébriques (coordonnées, équations)

À l'aide de tâches de construction ou de justification pour différents niveaux d'école secondaire.

Les tâches choisies utilisent les fonctionnalités de Cabri 3D qui permettent de donner un sens géométrique aux formules ou aux coordonnées et équations.

Les participants Les participants auront à les réaliser dans Cabri 3D. Aucune connaissance de Cabri 3D n'est requise.

Mots-clés: Objets de l'espace, volume, aire, coordonnées, équations

Thématique: Représentations multiples dynamiques d'objets de l'espace

❖❖❖

Caractéristiques principales d'un système-auteur pour la réalisation d'activités mathématiques huatement interactives. L'exemple de Cabri LM

Jean-Marie Laborde
Cabrilog, Francia
jean-marie.laborde@cabri.com

Abstrait

Dans cet atelier les participants pourront découvrir et manipuler eux-mêmes la nouvelle technologie Cabri LM permettant comme dans un système-auteur de créer des activités d'apprentissage offrant à l'apprenant un environnement plsu contraint qu'un environnement de type micro-monde (du type Logo) dont l'extrême généralité se dresse souvent comme un obstacle pour le professeur autnat que pour ses élèves.

Des tâches de type très variées seront proposés, allant de la familiarisation des elèves avec les formes de base de la géométrie en 2D et en 3D (comme des patrons de polyèdres par exemple) à l'apprentissage des éléments fondamentatux de la numération.

Mots-clés: Système-auteur, Interactivité, mathématiques dynamiques, apprentissage

Thématique: Mathématiques dynamiques, Cabri

❖❖❖

Cabri 3D: Para mejorar la visualización y provocar el uso de la geometría axiomática

Joris Mithalal
IUFM de Paris
Laboratorio de Didáctica André Revuz, Francia
joris.mithalal@paris.iufm.fr

Resumen

En este taller, se trabajará sobre la base de situaciones evocadas en la conferencia.

Utilizar ese tipo de software permite cambiar el uso de los dibujos por los alumnos: la visualización en el espacio es mucho mejor que una visualización con perspectiva paralela, puesto que al contrario de la geometría plana, no se pueden leer los resultados en los dibujos.

Es por eso que la geometría axiomática permite resolver problemas que los alumnos comprenden al leer los dibujos informáticos. Se estudiará en este taller cómo y por qué se pueden concebir, con Cabri

3D, situaciones muy simples que provocan el uso de geometría axiomática.

Para eso, será preciso estudiar primero las características principales del software, con respecto al tipo de representaciones empleadas y también dalas primitivas de construcción. Tendremos también que describir precisamente la actividad geométrica de los alumnos en este contexto, con la visualización (Duval, 2005) y la génesis instrumental (Rabardel, 1995).

Luego, analizaremos dos situaciones que ilustran nuestros resultados, para comprender por qué es necesario utilizar geometría axiomática. Para el análisis de las situaciones y de la actividad de algunos alumnos, identificaremos las características más importantes para concebir otras.

Se organizará el taller en dos sesiones de 90 minutos. La primera será principalmente dedicada a la presentación del software, y también al estudio de cómo alumnos pueden completar un cubo con instrumentos geométricos. En la segunda sesión, intentaremos describir más precisamente las variadas maneras de resolver problemas de geometría, lo que nos permitirá analizar una situación relacionada con rectas en el espacio.

Palabras clave: geometría 3D; geometría dinámica; visualización; paradigmas geométricos; Cabri

3D.

Eje temático: uso del software para concebir situaciones de enseñanza.

Referencias

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10: 5 – 53.

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies*. Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Collin.

❖❖❖

Cabri: Cálculo y Física

Ruben Sabbadini
Liceo Farnesina, Roma, Italia
rusabba@tin.it

Resumen

Cabri non è solo geometria, ma anche analisi matematica, calcolo delle probabilità, fisica. Io ho scritto un libro (FisiCabri Principato Milano Italia) con circa 150 applicazioni Cabri (io chiamo così le mie figure dinamiche) che simulano altrettanti fenomeni fisici. E' uno strumento portentoso per la didattica, si possono mostrare cose che una figura, statica, su una pagina di libro non potrebbero far vedere. Ad esempio un'onda dipende da due parametri, spazio e tempo e, in una figura statica, o si mostra la dipendenza dallo spazio o quela dal tempo. In una applicazione Cabri, invece, si vede contemporaneamente la dipendenza dallo spazio, quella dal tempo, l'onda e la particella di materia che si muove di moto periodico.

Si può facilmente disegnare una funzione in Cabri, con lo strumento "Trasporto di misura", lo insegnerò nel taller. Si può facilmente calcolare la derivata e l'integrale della funzione e se ne possono tracciare i grafici.

Si possono dimostrare graficamente, e in maniera didatticamente efficace, i teoremi fondamentali del Calcolo delle Probabilità: il teorema di De Moivre- Laplace e la Legge dei grandi numeri.

Parole chiave: Cabri, Fisica, Analisi Matematica

Tematico: De los ejes temáticos propuestos para el congreso, señalar aquel que se adapte mejor a la naturaleza del trabajo propuesto: Física, química e ingeniería con asistencia de Cabri.

En esto teller vamonos a mirar como se puede realizar las aplicationes utiles para enseñar, por ejemplo, a la física (o la análisis matemático, o el calculo de la probabilidad).

Este los applicationes se basan en la característica de la "medida" en Cabri, y, in particular, de el "transporte de la medida" y de el "lugar geometríco". En un primero momento esta característica non fuera emplementada en el Cabri originario; no era necesario para la geometría sintetica, Pero finalmente fue insertado. Cuando aprendí esta característica que entendía inmediatamente las grandes posibilidades esto podría dar.

Usted puede dibujar una función (ésta es la primera lección)

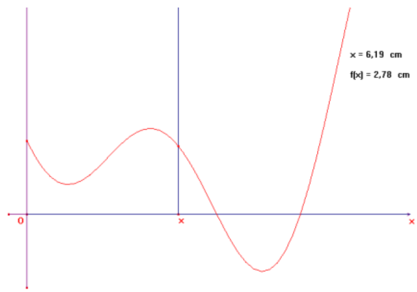


Figura 1

Usted puede dibujar una función derivata (ésta es la primera lección)

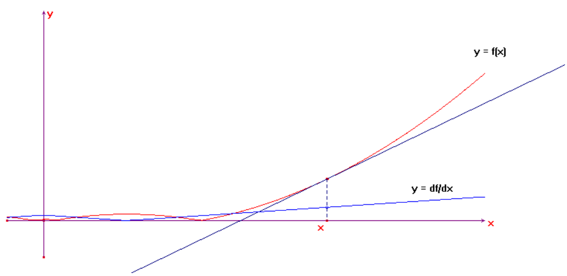


Figura 2

Usted puede realizar una simulación de la bola que despide (segunda lección)

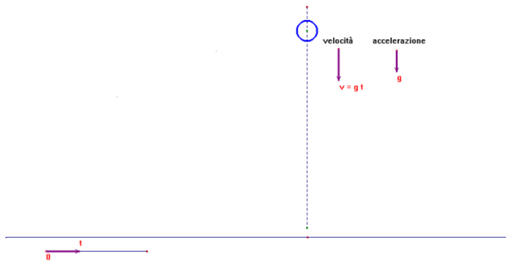


Figura 3

Se possibile mostrerò come trattare gli integrali e le equazioni differenziali del prim'ordine.

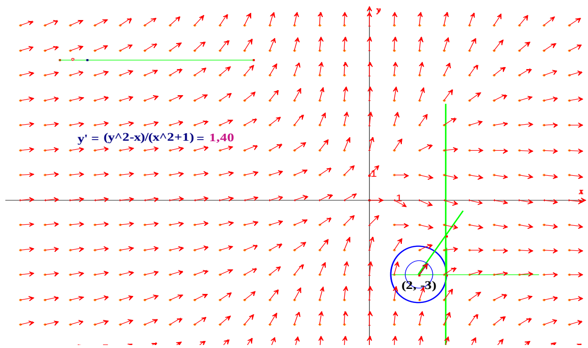


Figura 4

Referencias

Atkins, P. W (1984). *Il secondo principio.* Zanichelli Editore, Bologna (Italy).

Gnedenko, B. V. (1979). *Teoria della Probabilità* Editori Riuniti Edizioni MIR, Roma (Italy).

La Fisica del Berkley. (1971), *Elettricità e Magnetismo (Parte prima)*, Zanichelli, Bologna)

Moreno Gordillo J. A., Rodriguez Gallegos R., Laborde C., *Equations différentielles dans Cabri II Plus* Atti della

Conferenza Internationale CabriWorld 2004 del settembre 2004 a Rome, Italia (in via di pubblicazione). Preprint in spagnolo sul sito: http://www-iam.imag.fr/Rodriguez/Ruth_fichiers/PaperCW2004.pdf

Orear J., *Fisica generale*, 1970, Zanichelli, Bologna

Sabbadini R. (2005), *FisiCabri*, 2005, Principato, Milano

Sabbadini R., *Cabri Géomètre: un potente strumento per la didattica della fisica* in Progetto Alice vol. IV n. 11 II tr. 2003

Sabbadini R*. (2005), Da Keplero a V. Panisperna (passando per Rutherford): quattro secoli di modelli planetari* in Progetto Alice vol. VI n. 16 I tr. 2005.

R. Sabbadini R. (2005), *Rendere visibile la matematica: Analisi, Calcolo delle Probabilità e Fisica si mettono in mostra* in Ipotesi Anno 8 n. 1/2005.

Sabbadini, R. (2006). *Vedere la matematica e la fisica: la soluzione di equazioni differenziali con Cabri Géomètre. in* Progetto Alice Anno III vol. VII n° 21 Editrice Pagine, Roma, 547-560

Tomasi L. (2002), *Cabri Géomètre II Plus: novità e potenzialità dell'ultima versione del software*, CabrIrsae, Ottobre 2002

❖❖❖

Ambientes de aprendizaje con énfasis en la articulación de registros de representación

Eugenio Díaz Barriga Arceo
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de México,
eugeniux@hotmail.com

Resumen

Este taller se dedicará a la construcción de diversas actividades de aprendizaje y de evaluación que girarán alrededor del tratamiento de los distintos registros semióticos de representación. El conjunto de ejercicios por desarrollar abarcan temas de matemáticas elementales hasta avanzadas, entre otros: reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, trucos aritméticos, tablas con problemas algebraicos, complementación de textos, ejercicios de asociación entre descripciones de figuras y sus ecuaciones, etc. Por otra parte, se busca impulsar la construcción de ambientes en los que el entorno informático almacene las respuestas correctas y sirva para evaluar el desempeño del estudiante en las actividades.

Palabras clave: registro semiótico, complementación, autoevaluación.

Eje temático: Experiencias educativas con asistencia de Cabri.

Introducción

La articulación de registros semióticos de representación es una de las metas de las lecciones de matemáticas: el estudiante comprende mejor un concepto matemático cuando transita coherentemente entre los diversos registros de representación (verbal, algebraico – analítico, numérico, gráfico) (Duval, 1993). Entornos informáticos como Cabri II plus, permiten llevar al aula lecciones que promuevan el tránsito entre los registros de representación; ilustraremos algunos ambientes con actividades basadas en este enfoque.

Las actividades diseñadas para este taller buscan que el usuario final de ellas (en este caso el estudiante) dentro del entorno informático sólo realice acciones como las de desplazar, ampliar o disminuir una imagen, una palabra, una expresión algebraica o un objeto, para que la versatilidad de la interfase no lo distraiga demasiado de la tarea cognitiva que tiene frente a él. El diseño contempla que las respuestas correctas puedan almacenarse y agruparse con un botón ocultar/mostrar, para que el ambiente pueda cambiarse entre la modalidad de resolución de los problemas y la modalidad de evaluación de la actividad.

Anteriormente, hemos descrito la construcción de macros con Cabri II plus y esta será una herramienta que utilizaremos en este trabajo (Díaz Barriga, E. 2006; Díaz Barriga, E., 2010; Díaz Barriga, E., 2011). Enumeraremos a continuación las macros que usaremos como recursos y que pondremos en juego para construir los ambientes:

a) Herramientas en Cabri II plus

   i. Objetos condicionales.

   a) Círculo en luz verde para una palabra

      Objetos iniciales: Punto móvil y circunferencia permanente.

      Objetos finales: Circunferencia llena en color verde.

      Dinámica de la construcción: al introducir el punto móvil dentro de la circunferencia permanente, aparece sobre esta una circunferencia del mismo tamaño llena de color verde; si el punto móvil se encuentra fuera de la circunferencia permanente, no ocurre nada.

   b) Celda en luz verde para un objeto.

      Objetos iniciales: punto móvil y vértices de un rectángulo (polígono)

      Objetos finales: Rectángulo con borde en verde o lleno en color verde.

      Dinámica de la construcción: al introducir el punto móvil dentro del rectángulo permanente, se superpone un rectángulo de las mismas dimensiones con borde de color verde; si el punto móvil se encuentra fuera del rectángulo permanente, no ocurre nada.

c) Segmento condicional.

Objetos iniciales: punto condicional y dos puntos permanentes y diferentes.

Objetos finales: segmento entre los dos puntos permanentes, al que se le vincula un objeto (gráfica, ecuación, palábra, párrafo, tabla numérica).

Dinámica de la construcción: al introducir el punto móvil dentro de la circunferencia permanente, aparece sobre el segmento que une los dos puntos permanentes y el objeto vinculado a él; si el punto móvil se encuentra fuera de la circunferencia permanente, no ocurre nada.

ii. Botón de ocultar / mostrar.
El botón de ocultar/ mostrar puede usarse para cambiar la modalidad de la construcción, de modalidad de ejercitación a modalidad de evaluación, la cual puede realizar la interfase bajo el diseño didáctico del profesor.

b) Herramientas informáticas de apoyo

Editor de expresiones matemáticas de Word

Geometría Interactiva

a) Cabri II plus.

b) Cabri 3D

Captura de imágenes y texto Paintbrush (formato .jpg, .pgn, .gif)

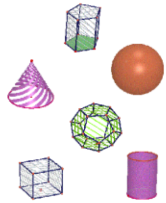
Ejemplos de ambientes de aprendizaje y evaluación.

Ambiente 1. Reconocimiento de poliedros

Los sólidos se pueden arrastrar dentro del esquema a la celda correspondiente y después que el estudiante ha emitido sus respuestas, el entorno se cambiará a modalidad de evaluación, en la cual conocerá sus aciertos y sus errores.

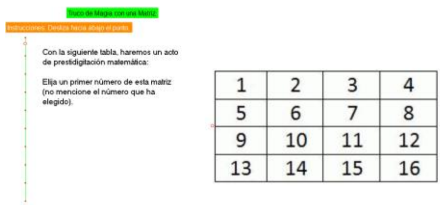
Los sólidos fueron capturados directamente de la interfase Cabri 3D y sus imágenes se vincularon a puntos del entorno Cabri II plus; como color de fondo se eligió la imagen de la tabla vacía (generada en Word), con los textos ya inscritos en ella.

Propiedad del cuerpo	Cuerpo
Cuando es cortado por un plano, las figuras de corte que se generan pueden ser triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos.	
Cuando es cortado por un plano, las figuras de corte que se generan pueden ser rectángulos, elipses, o curvas que contienen arcos de elipse y segmentos.	
Cuando es cortado por un plano, las figuras de corte que se generan pueden ser triángulos, circunferencias, elipses, o curvas que contienen arcos de elipses, parábolas o ramas individuales de hipérbolas.	



Ambiente 2. Truco aritmético con una matriz.

En esta actividad se busca que el estudiante conozca el porqué de un truco aritmético en una matriz y que además diseñe uno propio con las ideas que el ambiente ilustra.



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ambiente 3. Problema algebraico 1

Problema tomado del texto Álgebra Recreativa de Yakov Perelman.

En esta actividad se ha considerado central que el estudiante pueda arrastrar expresiones algebraicas dentro de las celdas vacías; además de las expresiones solución, se tienen expresiones incorrectas frecuentes entre los estudiantes, con el propósito de que la actividad sea más demandante desde un punto de vista cognitivo.

Instrucciones: Completa la solución del problema, describiendo cada parte de la narración en lenguaje algebraico.

Narración	Lenguaje algebraico
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida,	x
cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	$6x$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla	$12x$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$\frac{x}{7}$
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	15
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre	$\frac{x}{2}$
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte.	

$2x$

$x = 6x + 12x + 7x + 15 + \frac{x}{2} + 4$

25 80 82

$\frac{x}{6}$

$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 15 + \frac{x}{2} + 4$

5 $7x$ 90 84 $\frac{x}{12}$

Ambiente 4. Problema algebraico 2.

Actividad similar a la anterior. Algunas de las celdas tienen comentarios que eventualmente ayudan a la solución del problema.

Instrucciones: Completa la columna que simboliza el problema, deslizando a la celda la expresión algebraica correspondiente.

El caballo y el mulo

He aquí un antiguo ejercicio muy sencillo y fácil de traducir al idioma de] álgebra.

"Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentaba el jamelgo su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía". ¿Cuántos sacos llevaba el caballo, y cuántos el mulo?".

Suponga que *x* representa la carga de sacos del caballo y que *y* representa la carga de sacos del mulo. Plantee y resuelva el problema, completando primero la columna correspondiente al lenguaje matemático y resolviendo el modelo resultante.

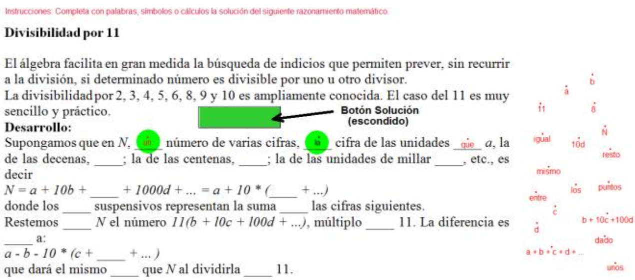
$y = 2(x-1)$ $x + 1 = y - 1$ $x + 1$ $y - 1$ $y - 1 = 2(x+1)$ $y + 1$ $Mulo\!: y - 1, Caballo\!: \ x + 1$ $x - 1$ $y = 2(x+1)$ $x + 1 = y$ x $y + 1 = 2(x-1)$ y $Mulo\!: y + 1, Caballo\!: \ x - 1$

En lenguaje verbal	*En lenguaje matemático*	
Si yo te tomara un saco		
mi carga		
sería el doble que la tuya.		*(Aquí se establece una primera ecuación)*
Y si te doy un saco,		
tu carga		
se igualará a la mía.		*(Aquí se establece una segunda ecuación)*

Ambiente 5. Complementación de un texto matemático

Problema tomado también del texto Álgebra Recreativa de Yakov Perelman.

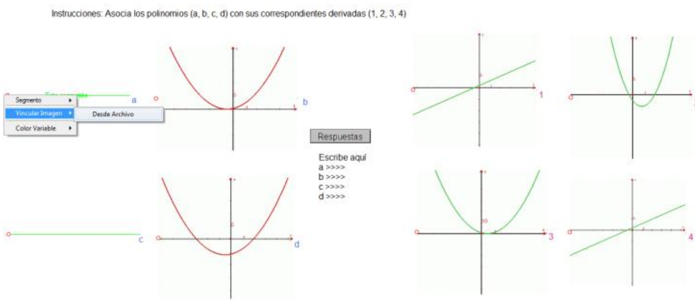
En esta actividad se han eliminado algunas palabras y expresiones algebraicas del texto del problema y su solución originales. Se provee al estudiante de una gran miscelánea de alternativas para que intente reconstruir al original.



Ambiente 6. Polinomios y sus derivadas.

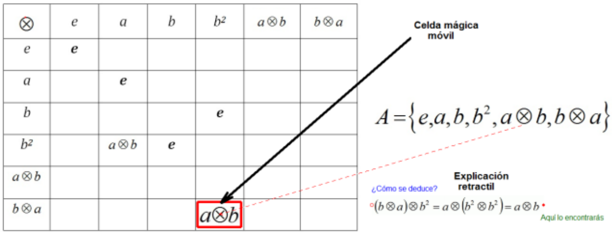
Se propone una actividad de asociación entre gráficas (intra-registro de representación), en la cual el estudiante debe identificar al polinomio y a su primera derivada. Desde luego, en algunos casos puede suceder perfectamente que dos polinomios distintos tengan la misma derivada.

Para dar su respuesta, el estudiante utiliza el comando de texto y escribe las asociaciones; al terminar, se entra a la modalidad de evaluación oprimiendo el botón de Solución, que se ha escondido ex profeso.



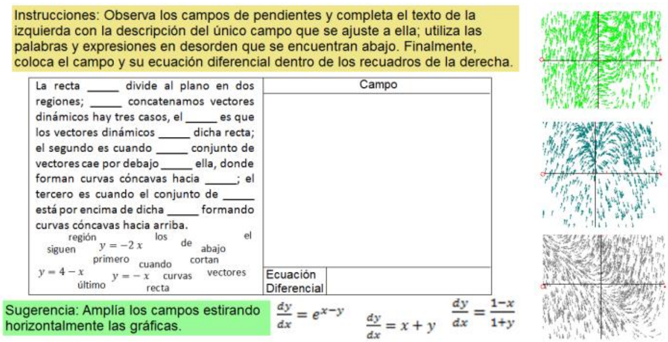
Ambiente 7. Operatividad dentro de un grupo.

La actividad consiste en solicitar la construcción de una tabla de una operación binaria dentro de un grupo que tiene definidas ya algunas propiedades. Al concluir se utiliza el ambiente interactivo que ya almacena la solución.



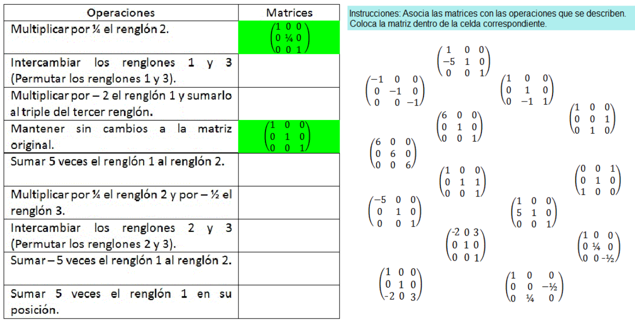
Ambiente 8. Descripción del campo de pendientes de una ecuación diferencial.

Actividad que realiza el tratamiento de 3 registros de representación diferentes (verbal, gráfico y algebraico). En proceso de experimentación en el aula, este ambiente evalúa el grado de apoyo que ofrece la descripción verbal para reconocer un campo de pendientes con su ecuación diferencial asociada.



Actividad 9. Operaciones elementales con matrices.

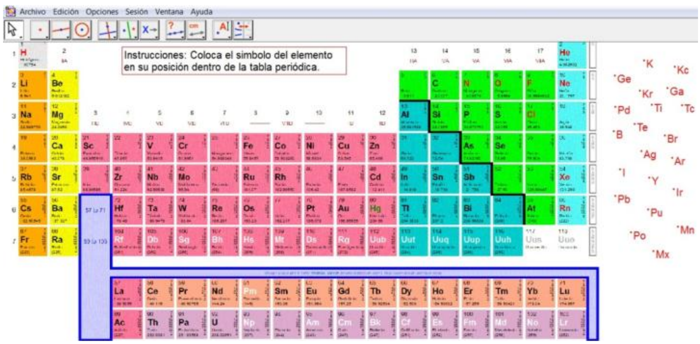
Esta actividad está contemplada como una actividad típica de autoevaluación para un curso de Álgebra Lineal. En ella, se pide al estudiante que asocie a cada descripción verbal del efecto de la multiplicación EM, con la matriz E correspondiente de tamaño 3 por 3. En otras palabras, el alumno asocia la descripción del efecto multiplicativo EM con la matriz E que lo produce. La actividad busca reforzar la noción de operación elemental en una matriz.



Operaciones	Matrices
Multiplicar por ¼ el renglón 2.	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&¼&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
Intercambiar los renglones 1 y 3 (Permutar los renglones 1 y 3).	
Multiplicar por – 2 el renglón 1 y sumarlo al triple del tercer renglón.	
Mantener sin cambios a la matriz original.	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
Sumar 5 veces el renglón 1 al renglón 2.	
Multiplicar por ¼ el renglón 2 y por – ½ el renglón 3.	
Intercambiar los renglones 2 y 3 (Permutar los renglones 2 y 3).	
Sumar – 5 veces el renglón 1 al renglón 2.	
Sumar 5 veces el renglón 1 en su posición.	

Actividad 10. Complementación de la tabla periódica.

La actividad tiene como propósito dar un primer acercamiento a la tabla periódica, a través de completar los espacios faltantes con los elementos correspondientes.



Referencias

Díaz Barriga, E., (2006). *Geometría Dinámica con Cabri-Géomètre*. Editorial Kali.

Díaz Barriga, E., (2010). *Notas de apoyo para el curso de Lógica*. Editorial Kali.

Díaz Barriga, E., (2011a). *Curso de Álgebra Superior. Heurísticas para la resolución de problemas algebraicos*. Editorial Kali.

Díaz Barriga, E., (2011b). Conferencia: Cabri en auxilio de la resolución de problemas algebraicos. *III Congreso*

Internacional en Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Medellín, Colombia.

Duval, R., (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Faddiev, D.; Sominski, I., (1971). *Problemas de Álgebra Superior*. Editorial Mir Moscú.

Gamow, G., (1949). *Uno, dos, tres, …* infinito. Editorial Espasa-Calpe.

Gardner, M., (1980). *Circo matemático*. Alianza editorial, No. 937.

Miternique, M., (1998). *Exercices de musculation en mathématiques*. Editions Ellipses.

Perelman, Y., (1968). *Álgebra recreativa*. Editorial Mir Moscú.

Perelman, Y., (1968). *Física recreativa*. Libros 1, 2. Editorial Mir Moscú.

❖❖❖

Geometría y argumentación dinámicas

Luis Moreno Armella
Cinvestav-IPN, México
lmorenoarmella@gmail.com

Resumen

La Geometría Dinámica añade, a la geometría hecha sobre papel, una nueva dimensión: el movimiento.

En este taller desarrollaremos actividades de modelación geométrica que el profesor puede poner en marcha en el salón de clases con miras a disminuir la fragmentación del conocimiento matemático escolar. En gran medida, esta situación surge de una introducción inadecuada de los sistemas de representación tradicionales. Emergen dificultades artificiales para los estudiantes que ellos no pueden solventar. Un problema de geometría, por ejemplo, se aborda exclusivamente desde la representación analítica eludiendo un enfoque sintético que podría arrojar luz sobre el problema. Felizmente, las representaciones dinámicas permiten redireccionar el enfoque tradicional e integrar lo que parecían fragmentos de conocimiento ajenos entre sí.

La propuesta didáctica no se hace esperar: los objetos que tradicionalmente se han estudiado en las matemáticas escolares empiezan a adquirir facetas que los ubican en la frontera de nuevas exploraciones. La capacidad expresiva de los estudiantes aumenta. El conocimiento fluye por otros cauces y asimismo las líneas de argumentación.

Temas a tratar:

1. La geometría del triángulo.
2. Teorema de Euler desde una perspectiva dinámica
3. Cónicas y tangentes
4. El problema de Wittgenstein y otros lugares geométricos destacados
5. Una versión dinámica de problemas de valores extremos

Palabras clave: geometría, abstracción, estructura, argumentación situada

Eje temático: geometría y argumentación

Referencia

Wentworth-Smith. Geometría plana.

❖❖❖

Superficies de revolución con Cabri 3D

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú
eadvincula@pucp.edu.pe

Resumen

El presente taller tiene como objetivo explorar y realizar construcciones de superficies de revolución, que incluyen objetos matemáticos como el cilindro, el cono y la esfera, utilizando el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D; ya que este favorece la visualización de estas figuras y permite elaborar conjeturas sobre sus propiedades al manipularlas directamente. Este taller se divide en dos momentos: en el primero, se realiza una exploración de las herramientas del Cabri 3D necesarias para la construcción del cilindro, cono y esfera generadas por revolución, como por ejemplo *transformaciones geométricas*, *trayectoria* y *animación,* que permiten construir modelos animados. Y en el segundo momento, se realizan construcciones de superficies de revolución más complejas que incluyen formas cilíndricas, cónicas o esféricas, y representan objetos que se encuentran en nuestro entorno. Este taller está orientado a profesores del nivel secundaria y superior ya que busca contribuir con la enseñanza de las superficies de revolución, incorporando el uso del Cabri 3D y reflexionando sobre la potencialidad de las herramientas que ofrece este ambiente.

Palabras clave: Superficies de revolución, Cabri 3D, visualización.

Eje temático: Geometría plana y espacial con Cabri

Introducción

El interés por abordar el tema de superficies de revolución, específicamente cilindro, cono y esfera generados por revolución, surgió al observar que los estudiantes presentan muchas dificultades en el aprendizaje del concepto de superficies que se obtienen al girar una curva alrededor de un eje de rotación; esto, en parte, debido a las limitaciones que tenemos al tratar de representar una figura tridimensional usando un plano estático como la pizarra. En la búsqueda de alternativas para facilitar el aprendizaje de los conceptos de cilindro, cono y esfera, generadas por revolución, encontramos que el *Cabri 3D* resulta ser un instrumento muy útil para esta tarea, ya que permite una representación dinámica de las superficies de revolución, y favorece la visualización de los elementos y propiedades que presentan estas figuras geométricas.

Por ello, en este taller se busca explorar y realizar construcciones de superficies de revolución con formas cilíndricas, cónicas y/o esféricas, que se obtienen al girar una curva alrededor de un eje de rotación. Para lo cual usamos el *Cabri 3D* como instrumento facilitador del aprendizaje de estos conceptos así como del desarrollo del pensamiento geométrico; reflexionando sobre la potencialidad de las herramientas que ofrece este ambiente de geometría dinámica.

Enfoque teórico

Para el desarrollo de este taller hemos tomando en cuenta los aportes de la Teoría de Van Hiele (1986) ya que esta propuesta fue creada para comprender y orientar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, a través de cinco niveles de razonamiento geométrico y cinco fases de aprendizaje que promueven el paso de un nivel a otro. Los cinco niveles de razonamiento describen los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes, que va desde el razonamiento intuitivo que empieza con el reconocimiento de figuras (nivel 1, de visualización o reconocimiento), progresando hacia el descubrimiento de las propiedades de las figuras (nivel 2, de análisis), hacia el razonamiento informal de las figuras y sus propiedades (nivel 3, de deducción informal), avanzando hacia un razonamiento axiomático formal acerca de las propiedades de las figuras (nivel 4, de deducción formal) y culminando en un estudio abstracto y riguroso (nivel 5, de rigor). Las cinco fases secuenciales de aprendizaje: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración, fueron diseñadas con la finalidad de favorecer el desplazamiento del alumno de un nivel al inmediatamente superior mediante la organización de las actividades de enseñanza-aprendizaje. En este taller mostraremos actividades que permiten llegar hasta el nivel 3 de razonamiento.

También, consideramos los aportes de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) pues en ella se señala la importancia de un registro figural en el estudio de la geometría, ya que contiene sistemas que propician la visualización de los objetos geométricos. Además, se considera que existen diferentes tipos de aprehensiones sobre una figura: perceptual, operatoria, discursiva y secuencial; de las cuales las tres primeras se relacionan con la visualización, y la última, con el proceso de construcción o descripción de la construcción de una figura. En este taller se incorpora el uso del *Cabri 3D* ya que este permite una construcción secuencial de las superficies de revolución y la manipulación de estas figuras facilita la solución de problemas.

Actividades

Las actividades a desarrollar en este taller se dividen en dos momentos.

En un primer momento, se realizará la exploración de algunas herramientas del *Cabri 3D* necesarias para la construcción del cilindro, cono y esfera, generados por revolución, como las *transformaciones geométricas, trayectoria o traza* y *animación,* que permiten construir modelos animados, como podemos observar en las siguientes figuras:

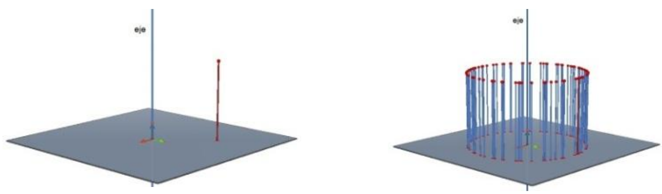


Figura 1: Construcción de una superficie cilíndrica

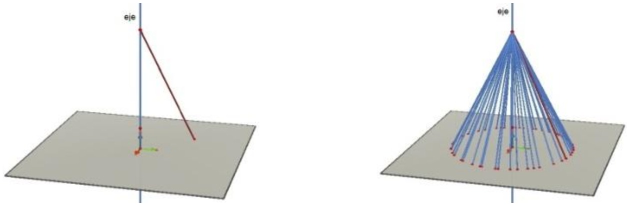


Figura 2: Construcción de una superficie cónica

Figura 3: Construcción de una superficie esférica

En esta parte, se reconocerá los principales elementos de cada superficie de revolución como generatriz, radio de la base, altura, directriz, etc. Además, en el caso del cilindro y el cono de revolución, con ayuda de las herramientas de medida del Cabri 3D se verificará la relación que existe entre la generatriz, el radio de la base y la altura, y se calculará el área y el volumen correspondientes.

En un segundo momento del taller, se realizará la construcción de otras superficies de revolución que incluyen formas cilíndricas, cónicas o esféricas, como observamos a continuación

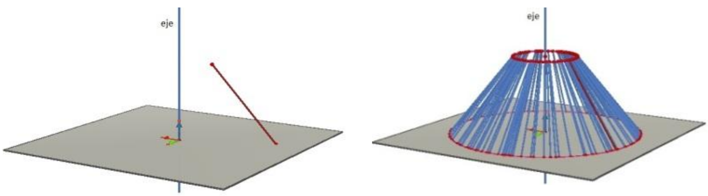


Figura 4: Construcción de la superficie de un tronco de cono

Figura 5: Construcción de una superficie cónica con doble hoja

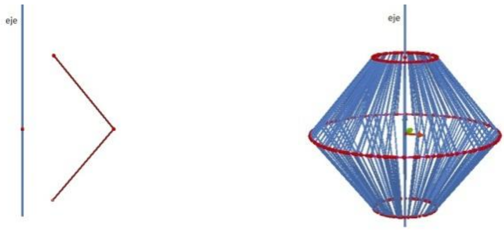


Figura 6: Construcción de una superficie formada por dos troncos de cono

En esta parte, se reconocerá los elementos y propiedades que presenta cada una de las superficies de revolución obtenidas.

Por último, utilizaremos el Cabri 3D para construir modelos que representan objetos que se encuentran en nuestro entorno, como por ejemplo:

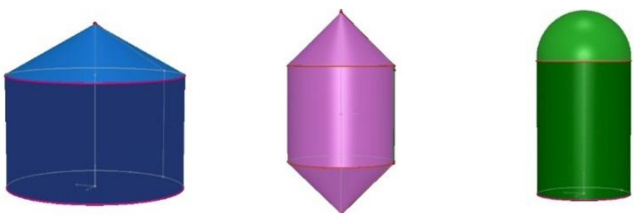


Figura 7: Objetos con formas cilíndricas, cónicas y esféricas

Resultados esperados

Al finalizar el taller se espera que los participantes reconozcan la potencialidad que posee el Cabri 3D para elaborar representaciones dinámicas de superficies de revolución, cuya manipulación permite reconocer las características y propiedades que poseen estas figuras geométricas. También, se espera promover el interés por buscar e incorporar nuevas estrategias que desarrollen el pensamiento geométrico y faciliten la adquisición de conceptos geométricos.

Finalmente, creemos que las herramientas que ofrece el Cabri 3D ayudan a que los estudiantes participen en la construcción de sus conocimientos geométricos, elaborando conjeturas sobre las propiedades de las figuras y visualizando de manera más rápida la solución de los problemas.

Referencias

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.

Gutierrez, A. (1998). *Tendencias actuales de investigación en Geometría y visualización*. En Ponencia en TIEM. Recuperado el 30 de mayo de 2012, de: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98b.pdf

Gutierrez, A. & Jaime, A. (1991). "El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros". Revista Educación Matemática, 3, 2, pp 49-65.

Laborde, C. (1996). *Cabri Géomètre o una nueva relación con la geometría.* En Puig, L. & Calderón, J. *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia, CIDE, Madrid.

❖❖❖

Uso de la pizarra digital interactiva en la enseñanza de la geometría dinámica

Marisel Rocío Beteta Salas
Colegio Internacional Hiram Bingham de Lima, Perú.
mariselbetetasalas@gmail.com

Resumen

El taller esta dirigido a los docentes de matemática de enseñanza secundaria y superior. Se presentará el uso de la pizarra digital interactiva como instrumento tecnológico que ofrece a la matemática potenciar habilidades de visualización, descripción, análisis, reflexión, evaluación y resolución de problemas, favoreciendo su aprendizaje. Actualmente se vienen desarrollando softwares que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría, deseando recuperar la relevancia de esta área de la matemática que promueve el uso de las demás áreas de la matemática. La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), viene realizando investigaciones sobre procesadores geométricos, concluyendo en más de un estudio que favorecen el aprendizaje de diversos tópicos de la geométrica. CABRI entre otros softwares de geometría dinámica, permiten la digitalización de la geometría a través de la creación de dibujos asociados a situaciones geométricas, logrando una distinción entre dibujar y construir. En la primera sesión del taller se tomará media hora para mostrar que a través de la PDI (pizarra digital interactiva) se potencializan experiencias pedagógicas haciendo uso de CABRI en la enseñanza de áreas de polígonos, en la siguiente hora se brindará las orientaciones para el uso adecuado de la PDI, mostrando y ejecutando el conjunto de herramientas con los que cuenta el software de la pizarra digital, para trabajar con elementos de la geometría plana. En la segunda sesión de hora y media, se mostrará y ejecutará las herramientas básicas que tienen tanto CABRI II plus y CABRI 3D, observando que en conjunto con las herramientas con las que cuenta la pizarra digital permiten diseñar actividades de aprendizaje con geometría dinámica para consolidación de aprendizajes en el cálculo de superficies de poliedros.

Palabras clave: matemática, geometría dinámica, pizarra digital interactiva.

Eje temático: Experiencias educativas con asistencia de Cabri

Introducción

Es sabido que atravesamos por un proceso de transformación de metodologías que pretenden incorporan en el aula, las nuevas herramientas tecnológicas con las que actualmente puede contar un docente en el aula: ordenadores portátiles, tablets, equipo multimedia, pizarra digital interactiva, inclusive se estudia la posibilidad de incorporar los equipos de comunicación móviles para lograr mejorar el proceso de enseñanza.

En un comienzo cuando se empezaron a introducir las tecnologías a la educación fue la matemática quien potencializo su uso, a través del uso de las calculadoras científicas y gráficas, softwares como el excell para realizar el tratamiento y análisis de datos, otros software como derive y graficadores de funciones, apareciendo luego los softwares de geometría dinámica, que no sólo permiten el trazo de objetos de la geometría plana y del espacio haciendo uso de nociones de la geometría, sino que además posibilitan la demostración de postulados y teoremas así como la comprensión de ideas matemáticas .

Muchas de las experiencias con estos softwares y herramientas tecnológicas como los ordenadores y equipo multimedia, se desarrollaron en los laboratorios de cómputo. Hace algunos años apareció una nueva herramienta tecnológica: la pizarra digital interactiva (PDI) y su lugar se encuentra en el aula y de acuerdo a una serie de investigaciones ya realizadas, su uso potencializa el aprendizaje en los alumnos, ello exige en el docente capacitarse en su uso y potencializar sus sesiones de clase. Los software de geometría dinámica como el caso de CABRI II plus y CABRI 3D se potencializan en la PDI al trabajar sobre una superficie interactiva, permitiendo al docente generar nuevas estrategias de aprendizaje, donde el objetivo de la clase no sólo será el trazo correcto del objeto matemático sino pasar a nivel de pensamiento más elevados como la consolidación, aplicación, demostración y el análisis de ideas, nociones, teoremas y postulados de la geometría.

Modelo Teórico Utilizado

El modelo teórico utilizado en las experiencias en este taller se encuentra sustentado en la teoría de Van Hiele, demostrando la posibilidad de introducir el uso de la pizarra digital en la enseñanza de la geometría dinámica, fomentando un trabajo geométrico de carácter cualitativo, que asegure la formación de conceptos y la imaginación espacial.

Según la teoría de Van Hiele, los contenidos geométricos han de ser tratados cíclicamente en niveles de complejidad creciente. La secuenciación de dichos contenidos a través del currículo estará determinada por el análisis de cada tópico o tema en función de la estructura del modelo, lo que determinará un tratamiento distinto en cada nivel, avanzando desde los aspectos cualitativos a los cuantitativos y abstractos.

En el modelo de Van Hiele el profesor deja de ser expositor y se convierte en un coordinador de actividades. Mientras que el profesor cambia el papel de expositor a coordinador, el alumno cambia de receptor pasivo de la información a buscador activo de la misma. Este cambio de actitudes en aula tiene como consecuencia que el profesor deba conocer y manejar el material y el modelo para poderlo llevar a cabo.

El modelo de Van Hiele, consta de dos partes, la primera son *los niveles de razonamiento*, que se clasifican en cinco: Nivel 1, visualización; nivel 2, de análisis; Nivel 3, clasificación; Nivel 4, Deducción informal y Nivel 5, de rigor. La segunda parte son *las fases de aprendizaje,* que son: fase 1, información; fase 2, orientación dirigida; fase 3, explicitación; fase 4, libre orientación; fase 5, integración; estas están orientadas a ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, las fases constituyen un esquema para organizar la propuesta de enseñanza. El paso de un nivel al siguiente, depende más de la instrucción que de la edad o maduración biológica del individuo. Lo cual implica, que el profesor debe adecuar sus enseñanzas al nivel de razonamiento del alumno para el concepto objeto de estudio, pues en otro caso el aprendizaje será de tipo memorístico, local, perecedero y carente de significado. Es por eso que se hace imprescindible implementar una técnica que facilite al docente conocer el lenguaje utilizado por los estudiantes y así proponer las tareas adecuadas de aprendizaje para ayudarlos a avanzar en su nivel de razonamiento".

Objetivos del taller

1. Conocer la Pizarra Digital e iniciar su uso en el aula haciendo uso del CABRI II PLUS y CABRI 3D.
2. Conocer y usar las herramientas de la carpeta de matemática asociadas al aprendizaje de la geometría del software de la pizarra digital.
3. Mostrar experiencias de aprendizaje basadas en el diseño pedagógico de Van Hiele asociado al uso de software de geometría dinámica.

Contenidos matemáticos

1. Área y perímetro de polígonos.
2. Poliedros. Poliedros regulares. Área Superficial.

Experiencias

En la primera experiencia de aprendizaje "Área y perímetro de polígonos" se muestra el uso de la pizarra digital y del software CABRI II plus, organizada de acuerdo a la secuencia metodológica basada en el modelo de Van Hiele. El objetivo de esta experiencia es que los alumnos haciendo uso del software CABRI calculen el área del polígono que describe la superficie de la institución donde estudian. La secuencia a seguir es la siguiente:

- Con ayuda del google earth ubica el colegio observando la totalidad de su área.

- Copia esta imagen en una hoja de word, señala el contorno del colegio.
- Con el icono de medida de google earth, determina la medida de los lados del plano del colegio. (opción metros) y colócalas en la hoja Word.
- Utilizando las fórmulas de área de polígonos, determina el área del colegio.
- Muestra todos lo procedimientos que has utilizado (fórmulas y operaciones)
- Con ayuda del CABRI PLUS II construye el polígono que forma el perímetro del colegio trabajando a escala (1 cm. = 10 m.) y con la herramienta área muestra el área de colegio.

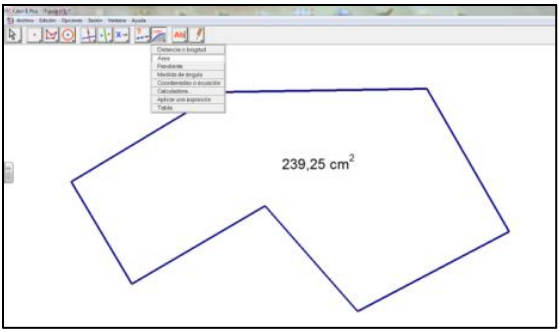


Figura 1

- Compara tus resultados con los obtenidos por el programa ¿Hay diferencias? ¿Por qué?
- Exponen sus resultados manipulando las herramientas tecnológicas utilizadas sobre la pizarra digital. Previo a estas actividades los alumnos han trabajado con las herramientas de software, realizando actividades que involucraban en trazo de polígonos y el cálculo de su área.

En la segunda experiencia de aprendizaje "Poliedros. Poliedros regulares. Área Superficial", se muestra el uso de la pizarra digital y del software CABRI 3D, organizada también de acuerdo a la secuencia metodológica basada en el modelo de Van Hiele. El objetivo de esta experiencia es que los alumnos haciendo uso del software CABRI 3D, describan a los poliedros y calculen el área superficial de los poliedros regulares a partir del análisis de su desarrollo. La secuencia a seguir es la siguiente:

- Con ayuda del CABRI 3D construye el tetraedro regular.
- Con la herramienta abrir poliedro, abrir el tetraedro.
- Responder: ¿Cuántas caras tiene el tetraedro? ¿Qué polígono regular conforman sus caras? ¿Cómo se calcula el área de una de sus caras? ¿Cómo se calcula el área de toda la superficie del tetraedro?

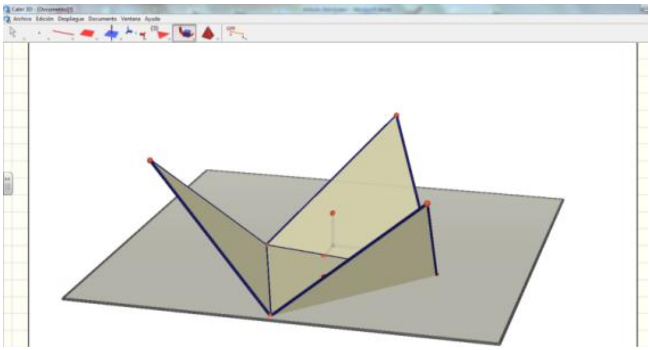


Figura 2

- Se sigue la secuencia anterior con el hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.
- Exponen sus resultados manipulando sobre la pizarra digital.

Resultados

Ambas experiencias reportaron resultados satisfactorios al consolidar los aprendizajes de áreas de polígonos y área superficial de poliedros aplicadas a situaciones nuevas. Los alumnos lograron pasar del nivel de visualización a un nivel de análisis, haciendo un buen uso de las herramientas tecnológicas empleadas en cada una de las actividades. La pizarra digital permitió además de mostrar la manipulación de las herramientas de CABRI, analizar las soluciones, manipulando las herramientas de la pizarra interactiva, potencializando las situaciones de aprendizaje.

Referencias

Gutiérrez, A. (2007). *Enseñanza de las matemáticas en entornos informáticos. CABRI.* Módulo Optativo del plan de estudios de Maestro. Universidad de Valencia. Departamento de didáctica de las Matemáticas.

Marqués, Pere (2006). La pizarra digital en el aula de clase: Posiblemente el mejor instrumento que tenemos hoy en día para apoyar la renovación pedagógica en las aulas. En *Revista Didáctica, Innovación y Multimedia,* (20) <http://www.pangea.org/dim/revista>

Pérez Sanz, Antonio (2007). *Programas Informáticos para la enseñanza de la geometría*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 10 (2), 301 - 514.

❖❖❖

Visualizando los límites de funciones y las derivadas con geometría dinámica

María del Carmen Bonilla
Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática
mc_bonilla@hotmail.com, mbonilla@pucp.edu.pe

María Elena Villanueva Pinedo
Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM)
villanuepi@lamolina.edu.pe

Rocío Consuelo Delgado Aguilar
Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM), Perú
dare@lamolina.edu.pe

Resumen

La propuesta didáctica fue aplicada en el curso de Cálculo Diferencial de la UNALM, y puede utilizarse en cursos de Cálculo de Bachillerato, Institutos Superiores y Universidades. El objetivo principal que se persigue es lograr la comprensión de las nociones de límites de funciones y derivadas (Stewart, 2002) a través de la exploración y visualización de las gráficas presentadas en Cabri II Plus. Las actividades diseñadas podrían constituir *pruebas explicativas de carácter "heterogéneo"* (Hanna & Sidoli, 2007) de las definiciones de límites de funciones y de derivadas. En el taller de dos sesiones, de 90 minutos cada uno, los participantes aprenderán en la primera sesión a elaborar actividades en Cabri II plus relacionadas con la definición de límites de funciones de una manera intuitiva, en primer lugar, y luego la definición utilizando el épsilon y el delta. En la segunda sesión, primero, se construirá gráficamente la definición de derivada de la función en un punto y su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente en ese punto, y a continuación se construirán algunos ejemplos de aplicación de la derivada a situaciones de optimización. Los participantes deberán tener conocimientos elementales de Cálculo Diferencial.

La propuesta didáctica se basa en investigaciones en el campo de la filosofía de la matemática, y su relación con la Educación Matemática, que establecen una distinción entre pruebas matemáticas que prueban y pruebas matemáticas que explican

(Hanna, 1989), así como en la visualización, exploración y heurística, que fomentan la comprensión de las nociones matemáticas (Hanna, 2000).

Palabras clave: Límite de funciones, derivadas, visualización, pruebas explicativas heterogéneas.

Eje temático: Matemática avanzada con Cabri.

Introducción

En el desarrollo de la práctica matemática en las tres últimas décadas se ha establecido nuevos tipos de prueba y argumentación, cambiándose las normas establecidas en el área (Hanna, Jahnke y Pulte, 2006). Los cambios se han producido por el uso de las computadoras (como recurso heurístico o como medio de verificación), por un nuevo tipo de relación de las matemáticas con las ciencias empíricas y la tecnología, y por un fuerte inconsciente en la naturaleza social de los procesos que guían la aceptación de una prueba.

En Educación, entre las varias funciones de la prueba, la explicación es la primera. Uno de los más efectivos caminos para conseguirla es con el uso de la geometría dinámica (Hanna, 2000), porque ayuda a los estudiantes a desarrollar el pensamiento matemático, a producir evidencias válidas, a desarrollar la intuición, especulación y heurística, así como a mejorar la comprensión de las nociones matemáticas. La Geometría Dinámica es exitosa en mejorar la habilidad de los estudiantes en darse cuenta de los detalles, a atreverse a explorar, proponer y probar conjeturas, reflexionar, interpretar relaciones y proporcionar explicaciones provisionales y pruebas. Entre los matemáticos existe el consenso de que la intuición, especulación y heurística son útiles en los pasos preliminares para la obtención de resultados matemáticos, y que el razonamiento intuitivo sin la prueba no es una rama especulativa, separada de las matemáticas.

Con esa finalidad se han diseñado actividades en Cabri II Plus para la enseñanza de las nociones de límite de funciones y de derivadas, actividades que procuran la experimentación, el arrastre de los objetos matemáticos, y una mejor comprensión de las propiedades matemáticas implícitas en la noción.

1. Límite de Funciones

a) Aproximación intuitiva

Dada la función:

Calcular, si existe

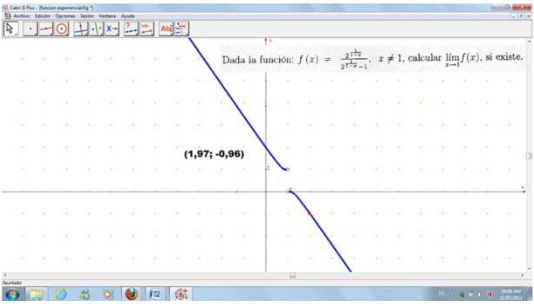


Figura 1

b) Definición formal de límite de función

Sea f una función definida sobre el intervalo abierto que contiene el número , excepto cuando se define a si misma. Entonces decimos que el límite de f(x) cuando x tiende o se aproxima a es L y escribimos

Si para cada número ε > 0 hay un correspondiente número δ > 0 tal que

siempre que

Figura 2

2. Derivada de una función en un punto

El límite

si existe y es finito, recibe el nombre de **derivada** de la función en el punto "a" y representa la variación de la función f en el punto $x = a$. Se representa por

Si en la definición anterior hacemos
cuando h tiende a cero, entonces $\boldsymbol{x}$ tiende a "$\boldsymbol{a}$" y la derivada de la función en el punto a nos queda de la forma:

Geométricamente, si vamos acercando el punto P hacia el punto P_0 (h tiende a cero), la recta secante se transforma en tangente a la gráfica de la función. En consecuencia, la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = a$.

a) Derivadas Laterales:

Derivada por la izquierda

Se llama derivada por la izquierda de la función f en el punto $x = a$ al siguiente límite, si es que existe:

Derivada por la derecha

Se llama derivada por la derecha de la función f en el punto $x = a$ al siguiente límite, si es que existe:

Evidentemente, una función es derivable en un punto sí, y sólo sí, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales son iguales.

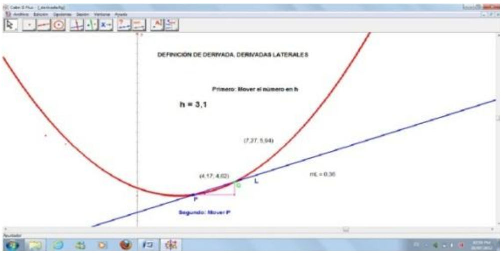


Figura 3

b) Problema de optimización

Un recipiente de almacenamiento sin tapa debe tener 60 m3 de volumen. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de la base cuesta S/. 10 por m2, y el de los lados S/. 6 por m2. Calcular el costo mínimo de los materiales para tal recipiente. Tomado de: Examen Final del Curso Cálculo Diferencial del verano del 2010.

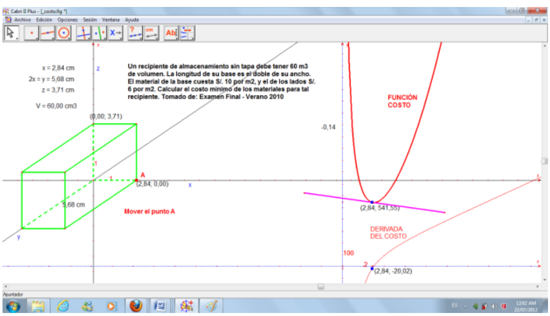


Figura 4

Referencias

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. En: G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.). *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (13th, Paris, France, July 9-13, 1989)*, (2), 45-51. Recuperado de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED411141.pdf

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematic,* Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", 44 (1-2), 5-23. Copyright 2001. Recuperado de http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/Hanna-2000.pdf

Hanna, G. & Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2), 73-78.

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4ta ed.). Bogotá: Thomson Learning.

❖❖❖

Tratamiento metodológico de las funciones de varias variables

Luis Alberto Callo Moscoso
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Universidad Nacional de Ingeniería, Perú
luis.callo@upc.edu.pe

Resumen

Este taller está dirigido a profesores del nivel medio superior que imparten la asignatura de Cálculo de varias variables y público en general. Su propósito es mostrar actividades, las cuales son parte de un proyecto de investigación, sobre el aprendizaje y la enseñanza del cálculo de varias variables en las que se emplee un software de geometría dinámica como Cabri Geometry II Plus. En este taller, los participantes explorarán recursos estratégicos que permitan analizar y caracterizar las concepciones de los estudiantes en torno a los conceptos matemáticos relacionados con el cálculo, tales como

- las derivadas parciales;
- el Método de Multiplicadores de Lagrange;
- procedimiento para cálculo de integrales iteradas;
- superficies paramétricas; y
- campos vectoriales en el plano y en el espacio.

Asimismo, se presentará a los asistentes un conjunto de animaciones*[5] que muestran, gráficamente, la interpretación de estas nociones. El propósito fundamental de este recurso es proporcionar a los estudiantes una visión gráfica y animada de estos conceptos matemáticos muy abstractos.

Entre los objetivos de este taller, están diseñar actividades que les permitan a los estudiantes visualizar e interpretar las pendientes de las rectas tangentes a una superficie, como la

* Las animaciones que se presentan fueron producidas con el software Cabri geometry II plus

rapidez de cambio de z en dirección de los ejes x e y; visualizar los resultados del método de los multiplicadores de Lagrange; interiorizar el proceso del cálculo de integrales iteradas; graficar y parametrizar superficies; y visualizar campos vectoriales en el plano y en el espacio, para ello, se orientará en la elaboración de materiales didácticos y actividades para la enseñanza-aprendizaje del cálculo de varias variables y la potencialidad del Cabri.

En conclusión, el Cabri tiene la ventaja de recrear procesos de simulación en tiempo real con poco consumo de recursos.

Palabras clave: Cálculo multivariado, multiplicadores de Lagrange, superficies paramétricas, campos vectoriales.

Eje temático: Matemática elemental y avanzada con Cabri.

Pertinencia del tema

La aplicación de actividades en el aprendizaje del cálculo, permite crear situaciones en las que el estudiante puede realizar algunas indagaciones y formular sus propias ideas sobre lo que sucede, antes de arribar a la simbolización y el manejo abstracto; pues es importante que los estudiantes realicen actividades con "objetos" que puedan "manipular" y que tengan reglas sencillas de manejo, de tal modo que el maestro pueda diseñar actividades con ellos y el estudiante pueda ir conformando las nociones que interesa abordar.

Marco teórico en el que se basa el trabajo

Es muy clara la conveniencia de ejercitar nuestra capacidad de visualización y de entrenar a quienes queremos introducir en la actividad matemática en el ejercicio de la visualización. La visualización es extraordinariamente útil, por consiguiente, tanto en el contexto del desarrollo matemático como en el de la enseñanza-aprendizaje, como, evidentemente, en el de la investigación. Y esto no solamente en lo que se refiere a la geometría, en la que tales ayudas deberían ser bien evidentes, sino también en lo que atañe al análisis matemático.

Debe quedar muy claro que no pretendo desarrollar un curso completo de cálculo sino más bien destacar algunos aspectos en los cuales es de mucha utilidad el empleo del Cabri Geometry, mostrando algunas animaciones construidas con el propósito de diseñar actividades para transmitir los aspectos muy abstractos y hacer que los aprendices puedan visualizarlos a través de la manipulación de estos objetos.

Desde el punto de vista del impacto de la utilización de los programas de cálculo simbólico como herramienta didáctica ya que mejora la compresión de la temática desarrollada y aumenta la motivación y el interés de los alumnos. En este sentido también puedo resaltar la potencialidad del programa Cabri Geometry para la graficación, posibilitando que el alumno pueda visualizar y analizar los resultados obtenidos. Si bien los problemas y ejemplos de aplicación motivan a los alumnos al mostrarles la utilidad de las herramientas matemáticas, la implementación de los mismos debe realizarse en forma cuidadosa.

A continuación voy a mostrar algunas de las temáticas trabajadas con la ayuda del programa. Es una actividad para que el profesor logre hacer que los estudiantes visualicen y entiendan los principios geométricos que están involucrados detrás del concepto.

Superficies cuádricas. Para graficar una superficie cuádrica, es preciso escribir la ecuación en forma estándar de esta manera:

Elipsoide: se puede asignar a cualquiera de las variables *x, y* o *z* un parámetro, por ejemplo

le damos esta forma

Si esta expresión la asociamos con podemos escribirla en forma paramétrica:

Ejemplo la ecuación

Algunos ejemplos adicionales.

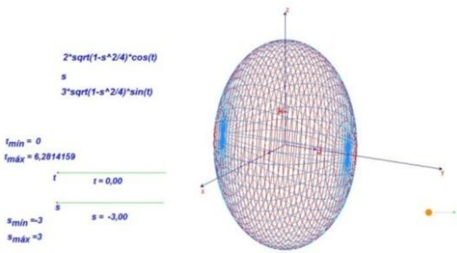


Figura 1: Elipsoide

a. b.

c. — — — d. ——— — —

Método de Multiplicadores de Lagrange. El propósito fundamental de estas animaciones es proveer al estudiante con una versión gráfica y animada de este concepto teórico mostrando una visualización del resultado de Lagrange, procurando que las animaciones ofrezcan la mayor y mejor cantidad de detalles para entender el concepto visualmente.

> "Es más fácil explicar el fundamento geométrico del método de Lagrange para funciones de dos variables. Maximizar sujeta a es encontrar el valor más grande de tal que la curva de nivel corte a . Al parecer esto sucede cuando las curvas se tocan apenas, es decir, cuando tienen una recta tangente común (De lo contrario, el valor de podría incrementarse más.) esto quiere decir que las rectas normales en el punto donde se presentan son idénticas de modo que los vectores gradiente son paralelos; es decir, para algún escalar ."[6]

Por ejemplo, optimizar la función sujeta a la condición que los puntos satisfagan la ecuación de la circunferencia . Así la condición está dada por la ecuación

Este problema se ilustra en la figura 2 que es una posición instantánea de la animación 1 hecha en cabri geometry, en ella se observa que mientras que los puntos recorren la circunferencia, los valores de generan cuatro puntos críticos.

Para determinar valores extremos de sujeta a la restricción , busque valores de y tales que

y

[6] (Stewart, 2008)

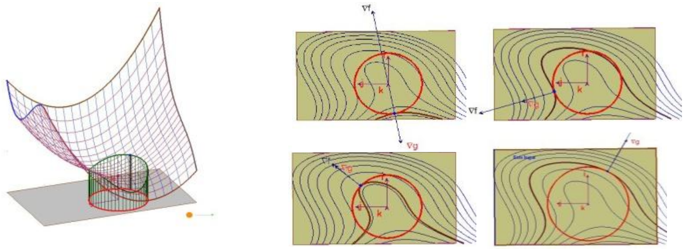


Figura 2: $f(x;y)$ y $g(x;y) = 0$; Tangencia de las cuervas de nivel y $g(x;y)$=0

Campos vectoriales. El propósito de estas animaciones es mostrar al alumno, de manera visual el comportamiento de los campos vectoriales (que son funciones que asignan vectores a puntos en el espacio.) En particular, para definir las integrales de línea (las cuales se pueden usar para encontrar el trabajo que efectúa un campo de fuerzas al mover un objeto a lo largo de una curva.) luego definir las integrales de superficie (las cuales se utilizan para determinar el caudal que pasa por una superficie.)
Mostraré cómo se puede graficar campos vectoriales en el plano y en el espacio para luego diseñar actividades que permitan, a los estudiantes, comprender estos conceptos. La figuras 3 muestra un campo sobre la superficie de una esfera y un campo gradiente sobre la superficie de un paraboloide circular en el primer octante, en la figura 5 se ve dos campos vectoriales en el plano.

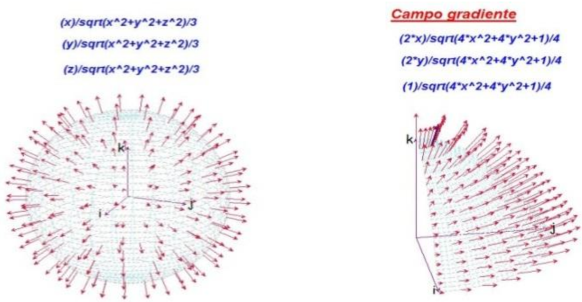


Figura 3: Campo sobre una esfera y campo gradiente

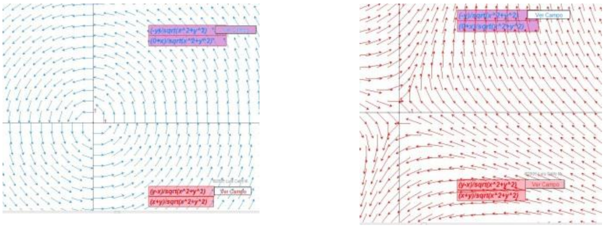


Figura 4: Campos vectoriales en el plano

Las derivadas parciales. Para dar una interpretación geométrica de de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación no representa una superficie (es un valor) la gráfica es una superficie. Si , entonces el punto está situado sobre *S.* Si hace está enfocando la atención en la curva C_1 en la cual el plano vertical corta a *S.* de igual manera, el plano vertical corta a S en una curva C_2.

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función , de modo que la pendiente de su tangente T_1 en es . La curva C_2 es la gráfica de la función , de modo que la pendiente de su tangente T_2 en P es . Por lo tanto, que las derivadas parciales y se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en a las trazas C_1 y C_2 de S en los planos y .

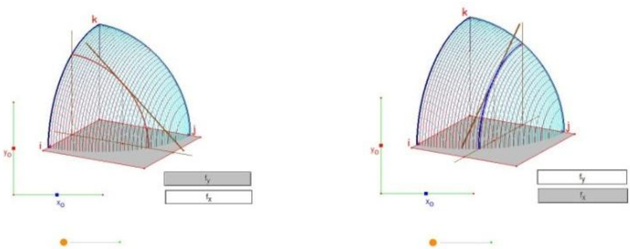


Figura 5: Derivada parcial como pendiente de la recta tangente

Integrales iteradas. Suponga que es una función de dos variables que es integrable en el rectángulo . Se usa la notación para indicar que se mantiene fija y se integra con respecto a de a . Este procedimiento se llama integración parcial con respecto a . Ahora es un número que depende del valor de : . Si ahora se integra la función A con respecto a de a , se obtiene

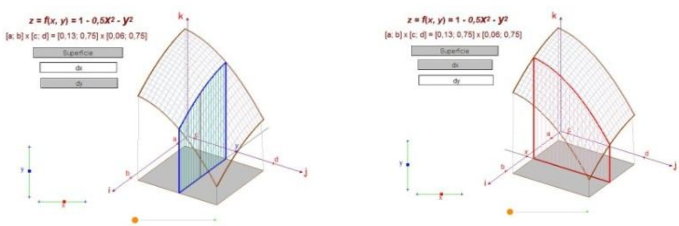


Figura 6: Integrales Iteradas

Organización del taller. En la primera sesión, los participantes aprenderán a realizar algunas animaciones utilizando Cabri Goemetry. La segunda parte será dedicada a la realización de actividades didácticas para transmitir algún concepto.

Referencia

Stewart, J. (2008). *Cálculo de Varias Variables: Trascendentes Tempranas.* México: Cengage Learning Editores S.A.

❖❖❖

Geometría del Espacio con Cabri 3D

Bernardo Camou Font
Academia Bolzano y Liceo 10, Uruguay
bernardocamou@adinet.com.uy

Resumen

La geometría del espacio es un mundo fantástico muy poco explorado en la enseñanza de la matemática. Uno de los principales obstáculos para su enseñanza es la complejidad que implica representar un objeto de 3 dimensiones. Cabri 3D se presenta como una poderosa herramienta capaz de contribuir decisivamente en superar este obstáculo.

En este taller se aprenderá a usar diversas herramientas de Cabri 3D con un enfoque integrado que hace uso de geometría plana y del espacio, de trigonometría y de álgebra.

Se analizará el origen geométrico del número de oro en el pentágono regular y luego se lo aplicará en diversas actividades como en el cálculo del ángulo diedro y el volumen del icosaedro regular. Se construirán diversos poliedros con Cabri 3D donde se estudiará la relación de Euler y la fórmula de la suma de los defectos en sus vértices. Así como para todo triángulo existe una circunferencia circunscripta y una circunferencia inscripta análogamente en el espacio para todo tetraedro (regular o no) existe siempre una esfera circunscripta y una esfera inscripta las cuales se aprenderán a construir con Cabri 3D. Luego de estudiar diversas propiedades de los cinco poliedros regulares se aprenderá a truncarlos con el software para obtener los poliedros arquimedianos. Se construirán poliedros que teselan el espacio en forma análoga a como algunos polígonos teselan el plano.

El taller constará de dos sesiones de 90 minutos. Está orientado principalmente a profesores de Secundaria pero puede ser de interés para profesores de matemática de cualquier nivel.

Palabras clave: Geometría del Espacio, Cabri 3D, poliedros regulares, poliedros arquimedianos.

Eje temático: Geometría 3D

Referencias

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique desMathématiques*, 9(3): 281 – 308.

Accascina, G. &Rogora, E. (2006) UsingCabri 3D Diagrams for Teaching Geometry. *International journal for Technology in mathematics Education, Volume 13, No 1*

Bainville, E. &Laborde, J.M. (2004) *Cabri 3D*. Cabrilog. Grenoble, France.

Bakó, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. *In Proceedings of the ThirdConference of the European society for Research in Mathematics Education.*

Balacheff, N.(1995) Conception, connaissance et concept Denise Grenier (Ed.) *Seminaire Didactique et Technologies cognitives et Mathematiques (pp 219-244)*. *Grenoble*.

Brousseau, G. (1998) . *La Théorie des Situations Didactiques*. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland &V.Warfield (Eds.) Grenoble, France: La PenséeSauvageBrousseau, G. (2003).

Bruner, J. (1977). *The Process of Education*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Camou, B. (2006). *Diario de un Profesor de Matematica*. Montevideo, Uruguay: Ediciones Brio.

Chaachoua, H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométriedans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapportsdes enseignants à ces problèmes*. Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble

Grenier, D. et Tanguay, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratiques et théoriques des polyèdres réguliers. *Petitx*, 78: 26 – 52.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.The logic of Mathematical Discovery.*London: Cambridge University Press.

Parzysz, B. (1991).Representation of space and students' conceptions at high school level.*Educational Studies in Mathematics,* 22, 575-593.

University of Cambridge. (2002) *Why do we study geometry? Answers through the ages.* Retrieved from: http://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-G_pening_ppr.pdf.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches enDidactique des Mathématiques, 10(2.3):133–170.*

Vygotski, L. (1930). *Mind in Society*. *The development of higher psychological processes*. Edited in 1978 in Cambridge, Massachusets.

Warfield, M., V. (2007). *Invitation to Didactique*. Bloomington, IN: Xlibris Corporation.

❖❖❖

Construyendo una colcha de retazos con Tangramas y Cabri

Beatriz Zunino
Colegio Seminario, Liceo Nº 10, Uruguay
beazunino@hotmail.com

Bernardo Camou Font
Colegio Seminario, Liceo Nº 10, Uruguay
bcamou@adinet.com.uy

Resumen

Cuando la geometría se presenta desde lo lúdico, dándole al niño la posibilidad de manipular y crear, su aprendizaje se torna no solamente placentero, sino también significativo. El presente taller se propone comunicar una forma de trabajar la geometría con alumnos de 6 a 8 años, en donde pueden lograr aprender importantes conceptos geométricos a medida que realizan la actividad. La tarea de los niños consiste en la realización de colchas con parches de papel de forma cuadrada, basándose en los patrones que ellos mismos han diseñado previamente trabajando con los triángulos de sus Tangramas. De esta propuesta manipulativa y las producciones artísticas, se pasa a la discusión en la clase sobre los diferentes diseños y la descripción de los mismos, así como los resultados de las decisiones tomadas. Luego, en el aula de informática trabajando con Cabri, los alumnos tienen la oportunidad de: observar cómo un simple diseño cuadrado puede variar si se gira, cuántas posibilidades existen si se usan dos colores y colorear distintas colchas formando un patrón visualmente atractivo.

El taller está dirigido a maestros de Educación Primaria, con conocimientos básicos de Cabri (no excluyente) y constará de dos partes: la primera, para presentar la propuesta realizada en el aula con los alumnos y la segunda instancia, donde los participantes podrán aprender a crear diseños con Cabri II Plus y a preparar los archivos que los niños utilizaron durante la actividad.

Palabras clave: figuras, triángulos, patrón, diseño, transformación.

Eje temático: Equivalencia de figuras y reconocimiento de patrones geométricos.

Todos los docentes sabemos que la enseñanza de los temas en cualquier asignatura no puede realizarse como una mera transmisión de los conocimientos, sino que el aprendizaje se logra a través de la construcción de los mismos. Pretender enseñar al niño por ejemplo el triángulo, mostrándole la figura, diciendo “este es un triángulo” y nombrando sus elementos únicamente, no alcanza para que se apropie del concepto. Es necesario crear las situaciones para que los alumnos manipulen, creen, prueben, construyan, armen y desarmen, observen y reflexionen sobre las figuras, encuentren relaciones entre ellas, etc. para que su aprendizaje sea significativo.

Con el Tangram y el programa Cabri, encontramos una forma de conocer, experimentar y gustar la Geometría así como también trabajar algunos conceptos de esta asignatura y de otros campos.
Algunos contenidos matemáticos a tratar: Geométricos (polígonos, ángulos, lados, vértices, tamaño, congruencia, superficie, rotación) y Numéricos (fracciones, multiplicaciones, conteo, etc.)

Esta experiencia fue pensada para alumnos de segundo año de Primaria (7 años), pero perfectamente puede ser realizada con preescolares y en años superiores haciendo las adecuaciones necesarias.
En este taller nos proponemos comunicar la experiencia realizada con los alumnos y trabajar con el programa Cabri II Plus realizando las mismas tareas que les fueron propuestas a los niños, aprendiendo a crear las figuras que se les presentaron e inventando otras.

La actividad realizada con los alumnos parte de un trabajo con los Tangramas. En esta primera etapa los alumnos exploran las piezas del juego y van descubriendo relaciones entre ellas.
Luego se les pide construir un cuadrado utilizando un triángulo mediano y dos chicos y usando dos colores. De esta forma crean

un patrón, el que más tarde repetirán en papel y usarán para construir una colcha de nueve retazos. Esta parte manipulativa es muy importante, pero no es sino hasta que se analiza, se compara, se comparte y se reflexiona sobre el trabajo, que la actividad produce un mayor fruto.

Otra manera interesante de enriquecer la actividad es usando el programa de Geometría Dinámica. Con las propuestas de Cabri, se logra profundizar y completar tareas que de otra forma resultarían casi imposibles por un tema de tiempo y por las dificultades que el trabajo manual podría causar.

Una de las actividades para realizar con Cabri es la que muestra la figura 1, donde se le pide a los alumnos pintar las seis posibilidades de conseguir un patrón con los tres triángulos y usando dos colores. Luego, con la herramienta girar, los niños advierten cómo se vería cada diseño después de un cuarto, un medio y tres cuartos de giro.

Otras propuestas se pueden apreciar en las figuras 2, 3 y 4. En esos casos se les solicita repetir el patrón para armar las colchas de nueve o más parches.

Una vez que los alumnos se familiarizan con el programa y comprenden el trabajo, se les puede pedir crear su propia colcha dándoles un modelo similar al de la figura 2 pero sin colores que indiquen el patrón.

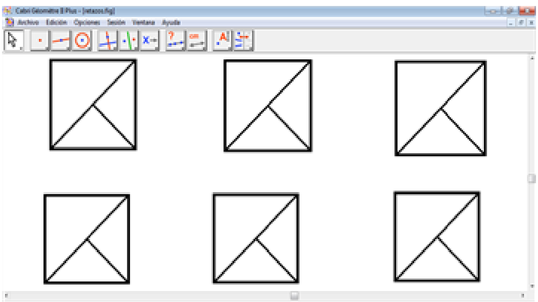


Figura 1: Seis patrones

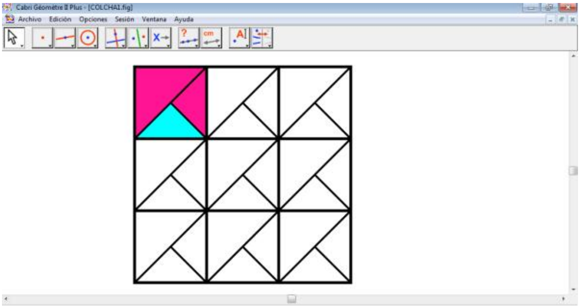


Figura 2: Colcha de nueve parches (1)

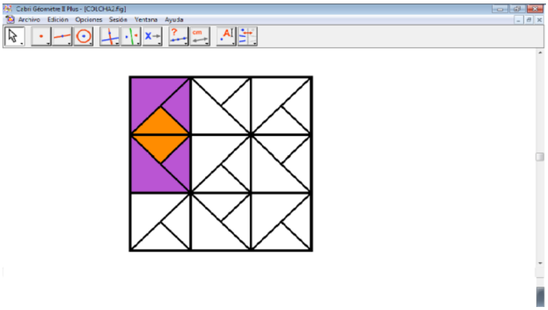


Figura 3: Colcha de nueve parches (2)

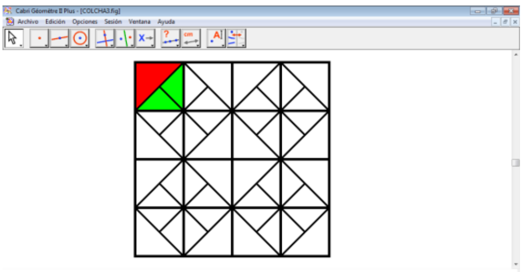


Figura 4: Colcha de dieciséis retazos

Los participantes del taller no sólo podrán diseñar su propia colcha como lo hicieron los niños sino que además aprenderán a confeccionar los archivos Cabri II Plus que fueron suministrados a los alumnos. Aprenderán a construir con el software un cuadrado y los triángulos contenidos en él. Se aprenderá también a darles el aspecto deseado y girarlos o trasladarlos a la posición conveniente.

Referencias

ETA/ Cuisenaire (2007). *The Super Source Tangramas Grados K-2*. Vernon Hills, Illinois.

Luiz Marcio Imenes y Marcelo Lellis (2002). *Geometria dos mosaicos*. Scipione, São Paulo.

Eric Bainville (2002). *- Manuel de l´utilisateur.* Cabrilog SAS, Grenoble.

❖❖❖

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

Comportamento das raízes de funções polinomiais com a variação dos coeficientes

Laurito Miranda Alves
lauritoalves@uol.com.br

Wilbert Sarmento Campos
wilbertcam@gmail.com

Hallan Jardim do Prado
hallanprado@yahoo.com.br
UNI-BH - Brasil

Resumo

Neste trabalho utilizamos o Cabri-Géomètre para descobrir como se comportam as raízes das equações de segundo e terceiro graus com a variação dos coeficientes.

Especificamente, em um primeiro momento, utilizamos o Cabri-Géomètre para mostrar, no plano complexo, a localização das raízes das equações do segundo grau com coeficientes reais. A seguir, variando cada um dos coeficientes da equação, percebemos como as raízes se comportavam, ou melhor, quais curvas elas descreviam.

A seguir, fizemos o mesmo estudo para equações do terceiro grau com coeficientes reais e, finalmente, para equações do segundo grau com coeficientes complexos.

Palavras chave: Funções polinomiais, números complexos, cônicas.

Eixo temático: Matemática avançada com Cabri.

Artigo

Existe um modo geométrico de se determinar as raízes reais de uma função real de 2º grau , basta determinar a interseção de seu gráfico com o eixo x. Porém, o que fazer caso essa função possua apenas raízes complexas?

Nesse caso, também existe um método geométrico para se determinar essas raízes: devemos refletir o gráfico da função na reta paralela ao eixo x que passa pelo seu vértice. Se traçamos a circunferência com centro — que passa pelas raízes do reflexo do gráfico, as raízes complexas de serão a interseção desta circunferência com eixo de simetria do gráfico de .

Esse método nos permite utilizar o Cabri-Géomètre para mostrar como as raízes de se comportam quando os coeficientes a, b e c variam. Descobrimos que:

a) Quando o coeficiente a varia a curva formada pelas raízes não reais é uma circunferência de centro − e raio . Esses valores obrigam que a circunferência tangencie o eixo das ordenadas.

b) Quando o coeficiente b varia, a curva formada pelas raízes não reais é uma circunferência com centro na origem e raio . Observe que, implicitamente, estamos considerando que a e c possuem o mesmo sinal pois, se isso não ocorrer, as raízes são reais.

c) Quando o coeficiente c varia as raízes não reais formam uma reta paralela ao eixo das ordenadas cortando o eixo das abscissas no ponto −—

Explicado o comportamento das raízes não reais da equação do 2º grau com coeficientes reais, partimos para voos mais altos e nos perguntamos: como se comportam as raízes do polinômio com coeficientes reais de terceiro grau ?

Para que o Cabri-Géomètre nos mostrasse as raízes desse polinômio do terceiro grau, nos inspiramos no método inicialmente desenvolvido por Omar Kayyan.

Dada a equação , fazemos . As soluções da equação do terceiro grau são as soluções do sistema

Como a curva descrita pela primeira equação é uma parábola e pela segunda é uma hipérbole, utilizamos a ferramenta "Cônicas" do Cabri-Géomètre para representar essas curvas e descobrir o ponto de interseção entre elas. A abscissa desse ponto de interseção é uma das raízes reais da equação. Como se trata de uma equação do terceiro grau com coeficientes reais, sempre existe ao menos um ponto de interseção entre as duas cônicas.

De posse dessa raiz, usamos o algoritmo de Briott-Ruffini para abaixar o grau da equação. A partir daí, utilizamos mais uma vez o método descrito no início desse artigo para determinar as raízes da equação do segundo grau, que são as outras raízes da equação do terceiro grau.

Descobrimos que:

a) Quando o coeficiente d varia, a curva formada pelas raízes não reais da equação do terceiro grau é uma hipérbole ou são duas retas.
b) Quando o coeficiente c varia, a curva formada pelas raízes não reais é semelhante a uma Conchoide de Nicomedes. Convém explicar que a curva fica realmente muito parecida com a conchoide, mas provamos que nossos olhos nos enganavam e se tratava de uma outra curva não notável.
c) Quando o coeficiente b varia, a curva descrita pelas raízes não reais lembra uma cardióide.
d) Quando o coeficiente a varia, a curva descrita pelas raízes não reais lembra circunferências ou um 8, não aparentando ser uma curva notável.

Finalmente, voltamos nossa atenção para as equações do 2º grau com coeficientes complexos. Tratamos o plano cartesiano utilizado pelo Cabri-Géomètre como se fosse o plano complexo e nele representamos os pontos correspondentes aos valores dos coeficientes da equação do 2º grau.

Nosso desafio era determinar as raízes da equação , com , no ambiente Cabri-Géomètre. Calculamos o valor de utilizando as ferramentas algébricas disponíveis. Para calcular ‾ combinamos a utilização das ferramentas algébricas com as geométricas, principalmente a bissetriz disponível no Cabri-Géomètre. Para o restante das operações necessárias à determinação da raiz da equação, usamos novamente as ferramentas algébricas disponíveis no Cabri-Géomètre.

Determinadas as raízes e variando os coeficientes, mais uma vez, pudemos verificar que curvas essas raízes descreviam. É claro que se o coeficiente percorrer todo o plano complexo, as raízes também o farão. Dessa forma, restringimos a variação dos coeficientes a retas no plano complexo. Descobrimos que:

a) Quando o coeficiente a varia, as raízes descrevem curvas que lembram um 8.

b) Quando o coeficiente varia, as raízes descrevem curvas simples ou duplas, mas que não são notáveis

c) Quando o coeficiente varia, as raízes descrevem hipérboles no plano complexo.

Convém ressaltar que o que já havíamos descoberto para a equação do segundo grau com coeficientes reais manteve-se, aqui, como caso particular.

Foi interessante observar que, no caso real, a variação do coeficiente fazia as raízes não reais da equação percorrer duas retas, o eixo das abscissas e uma outra reta perpendicular a ele. Considerando os coeficientes complexos, a variação de faz as raízes não reais da equação percorrer hipérboles. Descobrimos que as duas retas percorridas no caso real são, na realidade, as assíntotas das hipérboles do caso complexo.

Para maiores informações e a demonstração rigorosa do que foi exposto aqui, por favor, consulte a página do Curso de Matemática do Centro Universitário de Belo Horizonte onde um artigo completo estará disponível a partir de agosto de 2012. O endereço eletrônico é
http://www.unibh.br/graduacao/cursos/matematica/outras-informacoes

Referências

Alves, Laurito Miranda (2001). *The Geometry of Complex Numbers*. CabriWorld 2001

Lima, Rosana Nogueira de (1999). *Resolução de equações do terceiro grau através de cônicas.* Tese de Mestrado em Educação Matemática – PUC-SP

Su, Francis E., et al. "*Complex Roots Made Visible*." Math Fun Facts. http://www.math.hmc.edu/funfacts

❖❖❖

O Cabri 3D como habitat para o estudo dos Sólidos de Arquimedes

Talita Carvalho Silva de Almeida
Universidade Federal do Pará, Brasil
talita_almeida@yahoo.com.br

Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
zeze@pucsp.br

Resumo

O presente trabalho é um recorte de uma pesquisa que teve por objetivo revisitar o objeto matemático Sólidos Arquimedianos por meio de suas construções no ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*. Para investigar processos de construções para esses sólidos, recorremos a um estudo bibliográfico desenvolvido com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. O referencial teórico baseou-se na Transposição Didática e na Problemática Ecológica de Yves Chevallard (1991) para promover a articulação entre a análise epistemológica e a análise didática, além de apontar características outras que determinam a sobrevivência do objeto matemático Sólidos Arquimedianos enquanto objeto de ensino. A escolha metodológica pela pesquisa bibliográfica contribuiu para o alcance do objetivo desejado, visto que nos permitiu encontrar o *truncamento*, procedimento matemático realizado por renascentistas para a obtenção de sólidos arquimedianos a partir de cortes nas arestas de sólidos platônicos. A partir das análises das construções, pudemos constatar que o *Cabri 3D* se confirma como um habitat para o estudo dos Sólidos Arquimedianos, na medida em que reconhece como objeto todos os saberes que determinam a existência desse objeto matemático enquanto objeto de ensino.

Palavras-chave: Sólidos Arquimedianos, Cabri 3D, Transposição Didática, Truncamento.

Considerações Iniciais

Os Sólidos Arquimedianos não estão presentes na matemática ensinada na Escola Básica brasileira, embora apareçam em materiais didáticos, paradidáticos e de apoio ao professor por meio de exemplos e exercícios, em geral, relacionados à Relação de Euler e à convexidade, mas sem qualquer definição ou mesmo nomeação correspondente. O icosaedro truncado é o sólido arquimediano que mais aparece, provavelmente, por ser associado à bola de futebol.

De acordo com Veloso (1998, p.235),

> se na definição que demos de poliedro regular mantivermos a condição das faces serem polígonos regulares, mas não a de serem todas congruentes, obtemos uma família mais ampla de sólidos, estudada por Arquimedes (287 – 212 a. C.). As arestas são todas congruentes, e os vértices também. As faces são polígonos regulares, mas enquanto nos platônicos eram apenas de um tipo, aqui poderão ser de vários tipos. É ainda necessário acrescentar a condição de que todo o vértice pode ser transformado noutro vértice por uma simetria de poliedro. A estes sólidos é habitual chamar arquimedianos ou semi-regulares.

A carência de informações a respeito do objeto matemático Sólidos Arquimedianos no Brasil, bem como a dificuldade de encontrar materiais, na Escola Básica, que discorram mais detalhadamente sobre os mesmos, pode ser uma possível causa para que muitos desconheçam sua existência. Nesse sentido, nossa investigação teve por objetivo revisitar o objeto matemático sólidos arquimedianos por meio de suas construções no ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*.

Assim para alcançar nosso objetivo, recorremos a um estudo bibliográfico desenvolvido com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. De acordo com Gil (2009, p. 44), embora a pesquisa bibliográfica seja considerada como a primeira etapa de toda a pesquisa científica, "há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas".

Lakatos e Marconi (2001) assinalam que o contato direto do pesquisador com tudo aquilo que foi escrito a respeito do assunto, oferece meios, tanto para a definição e resolução de problemas já conhecidos, quanto à exploração de novas áreas, isto é, a descoberta de novos fatos ou dados, em qualquer campo do conhecimento.

Nesse sentido, recorrer a fontes históricas pode não só auxiliar a compreensão dos processos de desenvolvimento dos sólidos arquimedianos, mas também evidenciar tendências e posturas a serem consideradas no planejamento de ensino, o que traz a possibilidade de resgatar esse conhecimento para a matemática ensinada com o auxílio da tecnologia implementada no ambiente de geometria dinâmica *Cabri 3D*.

Um pouco de História

Alguns temas em geometria ficam esquecidos durante anos, ou séculos, para depois tornarem a despertar o interesse de alguns estudiosos, que retomam a sua exploração, e descobrem novos caminhos de estudo. Um desses diz respeito aos sólidos de Arquimedes, também conhecidos como poliedros semi-regulares.

De acordo com Eves (2004), os trabalhos originais de Arquimedes que tratam desses sólidos estão perdidos, assim como grande parte das obras dos matemáticos gregos. Seus trabalhos são conhecidos, principalmente, pelas escritas de comentadores. Pappus de Alexandria (290 d.C. - 350 d.C.), um comentador do início do quarto século, fornece-nos informações, a respeito desses sólidos em sua obra, composta de oito livros, denominada: *Coleção Matemática*.

É apenas no quinto livro da obra que Pappus atribui a Arquimedes a descoberta dos treze sólidos. Pappus organizou essas informações de acordo com o número total de faces de cada poliedro arquimediano. No entanto, não os nomeia e nem os ilustra. É dessa maneira, que o primeiro estudo matemático dos Sólidos Arquimedianos, pós-Arquimedes, é realizado. Esse estudo matemático parece que foi só retomado no século XV com

Kepler, talvez o primeiro a sistematizá-lo. No livro II de sua obra *Harmonices Mundi* de 1619, Kepler demonstrou que existem apenas treze Sólidos Arquimedianos e lhes atribuiu nomes.

Entretanto, no período do Renascimento, diversos artistas e matemáticos se interessaram pelo estudo e representação desses sólidos. Esses artistas, para variar seus desenhos, cortavam "cantos" e arestas de sólidos platônicos, o que, naturalmente, produzia alguns Sólidos Arquimedianos como resultado. O processo mais utilizado por esses artistas, que deu origem a essa redescoberta, é chamado de truncamento, eliminação de partes de um sólido de forma simétrica que pode ser feita a partir de seus vértices ou a partir de suas arestas.

Field (1997) assinala que cinco renascentistas – Piero della Francesca (1412-1492), Luca Pacioli (1445-1517), Leonardo da Vinci (1452-1519), Albrecht Dürer (1471-1528) e Daniele Barbaro (1513-1570) – descreveram em suas obras os Sólidos de Arquimedes sem o conhecimento do estudo de Arquimedes, relatado por Pappus, em escritos que foram impressos em 1588 e seus manuscritos não estavam disponíveis antes de 1560.

Para Field (1997), a história da redescoberta de poliedros arquimedianos durante o Renascimento não é a de recuperação de um texto clássico perdido, diz respeito à redescoberta da matemática real, matemática figurada por profissionais que exerceram atividades outras que não a de matemáticos, o que neste caso poderia ter sido puramente racional. No entanto, de acordo com o autor não há qualquer explicitação ou esquematização do estudo das relações entre Sólidos Platônicos, Sólidos Arquimedianos e os diferentes processos de construção a partir de truncaturas.

O *Cabri 3D* como *habitat* para os sólidos arquimedianos

Yves Chevallard desenvolveu a teoria da Ecologia Didática com o objetivo de abordar os problemas que se estabelecem entre os diferentes objetos do saber a ensinar. A ecologia didática se apóia nas ideias da ecologia biológica - *nicho*, *habitat*, *ecossistema* – para tentar explicar as relações entre os objetos matemáticos e no estudo do próprio objeto matemático. A ideia de *ecossistema* é utilizada por Chevallard (1991) para indicar um conjunto de saberes que ali vivem e evidenciar como esses saberes interagem entre si.

Para Chevallard (1991), um objeto matemático não vive isoladamente, então se faz necessário identificar, ou até mesmo fazer viver, um complexo de objetos em torno do próprio objeto. É nesse sentido que a problemática ecológica aparece de maneira mais explícita, uma vez que convém examinar os diferentes espaços em que encontramos o objeto matemático e os saberes com os quais ele entra em associação, em outras palavras, seus *habitats*. Para examinar esses diferentes *habitats* bem como os saberes que o objeto matemático entra em associação, Chevallard (1991) aponta a transposição didática como um instrumento de análise que pode evidenciar o percurso do saber desse objeto, desde sua origem até a sala de aula, indicando características que possibilitam definir a sua sobrevivência enquanto um objeto de ensino.

Assim, entendemos que o *Cabri 3D* é um *habitat* para o estudo dos Sólidos Arquimedianos se o reconhece como objeto, bem como reconhece todos os saberes que determinam a existência desse objeto matemático como objeto de ensino.

Análise de uma construção realizada no *Cabri 3D*

As construções no *Cabri 3D* foram realizadas por meio da operação de truncamento efetuadas em poliedros platônicos. Tal operação está aqui relacionada ao corte de “cantos” de poliedros platônicos de maneira a obter poliedros com todas as faces regulares.

Sabemos que onze dos treze poliedros arquimedianos podem ser produzidos por uma sucessão de cortes, truncaturas, em poliedros platônicos. Nesse trabalho apresentamos a construção no *Cabri 3D* do cubo truncado.

O Sólido Arquimediano *cubo truncado* se origina em um cubo em que se realizam cortes por uma distância adequada de cada vértice de tal forma que cada face do cubo se transforme em uma face octogonal regular. O truncamento realizado nos conduz a eliminação de “cantos” do cubo. A eliminação de cada “canto” do cubo nos apresenta um triângulo como face do cubo truncado, como mostra a Figura 1, uma vez que em seus vértices concorrem três arestas.

Para respeitar a regularidade das faces do cubo truncado, os pontos de corte na face quadrangular devem ser encontrados por um procedimento matemático. Considerando uma face ABCD do cubo de origem, representamos por: P_1 e P_2 os pontos de corte na aresta AB; P_3 e P_4 os pontos de corte na aresta BC; P_5 e P_6 os pontos de corte na aresta CD; P_7 e P_8 os pontos de corte da aresta AD; *a* a aresta da face e por *d* a distância entre um vértice e um ponto de corte, como pode ser visto na Figura 1.

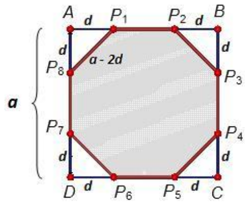


Figura 1: Pontos de corte na face do cubo.

Precisamos encontrar o valor da distância *d*. Como o triângulo AP_1P_8 é retângulo, pois , podemos aplicar o teorema de Pitágoras e obter a medida procurada, que no caso é .

Com a distancia , entre um vértice e o ponto de corte, já determinada, podemos iniciar o processo de geração do cubo truncado com a criação de um cubo no *Cabri 3D*. Em seguida, medimos o comprimento da aresta, com a ferramenta *comprimento,* indicando uma das arestas do cubo. Para inserir o valor da expressão na tela do *Cabri 3D,* que determina a distância *d* dos vértices em que as arestas são truncadas, utilizamos a ferramenta *calculadora* – indicando a aresta do cubo e digitando com o auxílio do teclado os demais valores - conforme mostra a Figura 2.

O resultado obtido com a expressão $\frac{\qquad}{-}$ é transferido para cada aresta do cubo com a ferramenta *transferência de medida*, como podemos ver na Figura 2 que mostra os pontos de corte encontrados com essa transferência.

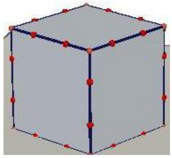


Figura 2: Pontos de corte do cubo.

Com os pontos de corte já indicados, iniciamos o processo de truncamento utilizando um plano de secção que deve ser criado com a ferramenta *plano* e com a indicação de três pontos, conforme mostra Figura 4. Com a ferramenta *recorte de poliedro*, o primeiro “canto” do cubo será eliminado, indicando-se o plano e o “canto” do cubo que contém o vértice desejado. Com o recurso *esconder/mostrar* podemos esconder o plano. O resultado é mostrado na Figura 5.

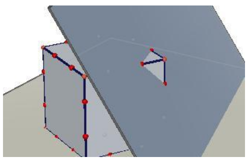


Figura 3: Plano de secção.

Figura 4: Eliminação do primeiro “canto” do cubo.

Para a eliminação dos demais “cantos”, criamos outro plano e utilizamos a ferramenta *recorte de poliedro* obtendo, como mostra a Figura 6, o cubo truncado gerado.

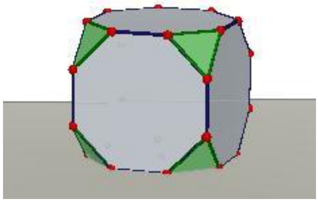


Figura 6: Cubo truncado gerado no Cabri 3D.

De acordo com Chevallard (1991), o objeto matemático cubo truncado existe se uma pessoa ou instituição o reconhece, mas para que esse mesmo objeto se transforme em objeto de ensino é necessário identificar onde ele pode viver, isto é, seu *habitat*. No entanto, para identificar esse *habitat*, alguns aspectos precisam ser considerados tais como: os saberes que possibilitam sua existência e as relações inter-hierárquicas entre esse poliedro e o poliedro que o originou. Para realizar a construção no *Cabri 3D* do sólido arquimediano *cubo truncado*, percebemos que saberes geométricos e algébricos viveram e interagiram entre si. Os saberes geométricos envolvidos em todo o processo, além do teorema de Pitágoras - cubo, medida da aresta, semi-reta, secção plana – foram reconhecidos pela instituição *Cabri 3D*, por meio das ferramentas *cubo*, *comprimento*, *semi-reta* e *plano*. Cada um desses saberes apresentou uma função no processo de construção. O saber *cubo* indicou o objeto geométrico a partir do qual a truncatura se iniciou, o saber *semi-reta* possibilitou indicar em cada aresta do cubo os pontos de truncatura e o saber *secção plana* auxiliou a eliminação dos "cantos" do cubo.

Durante a construção, percebemos também relações inter-hierárquicas entre o poliedro platônico de partida *cubo* e o poliedro de chegada *cubo truncado*. Lembramos que o arquimediano *cubo truncado* apresenta dois tipos de faces, tipo de face octogonal regular, obtida a partir de truncaturas nas arestas do cubo, e tipo de face triangular regular, obtida a partir da eliminação dos "cantos" do cubo. Assim, notamos que o número de arestas em cada face do arquimediano *cubo truncado*, obtido a partir de truncaturas de arestas do cubo, equivale ao dobro do número de arestas da face do poliedro de partida *cubo*. Além disso, o número total de vértices do cubo truncado equivale ao dobro do número de arestas do cubo, e os vértices do cubo truncado nada mais são que os pontos das arestas do cubo em que são realizadas as truncaturas.

Identificar os saberes que o objeto matemático cubo truncado entra em associação é importante na medida em que nos permite também verificar se o ambiente *Cabri 3D* os reconhece como objeto. É dessa maneira que nos aproximamos dos saberes envolvidos e verificamos se o *Cabri 3D* contribui para que os Sólidos Arquimedianos, em especial o cubo truncado, se transforme em objeto de ensino. Diante do exposto, o cubo truncado se tornou objeto para a instituição *Cabri 3D* no momento em que esta instituição o reconheceu e se relacionou com ele, o que nos leva a confirmar o *Cabri 3D* como um *habitat* para o estudo do sólido arquimediano cubo truncado na escola.

Referencias

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sábio ao saber enseñado. Tradução. Claudia Gilman. Buenos Aires: Aique Grupo.

Eves, Howard. Geometria: tópicos de história da matemática. Para uso em sala de aula. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

Field, J. V. (1997). Rediscovering the archimedean polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler. Archive for History of Exact Sciences, 50, 241-289.

Gil, A. C. (2009). Como elaborar projetos de pesquisa. (3th ed.). São Paulo: Atlas.

Kepler, J. (1864). Harmonices mundi libri V. Linz.

Lakatos, E.M.A. & Marconi, M. A. (2001). Fundamentos da metodologia científica. São Paulo:
Atlas.

Pappus. (1876). Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fredericus Hults. Tradução Weidmannos. Berolini.

Veloso, E. Geometria: temais atuais: materiais para professores (Desenvolvimento curricular no ensino secundário; 11). Portugal: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

❖❖❖

Cabri como herramienta fundamental en la solución de problemas geométricos

Martín E. Acosta
Carolina Mejía
Carlos W. Rodríguez
Universidad Industrial de Santander, Colombia
cwrodriguez@matematicas.uis.edu.co

Resumen

En la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga Colombia, hemos estado intentando aplicar las ideas de la matemática experimental utilizando como herramienta fundamental Cabri Geometry en sus versiones 2D y 3D para la solución de problemas geométricos de construcción. Utilizamos Cabri para realizar procesos de experimentación en los que producimos dibujos aproximados, formulamos conjeturas y las verificamos para llegar a procedimientos de construcción exactos. Una vez encontrada una construcción exacta, repetimos el proceso de experimentación para buscar argumentos teóricos que nos permitan demostrar los resultados obtenidos. Las posibilidades de arrastre de Cabri, su precisión en las medidas y las herramientas de traza y lugar geométrico son instrumentos valiosos e incluso indispensables en algunas ocasiones para realizar dicho trabajo de experimentación.

Queremos presentar en este congreso algunos ejemplos de los problemas trabajados, que nos permiten concluir que el trabajo experimental en geometría, y en particular el uso de Cabri para la experimentación contribuye a desarrollar una intuición espacial necesaria para la formulación de conjeturas y su verificación, pero también contribuye a una mejor comprensión de la teoría geométrica, en la búsqueda de formalizar los resultados encontrados de manera intuitiva. En algunos casos, se trata de construir alguna figura geométrica sometida a unas condiciones dadas, en otros el problema consiste en encontrar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen cierta condición que se da a un objeto geométrico y en otros hemos utilizado la

herramienta "lugar geométrico" de Cabri para encontrar la solución al problema planteado.

Palabras clave: Matemática experimental, geometría dinámica, lugar geométrico, construcción.

Eje Temático: Geometría plana y espacial con Cabri.

1. Problema

En nuestra investigación hemos estudiado diferentes tipos de problemas geométricos. En algunos casos se trata de construir alguna figura geométrica sometida a unas condiciones dadas, en otros el problema consiste en encontrar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen cierta condición que se da a un objeto geométrico y en otros hemos utilizado la herramienta "lugar geométrico" de Cabri para encontrar la solución al problema planteado. Para abordar estos problemas adoptamos el punto de vista de la matemática experimental, según el cual es importante difundir las prácticas experimentales en matemáticas sin abandonar completamente la meta del rigor máximo de la demostración. Proponemos como hipótesis fundamental la posibilidad de formalizar a posteriori los procesos experimentales para desarrollar una demostración rigurosa.

Queremos presentar un ejemplo concreto de esta práctica de matemática experimental en el campo de la geometría elemental. Las capacidades de cómputo y de representación visual de Cabri hacen posible una experimentación visual y numérica sin correr excesivos riesgos de error debidos a limitaciones de tipo perceptivo o de exactitud de representación gráfica.

El problema de nuestro ejemplo consiste en construir dos círculos C_1 y C_2 de la siguiente manera: El círculo C_1 debe ser tangente al cuadrado EFGH y debe ser tangente a los círculos σ_1 y σ_2, el círculo C_2 debe ser tangente al segmento IJ y a los círculos σ_1 y σ_2 como se muestra en la Figura 1

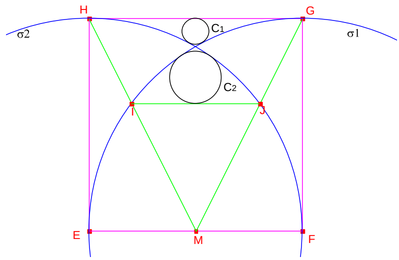


Figura 1

2. Exploración experimental

Observemos que la mediatriz del segmento *EF* corta al cuadrado en los puntos M y N, y es el eje de simetría de la figura. Por esto sabemos que el centro de cada uno de los círculos buscados estará sobre el segmento MN (ver Figura 2).

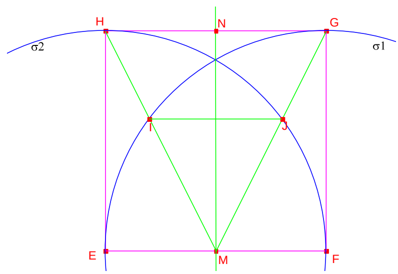


Figura 2

Construimos un círculo tangente a HG en N y con centro sobre la recta MN. Llamemos *O* este centro. Si movemos *O* vemos que en algún momento este círculo es tangente a σ_1. Existe pues una familia de círculos dentro de la cual está una solución al problema. Necesitamos caracterizar el punto de tangencia del círculo solución con σ_1 como parte de una familia de puntos que dependen del punto *O*.

Sean A y B los puntos de intersección del círculo con centro en O y el círculo σ_1. Cuando estos dos círculos son tangentes, los puntos A y B coinciden. Por lo tanto, podemos caracterizar el punto de tangencia como parte de la familia de los puntos medios de los segmentos AB (ver Figura 3)

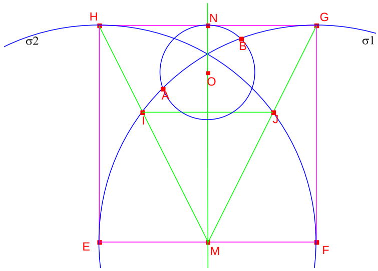


Figura 3

Construimos el punto medio C del segmento AB. Trazamos el lugar geométrico del punto C con respecto al punto O usando la herramienta "lugar geométrico" de Cabri. Observamos que al parece es un arco de un círculo (ver Figura 4)[7].

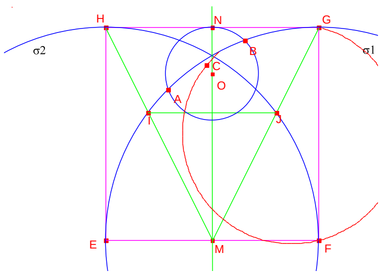


Figura 4

Si construimos este círculo, sus intersecciones con σ_1 serán los puntos de tangencia del círculo solución C_1 con σ_1.
Para construir el círculo que coincide con este lugar geométrico necesitamos determinar tres puntos. Observando la figura

[7] El arco faltante corresponde a los casos en los que el círculo de centro O no corta a σ_1. Una manera de construir el arco faltante sería usando las intersecciones de estos dos círculos incluyendo las soluciones imaginarias. Para estas construcciones ver Cuppens.

vemos que los puntos G, F y C pertenecen al lugar geométrico. Evidentemente el punto C, que generó el lugar, pertenece al mismo. Debemos examinar si los puntos F y G corresponden a puntos medios de intersecciones de círculos de centro O con σ_1. F es el centro del círculo σ_1, así que será el punto medio de alguna de las cuerdas comunes a los dos círculos. Por otro lado, cuando O está en el infinito, el círculo correspondiente coincide con la recta HG. Esta recta es tangente a σ_1 y por lo tanto en este caso los puntos A y B coinciden con G. Construimos el círculo que pasa por C, F y G. Llamemos este círculo γ. Los puntos de intersección de los círculos γ y σ_1 son los puntos de tangencia buscados, sin embargo el punto G no nos interesa en este caso (ver Figura 5).

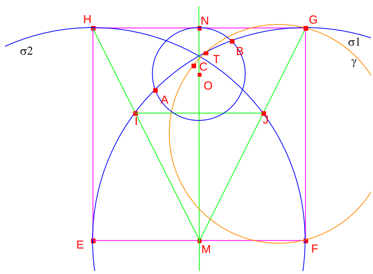


Figura 5

Sea T el punto de intersección entre γ y σ_1. El siguiente paso sería construir el círculo solución, usando el punto T. Basta con trazar la mediatriz entre los puntos N y T y marcar el punto de intersección entre esta y la mediatriz MN, sea O_1 este punto. O_1 es el centro del círculo buscado C_1 (ver Figura 6).

Para verificar que la construcción sea correcta, controlamos si el círculo C_1 es tangente al círculo σ_2. Para ello trazamos la recta O_1 E (E es el centro de σ_2) y llamamos T' la intersección de esta recta con σ_2. Si T' está sobre C_1, entonces C_1 es tangente a σ_2. Para verificar esta propiedad usamos la herramienta 'pertenece' de Cabri. (Figura 6)

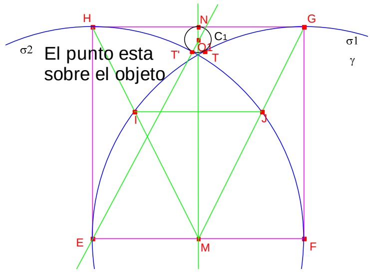


Figura 6

Ahora vamos a solucionar la construcción del segundo círculo del problema, C_2. Al igual que para el círculo C_1, sabemos que este debe ser tangente a σ_1, σ_2 y al segmento IJ. Nuevamente, el centro del círculo C_2 debe estar sobre la recta MN y pasar por el punto K de intersección entre IJ y MN. Construimos un círculo tangente a IJ en K y de centro O' sobre la recta MN. Al igual que para la solución de C_1, vamos a considerar los dos puntos de intersección de este círculo con σ_1 (llamamos A' y B'), y su punto medio (C'). Cuando el círculo de centro O' sea tangente a σ_1, los puntos A', B' y C' coincidirán. Solicitamos a Cabri el lugar del punto C' con respecto a O' y constatamos que nuevamente es un arco de círculo (ver Figura 7)[8].

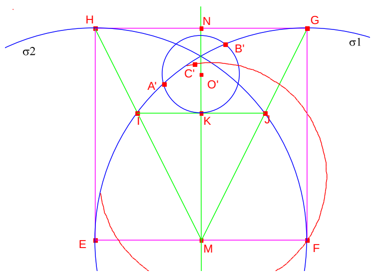


Figura 7

[8] Ver nota 1.

Los puntos de corte de ese lugar geométrico con σ_1 serán los puntos de tangencia del círculo buscado. Para poder construirlos necesitamos construir el círculo correspondiente al lugar geométrico y por lo tanto necesitamos conocer tres puntos, pero en la figura sólo podemos identificar claramente dos: F y C'. Sin embargo, podemos conjeturar mirando la figura que el punto de corte de ese lugar geométrico con el lado FG es el punto de intersección de la recta IJ con FG, que llamaremos L (ver Figura 8).

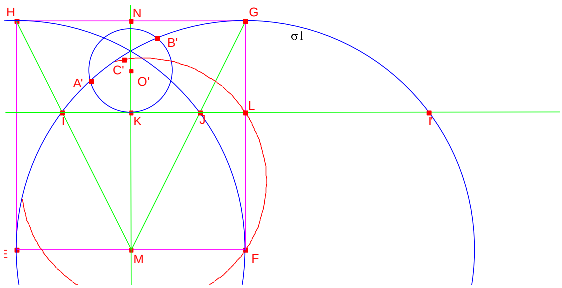


Figura 8

Cuando el punto O' está en el infinito, el círculo coincide con la recta IJ. Como los puntos I y J son simétricos con respecto a MN y esta es paralela a FG, entonces IJ es perpendicular a FG. Pero FG es un eje de simetría de σ_1, por lo tanto la intersección de FG con IJ es el punto medio de la cuerda que define IJ con respecto a σ_1 y por lo tanto es punto medio de los dos puntos I e I' de intersección de IJ con σ_1 (ver Figura 8). Así construimos el círculo que pasa por *C'*, F y L que denotamos como γ'. Nuevamente este círculo corta σ_1 en dos puntos S y U pero el que nos interesa es S que será el punto de tangencia del círculo C_2 con σ_1 (ver Figura 9).

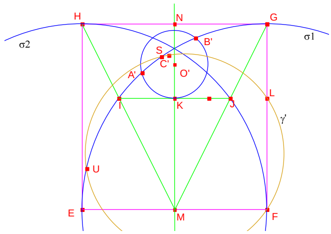


Figura 9

Construimos entonces el círculo C_2 a partir de S y verificamos como antes que es tangente también al círculo σ_2 (ver Figura 10).

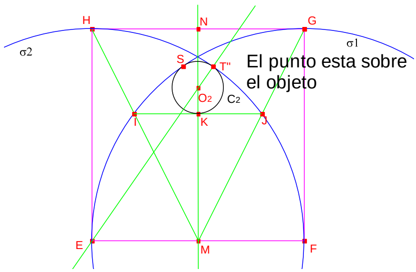


Figura 10

Hasta aquí hemos resuelto de manera experimental el problema.

3. *Formalización*

Ahora debemos demostrar que las construcciones hechas son efectivamente las soluciones al problema. Tenemos que demostrar que:

1. El lugar de C con respecto a O es un círculo y el lugar de C' con respecto a O' es un círculo.
2. Estos círculos pasan por tres puntos conocidos, determinados anteriormente.

Definición. Dados dos círculos, el *eje radical* es el lugar de todos los puntos que tienen igual potencia con respecto a los dos círculos (ver Moise).

Observación: Dados dos círculos secantes, la recta que contiene la cuerda común a los dos círculos es el eje radical.

Lema 1. Dados tres círculos, no todos tangentes en un mismo punto, los tres ejes radicales son concurrentes.

Demostración. Sean α_1, α_2 y α_3 los tres círculos dados. Llamemos r_1 el eje radical de α_1 y α_2 y r_2 el eje radical de α_2 y α_3. Como α_1, α_2 y α_3 no son tangentes en un mismo punto entonces r_1 y r_2 son diferentes y se cortan en un punto R. Note que R tiene igual potencia con respecto a α_1 y a α_2, y también con respecto a α_2 y a α_3, por lo tanto, R pertenece al eje radical r_3 de α_1 y α_3. Los tres ejes concurren en R (ver Figura 11). □

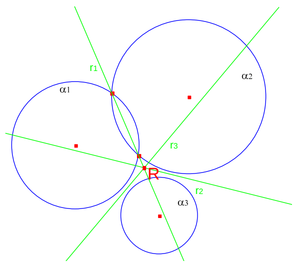


Figura 11

Lema 2. Dado un haz de círculos tangentes en un punto y un círculo α que no está en el haz, las rectas que contienen las cuerdas comunes de α y cualquier círculo del haz pasan por un punto fijo.

Demostración. Observe que la recta tangente común a todos los círculos del haz es el eje radical de todos estos círculos. Sean s_1 y s_2 dos círculos tangentes que pertenecen al haz y α el círculo exterior al haz. Por el Lema 1, sus ejes radicales se cortan en un punto R. Si reemplazamos s_2 por cualquier otro círculo s_3 de la familia, el eje radical de s_3 y α también debe pasar por R, puesto que R es la intersección del eje radical de s_1 y s_3 y el eje radical de s_1 y α (ver Figura 12).□

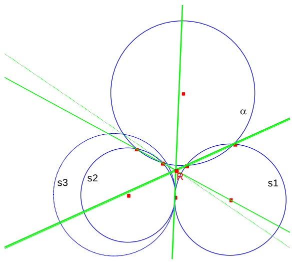


Figura 12

Lema 3. Dado P un punto y α un círculo de centro O, el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas definidas por las rectas que pasan por P es un círculo.

Demostración. Sea l una recta que pasa por P y corta a α en A y B. Sea M el punto medio de AB. La recta perpendicular a AB por M pasa por el centro O. Como el ángulo PMO es recto, el punto M está sobre el círculo de diámetro PO (ver Figura 13). □

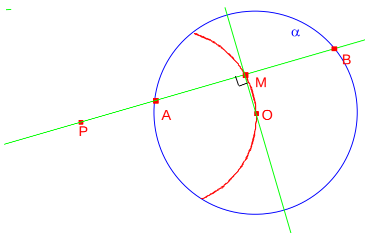


Figura 13

Para la construcción de los dos círculos C_1 y C_2 solución del problema, utilizamos dos haces de círculos tangentes en un punto: Para C_1, los círculos tangentes en N y para C_2 los círculos tangentes en K. Luego, consideramos el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas comunes de los círculos de estos haces y σ_1. De acuerdo con los lemas anteriores tenemos que todas esas cuerdas comunes pasan por un punto fijo y por lo tanto el lugar geométrico es un círculo. Por lo tanto se tiene que los círculos C_1 y C_2 son solución al problema propuesto.

4. *Conclusiones*

En este trabajo, las posibilidades de experimentación con Cabri fueron determinantes tanto para la formulación y verificación de nuestras conjeturas, como para la demostración de las mismas. En particular, la herramienta 'lugar geométrico' nos permitió visualizar la forma de los lugares utilizados, así como algunos puntos con los cuales construir esos lugares. Esta ayuda no evita el trabajo deductivo, puesto que una vez construida la solución, es necesario demostrar que realmente el lugar obtenido es el que se observó en la figura de Cabri. Para esta demostración utilizamos Cabri para representar el problema en la forma más general posible y buscar teoremas que permitieran su deducción.

Referencias

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, vol 17, num 3.

Borwein J et al. (2004). *Experimentation in mathematics, computational paths to discovery*. A. K. Peters. USA.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A. (2009). Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: the Elaboration of Some Research Hypotheses. In *Proceedings of the 6th Conference on European Research in Mathematics Education*, Lyon.

Cuppens, R. *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri Géomètre.* Brochure APMEP n° 124 & 125.

Kuntz, G. *Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques*. Dossiers de la VST, en ligne

http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche experimentale/sommaire.htm

Moise, E., and Downs, F. Jr. (1964). *Geometría Moderna*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. Massachusetts.

❖❖❖

Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus

Edinsson Fernández Mosquera
Área de Educación Matemática
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Pasto – Colombia
edi454@yahoo.com, edinfer@udenar.edu.co

María Fernanda Mejía Palomino
Escuela Normal Superior Farallones de Cali y Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Cali – Colombia
mafanda1216@yahoo.com.ar, maferme@univalle.edu.co

Resumen

Esta investigación se asume como una intervención didáctica en el aula, que se ubica dentro del contexto del aprendizaje de las cónicas vistas como lugares geométricos, con la mediación del *Cabri Géomètre II Plus*. En la misma, se estudió una secuencia de situaciones didácticas, donde se plantearon problemas de construcción geométrica de estas curvas desde el enfoque puntual hacia el global.

La secuencia se diseñó con el propósito que los estudiantes realizaran en primera instancia, construcciones punto por punto de cada una de las cónicas y luego construcciones geométricas donde se utilizara la figura desde un punto de vista global, para caracterizar geométricamente cada una de las ellas.

La metodología de la investigación se sustentó en un *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995). En el diseño de las situaciones, se efectuó un análisis preliminar, fundado en tres dimensiones: la didáctica, la cognitiva y la histórico – epistemológica.

La pregunta que orientó esta investigación fue: ¿Qué *fenómenos didácticos* genera la *mediación* del *Cabri Géomètre II Plus*, en la *actividad matemática* de los estudiantes que se inician en un curso de *geometría analítica*, en el marco de *construcciones*

geométricas de las *cónicas* como *lugares geométricos* desde lo *puntual* y lo *global*?

Para dar respuesta a esta cuestión se propusieron los siguientes objetivos: 1. Diseñar desde los referentes de la *TSD* (Brousseau, 2007) y de la *micro-ingeniería didáctica* una secuencia de situaciones didácticas para el estudio de las cónicas como lugares geométricos en el Cabri Géomètre II Plus. 2. Analizar la actividad matemática de los estudiantes de un curso universitario de *geometría analítica* cuando se aborda la construcción geométrica de las cónicas en el enfoque puntual y global mediado por el *Cabri Géomètre II Plus*.

Esta investigación se realizó en el contexto de las actividades de un curso de geometría analítica con 25 estudiantes del programa de la Licenciatura en Matemáticas, en una Universidad del suroccidente Colombiano. La información recolectada y su análisis, evidenció que las situaciones didácticas planteadas desde las construcciones geométricas puntuales permitieron emerger construcciones geométricas globales en el *Cabri Géomètre II Plus* y que a su vez este ambiente permitió retroalimentaciones que permitieron a los estudiantes caracterizar algunas de las propiedades geométricas de las cónicas. El diseño de las situaciones restituye el sentido geométrico de las Cónicas sin desligarse del enfoque usual, el algebraico, trayendo consigo una complementariedad en los enfoques usuales para que los estudiantes comprendan las propiedades geométricas.

Palabras clave: cónicas, lugar geométrico, construcciones geométricas, enfoque puntual - global, situaciones didácticas.

Eje Temático: Experiencia educativa con asistencia de Cabri.

❖❖❖

Diseño y construcción de una estructura civil (puente) con fundamentos de geometría dinámica

Luis Fernando Moreno Montoya
Universidad de Medellín, Colombia
lufer.angle@gmail.com

Luis Albeiro Zabala
Universidad de Medellín, Colombia
lzabala@udem.edu.com

Resumen

La esencia del proyecto es mostrar como la geometría dinámica puede ser utilizada de forma creativa para favorecer la comprensión de conceptos aplicados de la ingeniería. El estudio de la geometría de un elemento estructural fundamentado en la herramienta dinámica Cabrí II plus optimiza la capacidad de su análisis y del planteamiento de posibles hipótesis.

¿Qué conceptos geométricos son útiles en el diseño estructural de un puente?

El objetivo es determinar utilizando el recurso del software Cabrí cuales son los requerimientos geométricos para el diseño de un puente funcional, sin tener en cuenta procedimientos del cálculo estructural.

Palabras clave: arco, Cabrí, geometría dinámica, geometría estructural, puente.

Eje temático: Física, química e ingeniería con asistencia de Cabrí

Pertinencia del tema abordado

Nuestra intervención en Iberocabri 2012 pretende ilustrar como un conjunto de conceptos teóricos de las ciencias básicas abordados en primeros semestres de ingeniería pueden ser empleados como herramientas que esculpen esos visos de creatividad paridos por nuestras pasiones.

Aprender a palpar las matemáticas, a hacerlas conscientes en el diario vivir, es un procesos que se logra en la medida en que por iniciativa propia se desea incursionar en la realidad de sus sueños, y se buscan experiencias de aprendizaje significativos.

Desde la perspectiva de un estudiante que inicia un curso de geometría asediado por las malas calificaciones de sus exámenes, pero motivado por maestro con iniciativa y visión como lo es Luis Albeiro Zabala, un ser que genera un vicio constante en ti por descubrir respuestas y que se ocupa por encender la chispa de la intriga.

Puedo afirmar que ganar materias de matemáticas ha sido una tarea constantemente difícil, pero *descubrir matemáticas para la vida y enaltecer su importancia en la historia de la humanidad, ha sido realmente el examen diario más fácil de ganar*, gracias a las motivaciones que implica el ser apasionado. La catedra fue mi gran reto, y la pasión el energizante que lo hizo alcanzable.

Objetivos de la investigación

Determinar mediante el recurso de Geometría Dinámica y usando el software CABRI II PLUS los requerimientos de construcción de estructuras civiles sin conocimiento profundo de conceptos afines a la ingeniería civil, minimizando los impedimentos a la hora de diseñar y modelar físicamente estas estructuras

Marco teórico en el que se basa el trabajo

Los puentes en arco se conocen desde la mas remota antigüedad y aparecen restos arqueológicos de puentes arcos de rocas desde los Sumerios en Mesopotamia, 2000 a.c.

Por verdadero arco se entiende, aquel en que las dovelas de roca se orientan radialmente y se soportan entre si. Es con la civilización Romana cuando los arcos de roca se generalizan y adquieren carácter de construcción habitual en los años 700 antes de cristo.

Los puentes arcos de piedra pasan por diferentes etapas: Los puentes Romanos [figura1: puente romano de Mérida], los puentes medievales [figura 2: Puente Medieval en Frías Burgos] y los puentes modernos de los siglos XVI al XIX donde se cita el puente de la Concordia en Paris [figura 3: Puente de la concordia], el cual fue proyectado por J.R. Perronel a finales del siglo XVIII. Representa, un hito en que los arcos de piedra se abordan de manera racional y academicista.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Teoría del arco

El arco transforma las fuerzas de compresión verticales, en fuerzas laterales, es por esta forma que debe construirse los arcos junto a elementos que estriben la estructura a suelo firme, como por ejemplo muros de contención. Las dovelas del arco van empujándose entre sí, transmitiendo las fuerzas verticales y convirtiéndolas en un componente horizontal. El cálculo del empuje de un arco, y poder decidir qué dimensión debía tener el estribo para que el arco fuera estabilizado, fue uno de los problemas fundamentales en la construcción. Algunos lo han definido el "enigma de la arquitectura".

El primero en determinar una teoría acerca de como funciona un arco, recae sobre Leonardo da Vinci, pero no es hasta que en 1670 el físico Robert Hooke formula el problema en términos científicos y menciona al final de uno de sus libros, en forma de anagrama, como se asemeja el arco a catenaria invertida.

Algunos conceptos aplicados

Si se coloca un apoyo en el punto medio de la luz que forman los apoyos extremos de una viga, las cargas actuantes sobre esta se distribuyen de forma más uniforme.

Se aplicó la construcción y el concepto "de mediatriz de un segmento"

Los arcos son una forma estructural que se adapta a mayores luces, y permite la aplicación de la ley de momentos para la distribución de cargas gravitatorias.

Se aplicó la construcción de una circunferencia por tres puntos, y el arco que subtendía en la circunferencia los puntos de apoyo.

Cuando se aplican tensiones radiales que unen la cercha en arco con la superficie de rodadura, la carga puntual ubicada en el centro de la luz se distribuye en la cercha y es concentrada en los nodos de tal elemento.

Se aplicó la construcción de la recta pendiente al arco, en el punto de tangencia se trazo una recta perpendicular y esta ilustró de forma precisa los puntos en los cuales se debían disponer los cables a tensión.

Metodología seguida

El diseño de un puente funcional y estructural fundamentado en conceptos geométricos posteriores al planteamiento del área de la ingeniería fue realizado en el software CABRI; este fue llevado a un modelo físico a escala y después se analizó su comportamiento en el laboratorio.

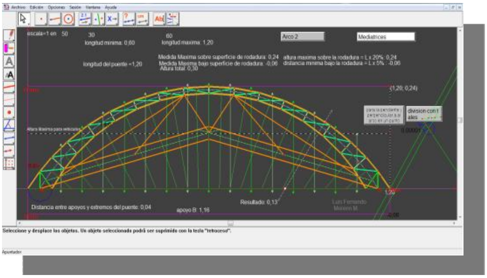


Figura 4

Se realizó la aplicación al modelo de forma física representada en una maqueta con una escala de 1:50, para ser construido utilizando madera balso, alfileres, cáñamo y pegamento para madera, empleando un diseño que cumpliera con ciertas condiciones dimensionales y generara la mayor utilidad posible, cumpliendo una serie de requisitos totalmente lógicos en el diseño estructural.

Figura 5

Figura 6

Grado de avance de la investigación

En Desarrollo.

Resultados

Se comprobó experimentalmente que conceptos de Geometría Euclidiana aplicados al tema definen comportamientos físicos de una estructura y que la metodología es eficaz, mediante una maqueta, la cual participó en el **X CONCURSO DE**

ESTRUCTURAS EIA, donde ocupó el primer puesto en su categoría, demostrando su funcionalidad constructiva y su buen comportamiento mecánico ante su falla en laboratorio.

En el marco de la **V Feria de la creatividad,** el proyecto fue el ganador del evento como "Mejor Proyecto Creativo", y en el nodo de semilleros **REDCOLSI** nodo Antioquia, en 2012 obtuvo un puntaje de 98.67 en su calificación, siendo esta la más alta.

Conclusiones

1. El estudio de la geometría de un elemento estructural fundamentado en herramientas dinámicas optimiza la capacidad de su análisis y del planteamiento de posibles hipótesis estructurales.
2. Un parámetro fundamental de cualquier estructura es su forma, y optimiza su funcionalidad sin tener que ver con el tipo de material utilizado.
3. Se puede comprobar experimentalmente que conceptos de Geometría Euclidiana aplicados al tema definen comportamientos físicos de una estructura.
4. Se definió el diseño de un puente en arco, con bondades dinámicas en su modelo, se postulan tres construcciones geométricas cuyas características de forma contienen aplicados conceptos estructurales ya demostrados por la física. Un parámetro fundamental de cualquier estructura es su forma, y optimiza su funcionalidad sin tener que ver con el tipo de material utilizado.

Referencias

Álvarez C, Emiliano. (2003). *Elementos de geometría*. Editorial Universidad de Medellín.

Jean-Rodolphe Perronet, (2003), *La construcción de puentes en el siglo XVIII*, Editorial Reverte, pág. 234

Díaz Barriga, E. (2006). *Geometría dinámica con Cabri-Géomètre.* Editorial Kali.

❖❖❖

Aprendizaje basado en problemas en didáctica de la matemática, caso: el teorema de pitágoras y algunas extensiones mediado por Cabri Geometre II Plus

Vivian Libeth Uzuriaga López
Universidad Tecnológica de Pereira UTP, Pereira – Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co

Martha Cecilia Mosquera Urrutia
Universidad Surcolombiana USCO Neiva, Colombia
martha.mosquera@usco.edu.co

Resumen

Se presentan resultados de investigación en los que se evidenciaron algunos problemas que se presentaron al mediar la enseñanza de conceptos por CABRI GEOMETRE II plus, resultados que son pertinentes para los profesionales que trabajan en la formación de profesores.

Se ilustrarán algunos problemas para cuya solución se requiere de un uso comprensivo del Teorema de Pitágoras, las dificultades encontradas al trabajarlos en la clase de Didáctica de la Matemática y las alternativas de solución a las mismas, en el marco del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

Asimismo, se mostrarán ejemplos de actividades desarrolladas en el aula de clase por estudiantes del programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, que permiten evidenciar las dificultades encontradas.

Entre los logros a obtener a partir de esta investigación se espera que los estudiantes del programa de la Licenciatura diseñen unidades de análisis y guías de clase que puedan ser contextualizadas en diferentes ambientes de trabajo y en el mediano plazo diseñar y socializar una serie de estrategias didácticas que le permitan a los docentes hacer mas eficiente el trabajo de la mediación con CABRI GEOMETRE II PLUS.

Cuerpo del documento

Se entiende el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como un método didáctico que permite al estudiante que se desempeñará como profesor, desarrollar capacidades, conocimientos y habilidades, para identificar, analizar y proponer alternativas de solución a los problemas de enseñanza y/o aprendizaje de la matemática, de manera eficaz, eficiente y humana, utilizando principalmente la investigación como estrategia pedagógica (IEP).

Para el caso de la investigación los problemas objeto de análisis fueron:

- La baja comprensión de los conceptos
- La dificultad para utilizar el programa
- La didáctica de la matemática

Algunas de las desventajas que se tienen al incorporar un paquete matemático o un software en el aula de clase es que éste se convierte en una carga adicional para el estudiante, debido a los requerimientos de programación para usarlos y en otros la cantidad de comandos o sintaxis que se deben aprender para hacer uso del mismo; es así como las clases se convierten en buscar el error de sintaxis o de programación por la cual no se obtiene el resultado esperado y lo que menos interesa es el concepto que se quiere enseñar.

En algunas circunstancias el alumno no utiliza el software para contextualizar conceptos, ni para demostrarlos numéricamente, conjeturar o formular hipótesis, sino que se convierte en una herramienta de simple comprobación; impidiendo así el avance del alumno hacia la independencia, autorregulación y autonomía. Es decir, no se privilegia el desarrollo de diferentes formas de pensamiento.

En contraste con lo anterior el software CABRI GEOMETRE II PLUS (SCG), abre alternativas para construir figuras, cambiar su tamaño, rotarlas y moverlas o "arrastrarlas" para comprobar sus propiedades, ofreciendo al usuario opciones creativas para el desarrollo y representación de los conceptos geométricos.

La regla sin marcas y el compás colapsible[9] de Euclides, herramientas teóricas que a pesar de no servir para hacer mediciones le permitieron a Euclides mediante la aplicación de sus postulados: construir polígonos regulares, rectas paralelas, perpendiculares, números, etc., encuentran espacio nuevamente en el cuaderno de notas interactivo de geometría de Jean-Marie Laborde & Franck Bellemain, con la ventaja de que con ellos se puede poner las figuras en movimiento y construir cónicas. Para hacer esto posible es necesario "saber y saber hacer geometría"; por esta razón, aunque el objetivo de esta investigación no consiste en poner de presente las causas por las cuales el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido en los planes de estudio y las aulas de todos los niveles educativos, inclusive en los de profesores en formación; lo que si se considera importante es llamar la atención sobre las dificultades que enfrenta un profesor de matemáticas cuando no posee las herramientas necesarias para explicar los conceptos en un contexto más amplio al de solamente definiciones.

Para abordar el estudio teórico de estas dificultades se tomaron aspectos considerados por las autoras como significativos de las teorías del aprendizaje basado en problemas (ABP), la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) (Godino, J. Batanero, C. & Font, V.(2003)); en el marco de un curso de Didáctica de la Matemática del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, con el objetivo de que el estudiante para profesor desarrolle capacidades para "*diseñar situaciones didácticas en ambientes mediados por el Software CABRI GEOMETRE II PLUS como herramienta didáctica para acercar a los aprendices a la comprensión de los conceptos*" en este caso particular se trabajaron aspectos relacionados con el Teorema de Pitágoras y su uso comprensivo.

[9] El Compás colapsable (colapsible) es un instrumento con el cual es posible trazar una circunferencia con un arco arbitrario, su dificultad radica en que no permite transportar las distancias o aberturas.

En relación con las categorías de análisis se detectaron tres variables que influyen en el logro o no de los objetivos; estas fueron de tres tipos:

En primer lugar ***las relacionadas con la baja comprensión de los conceptos***: la mayoría de los estudiantes no manejan los conceptos geométricos que les permiten hacer un uso adecuado de la herramienta SCG.

En segundo lugar ***las relacionadas con el conocimiento didáctico del contenido*** que se evidencian en la imposibilidad de diseñar situaciones de aprendizaje o plantear problemas geométricos que representen verdaderos desafíos para los aprendices, que mantengan la motivación y potencien el desarrollo del pensamiento, porque ellos solo se limitan al vocabulario del texto y las definiciones sin sentido.

Finalmente, ***las relacionadas con la dificultad para utilizar el software***, como no comprenden que los objetos con los que se trabaja en geometría son teóricos y no reales y que para "dibujar" esos objetos se deben poseer las herramientas para crear un sistema de representación en el cual se distingan las "propiedades", entonces puede que en algunos casos logren construir las figuras y hasta "arrastrarlas" pero no hacen evidentes las características de la figura que cambian o permanecen al hacerlo, es decir, no se potencia el pensamiento variacional.

Para abordar el estudio de las variables inicialmente se trabajaron problemas y construcciones sobre el papel, construcciones con regla y compás y se realizaron plenarias en las cuales el papel del docente consistió en hacer evidentes las situaciones y enfrentar a los alumnos, futuros docentes, a ellas, buscando que propusieran alternativas de solución ajustadas a las competencias de sus aprendientes.

En esta situación por ejemplo, se les pidió a los estudiantes que formularan una pregunta o problema en cuya resolución se hiciera necesario el uso comprensivo del teorema de Pitágoras.
Entre todas las que formularon se escogió una "***construir un cuadrado de área 6 cm^2 en <u>tamaño real</u>"*** y se les pidió a los

estudiantes que además de resolver el problema prepararan una explicación para los estudiantes del grado séptimo.

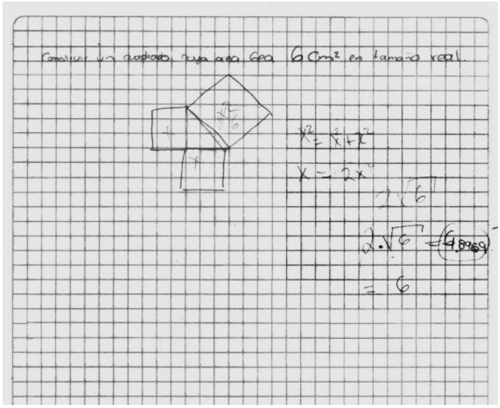


Figura 1

En este caso (fig. 1) el estudiante asocia una solución de tipo algebraico "sin sentido" ya que a los tres lados del triángulo los llamó , pero a su vez indica que el ángulo del lado inferior izquierdo del triángulo es recto, o sea que según las propiedades que el estudiante exhibe el triángulo es "***rectángulo y equilátero***", en segundo lugar plantea que al resolver dicha ecuación obtiene que es decir que y finalmente llegó a la conclusión pero como finalmente concluye que todo es "raíz de seis" o "seis"

Además de las dificultades que presenta la construcción, el sistema de representación y el manejo algebraico sobre el papel, en el aula de informática se pone en evidencia la dificultad para dibujar un triángulo rectángulo, un cuadrado cuya área se conoce y una vez que se logra dibujar esas figuras ¿cómo comprobar sus propiedades"

Por ello inicialmente las unidades se desarrollan desde la reconstrucción de los conceptos básicos de la geometría euclideana.

De hecho esta metodología implica un cambio de roles en el aula de clase, el reconocimiento de los errores y la construcción de soluciones a partir de ellos.

Las clases de didáctica en el aula de informática, resultan muy agradables, aunque se presenta una tendencia marcada de algunos estudiantes por abandonar la tarea y conectarse a las redes sociales o jugar en el computador.

Cuando se utilizan las calculadoras gráficas, algunas dificultades se hacen mucho más evidentes (el arrastre, la comprobación de propiedades)

Los espacios de clase en los que se analizan los aciertos y errores de los estudiantes y la posibilidad de interactuar con docentes en ejercicio y estudiantes, permiten que desde los primeros semestres los estudiantes para profesor desarrollen capacidades para identificar y proponer alternativas de solución a los problemas propios de su profesión

Referencias

Arriero, C. & García, I. (2009). *Descubrir la geometría del entorno con Cabri*. Narcea, S.A. Madrid.

Díaz Barriga. E. (2006). *Geometría dinámica con Cabri-geomètre*. (3ª ed) México. Editorial Kali.

Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones.* (1ª ed.). Buenos Aires. Libros del Zorzal.

❖❖❖

Taller digital con Cabri gómetra

Daniel Léonard, Oskar Gàmez
Denis Conteau, Damien Hanser
Gilles Duchanois, Philippe Leclère
Ecole nationale supérieure d'architecture de Nancy
Centro de investigación en arquitectura e ingeniería
Universidad de Lorraine, Francia
prenom.nom@nancy.archi.fr

Introduction

Avec l'émergence des outils numériques et informatiques il est aujourd'hui possible de renouer avec une géométrie essentiellement graphique.
Les méthodes traditionnelles permettant d'établir une volumétrie à partir de données sur le plan, instrumentée par la géométrie descriptive, font partie du savoir faire et de la formation des architectes ; elles sont essentielles pour permettre aux étudiants de cultiver leur « vision dans l'espace ».

Certes les outils de modélisation géométrique professionnels instrumentent aujourd'hui les opérations qui étaient réalisées hier à la main, sur la table à dessin. Faut il pour autant renoncer à l'apprentissage de ces opérations qui permettent de comprendre et maîtriser les questions d'échelles, d'élaborer la mise en relation de l'imaginaire avec le réel mais aussi de cultiver la vision de et dans l'espace ? Leur formalisation de manière analytique, ou leur réalisation au travers d'un langage de programmation ne présentent aucun intérêt pour des étudiants en architecture. En revanche, leur formalisation avec le support d'objets graphiques et leur intersection, dans le cadre de la géométrie dynamique, nous paraissent prometteur et formateur.

Nous relatons ici une expérience d'utilisation de Cabri, dans le cadre d'un enseignement de 1ère année de géométrie descriptive ; cet enseignement se termine par un travail de réalisation de maquettes, à partir d'un plan cadastral, représentant un terrain sur lequel est implantée la volumétrie d'une maison d'habitation.

Qu'il s'agisse du développé du terrain fabriqué à partir des données du plan cadastral ou de celui de l'enveloppe de la volumétrie de l'habitation et de son axonométrie, toute ces opérations peuvent être instrumentées informatiquement avec Cabri en utilisant les méthodes graphiques traditionnelles.

Cette approche alliant tradition et modernité nous semble la plus prometteuse et porteuse de sens pour un enseignement de géométrie dans une école d'architecture.

Variations pédagogiques et questionnement

Il est désormais banal d'affirmer que les outils numériques de modélisation ont pris une place déterminante dans le processus de conception et de fabrication et l'architecture n'échappe pas à cette évolution. Les géométries, qu'elles reposent sur la notion de distance (euclidiennes et non euclidiennes) affines ou topologiques, et les algorithmes de transformation qu'elles sous-tendent, sont au cœur de ces outils. Il paraît tout autant indiscutable d'affirmer que la modélisation de ces géométries, notamment les géométries métriques, dans le cadre de l'informatique, est essentiellement analytique. Pourtant, le dessin géométrique, que nous appellerons ici construction géométrique et qui repose sur une géométrie classique du tracé, nous paraît être un élément essentiel à la formation des architectes. Ainsi, Il paraît naturel, au moins dans le cycle licence, d'appuyer l'enseignement de la géométrie en privilégiant les objets géométriques classiques (droite, courbe, plan, surface, espace) se fondant dans une tradition qu'il est convenu d'appeler la « géométrie pure » ; cette géométrie peut se satisfaire aujourd'hui pleinement de la géométrie dynamique qui repose certes sur l'analyse mais qui offre à manipuler les éléments de la géométrie pure.

Ce faisant, pour peu que l'outil soit suffisamment souple et la construction géométrique correcte, le « dessin », parce que paramétré par les éléments de base qui le composent, peut naturellement être modifié par la variabilité des éléments de base ouvrant ainsi de nouvelles perspectives didactiques.

Résolution par calcul ou par construction géométrique

Un exemple mettant en jeu la dialectique graphique/numérique est celui de la résolution et du calcul ; le contexte ici est celui d'un enseignement de structure de première année. Les méthodes graphiques pour résoudre les problèmes de cette nature comme les méthodes analytiques sont bien connues ; ici encore, qu'il s'agisse de fermeture de dynamique et de calcul vectoriel la résolution sous forme graphique nous paraît plus directe, permet la visualisation des phénomènes et nous paraît plus pertinente pour la culture des futurs architectes ; pour peu que l'on utilise un support dynamique permettant de faire varier les conditions initiales, il devient possible de visualiser des phénomènes et/ou d'approcher une solution optimale. Du fait d'être supportée numériquement, cette approche par le graphique conduit à construire des solutions aussi précises qu'avec une approche calculatoire analytique.

Forme idéale d'une voûte du point de vue des efforts; application de la méthode du funiculaire avec Cabri;

Décomposition/recomposition dynamique des forces dans les barres d'une console; la géométrie dynamique permet de dynamiser la figure et d'observer les phénomènes de traction/compression.

Vers les « formes libres »

Un autre exemple se rapporte aux formes « libres » ou « complexes »; la conception spatiale instrumentée informatiquement a vu émerger depuis une vingtaine d'années des formes nouvelles, parfois qualifiées d'architecture blob, liquide, à forme libre, numérique, paramétrique ou encore non standard. Il n'est pas question ici d'apporter un regard critique sur ces productions; du point de vue géométrique, en introduisant le mouvement, sans connaissances pointues en programmation et en géométrie analytique, en s'appuyant sur l'intuition, il est possible d'atteindre rapidement des formes dites non standard; l'exemple ci-dessous s'appuie mathématiquement sur la notion de distance et celle de barycentre. Il correspond à la notion de balayage d'une courbe sur deux rails implantée dans des logiciels tels que Rhino et Grasshopper (Payne, A., & Issa R.) ; à la différence de ces outils de modélisation qui fonctionnent comme des « boites noires », la projection d'une telle enveloppe dans le cadre de la géométrie dynamique avec Cabri est complètement construite et maîtrisée par l'étudiant, de la construction de la courbe de Bézier paramétrée à partir de trois points, de celles des cercles supports aux points de contrôle mais aussi à la projection axonométrique elle-même. La forme ci-dessous, du fait des courbes de Bézier, recèle une certaine complexité. L'étude des surfaces réglées et/ou de révolution sont un préalable et ne posent pas de difficulté.

Projection axonométrique d'une forme obtenue par balayage, sur trois rails, d'une courbe de Bézier de degré 2 avec Cabri; qu'il s'agisse de la courbe obtenue comme lieu de points barycentre des trois points de contrôle, des cercles comme lieu de points équidistants de points donnés, mais aussi de la projection axonométrique sur le plan, tout participe d'une construction géométrique sur le plan.

Traditions et modernités

Nous utilisons depuis plusieurs années la géométrie dynamique dans un travail d'apprentissage sur les projections conventionnelles, qu'elles soient parallèles ou centrales (cf. ci-dessous travaux d'étudiants sur des perspectives construites à partir de Cabri Géomètre); la projection de l'espace sur le plan et la visualisation de l'espace à partir de sa projection sont des éléments d'enseignement traditionnels dans une école d'architecture. Très récemment, nous utilisons Cabri Géomètre dans un autre contexte traditionnel, celui de la géométrie descriptive et de la fabrication digitale.

Projections parallèles et centrales

L'axonométrie, en tant que projection parallèle orthogonale, est l'un des modes de représentation traditionnel de l'architecture (Choisy A.). L'instrumentation dynamique de cette projection permet à l'étudiant de pleinement prendre conscience que l'axonométrie n'est pas l'espace mais une image de celui-ci par projection.

Le logiciel Cabri se substitue à la feuille de dessin et permet de travailler dans le plan comme on le ferait sur une table à dessin. Pourtant, du fait de la géométrie dynamique, à condition cependant que la construction géométrique soit correcte, la projection peut être modifiée par rotation du repère autour de l'axe des z et des y; on reconstruit ainsi les conventions habituelles de mobilité d'un modeleur géométrique qui préserve l'axe des z.

Travail sur l'axonométrie orthogonale; la direction de projection est orthogonale; le plan de projection est oblique; il a subi deux rotations, l'une autour de l'axe de z et l'autre autour de l'axe des x. La construction géométrique est plane. Les principes géométriques à la base de cette construction sont proches de ceux utilisés avec la planche à dessin (compas, parallélisme, intersection,…)

L'apprentissage de la projection centrale ou perspective conique est tout aussi efficace avec la géométrie dynamique; la démarche didactique est tout à fait analogue à la précédente du point de vue de l'instrumentation avec la géométrie dynamique. Les paramètres ici, au lieu d'être la position relative du plan de projection par rapport au plan frontal qui caractérise l'axonométrie orthogonale, sont la position du centre de la projection et la position relative de l'objet par rapport à ce centre et au plan de projection.
Projection centrale paramétrée par la position du centre de la projection et par la position de l'objet à projeter. Ici aussi, même si certaines constructions peuvent être mémorisées pour ensuite être réutilisées, les principes géométriques à la base de cette construction sont proches de ceux utilisés avec la planche à dessin (compas, parallélisme, intersection, règle …).

Conception et fabrication numérique

Cette année nous avons mis en place une nouvelle expérimentation dans l'utilisation de Cabri, celle de

l'apprentissage de la « vraie grandeur » et de la fabrication de la maquette 3D; le « projet » consiste, à partir d'un règlement d'urbanisme et d'un plan de cadastre, a demandé de fabriquer des enveloppes à l'échelle 1/200ème
Traditionnellement et historiquement, le travail est instrumenté graphiquement, via des techniques de géométrie descriptive; il est aujourd'hui largement supporté par des modeleurs 3D. Nous rencontrons des difficultés pédagogiques à la fois dans l'apprentissage de la géométrie descriptive que les étudiants trouvent trop abstraite et dans celui des outils informatiques de modélisation et de transformation des modèles en vue de la fabrication, notamment au niveau des échelles, qui plus est quand les étudiants ne disposent pas d'une culture géométrique suffisante. Pourtant, la modélisation et la production architecturale contemporaine est aujourd'hui une fervente utilisatrice de ces logiciels de modélisation et de fabrication. Aussi nous avons décidé de nous situer cette année à un niveau intermédiaire, celui de l'utilisation de la géométrie dynamique dans un contexte de modélisation et fabrication numérique et c'est à l'étudiant de fabriquer son outil numérique. Nous espérons que ce travail sera une bonne introduction à l'utilisation de modeleurs et d'outils de fabrication spécifiques et dédiés (Shadkhou, S., & Bignon, J.C.) en cycle master.

Echelle cartographique, mesure géométrique.

En utilisant un fond de plan dans la page de Cabri Géomètre on peut instrumenter la saisie digitale des parcelles; et l'on est confronté aux mêmes problèmes d'échelle qu'avec un outil dédié; cependant, comme le travail s'effectue dans le contexte de la géométrie, l'embrayage vers ce domaine est plus opérant.
Extrait du parcellaire sur lequel les étudiants travaillent; mise en place d'un système d'aide à la saisie assisté par Cabri qui s'appuie sur une distance qui respecte l'échelle cartographique.

Du plan à la volumétrie

En instrumentant la géométrie descriptive dans Cabri il est possible de passer d'une représentation avec une double vue à la vue plus « naturelle » en axonométrie.

Passage d'une représentation conventionnelle à une autre; ici le passage s'effectue de l'épure vers l'axonométrie. L'axonométrie est déterminée par l'image, par projection parallèle, d'un repère orthonormé. Les coordonnées mesurées dans l'épure sont tout simplement reportées graphiquement dans l'axonométrie; la possibilité de mémoriser des constructions géométriques permet d'automatiser ce passage et d'éviter son côté répétitif et fastidieux.

Du plan à la vraie grandeur

La fabrication de la « vraie grandeur » peut s'effectuer, via Cabri, soit en utilisant la distance dans l'espace, soit par des techniques de géométrie descriptive. Le patron (développé) de la forme peut ensuite être défini, imprimé, et fabriqué.

Conclusion

Nous avons voulu, dans cet article, à la fois relater les différentes expériences d'utilisation de la géométrie dans nos différents enseignement à l'école d'architecture de Nancy mais aussi questionner les fondements d'un enseignement de la géométrie dans une école d'architecture ; nous sommes convaincus de l'intérêt pédagogique de l'utilisation de la géométrie dynamique et graphique dans une école d'architecture car elle permet des activités basées sur le trait plutôt que sur le nombre et s'inscrit naturellement dans une tradition de l'utilisation et de l'enseignement de la géométrie en architecture ; en permettant la dynamique, la paramétrisation et la prise en compte du mouvement, elle ouvre vers les productions de formes les plus actuelles.

Nous avons orienté l'apprentissage de la représentation architecturale à l'école d'architecture de Nancy en première année sur l'utilisation de la feuille de papier, à main levée ou à la règle et à l'équerre ; l'enseignement de la géométrie fait exception ; il est cependant une introduction et un préalable nécessaires pour pouvoir aborder comprendre et maîtriser les logiciels spécialisés, qu'ils s'agissent des modeleurs volumiques et surfaciques, en particulier l'association Rhino et Grasshopper qui est, de fait, un autre logiciel de géométrie dynamique.

Bibliografía resumida.

Audin, P. (1995). La BRAChlIstochrome. abraCAdaBRI 9, 16-17.

Choisy, A. (1899). Histoire de l'architecture.

Tournes, D. (1997). Variations autour du centre de Similitude. IUFM de la Réunion.

Marin, P., & Lequay, H., & Blanchi, Y (2011). Thinking With Computers and Fabricating With Machines. Algode 14-16 March 2011, Tokyo, Japan.

Payne, A., & Issa R. (2010), Grasshopper primer, http://www.liftarchitects.com/journal/2009/3/25/the-grasshopper-primer-second-edition.html.

Shadkhou, S., & Bignon, J.C. (2009). Design, Fabrication, Digital : Between digital design and digital fabrication. 27ème conférence - eCAADe 2009, Computation : The new realm of architectural design, 16-19 September, Istanbul, Turkey.

Monge, G. (1799). Géométrie descriptive, Leçons données aux Ecoles normales, 3ème année, Paris, Baudouin.

Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Nancy. (1995). Cours de géométrie descriptive. 2ème année, Nancy.

❖❖❖

Cabri como ambiente de aprendizaje, construyendo las reglas de los signos de la multiplicación

José Benjamín Chan Domínguez
Facultad de Matemáticas (UADY), México
benjac100@hotmail.com

Genny Rocío Uicab Ballote
Facultad de Matemáticas (UADY), México
uballote@uady.mx

Resumen

En el presente trabajo se describe una secuencia de actividades diseñadas en el software Cabri Geometry II Plus, que tiene como objetivo la construcción y formulación de las reglas de los signos de la multiplicación a partir de la representación geométrica del producto. La secuencia se conforma de tres actividades distribuidas en ocho escenas (estructuradas en una historia ficticia de un caballero al rescate de una princesa) enmarcadas en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brosseau, en la cual se espera que el estudiante por medio de un proceso de experimentación, formulación y explicación en la solución de las actividades en Cabri sea el encargado de construir, conjeturar y; posteriormente mediante una Hoja de Trabajo y la institucionalización por parte del profesor, formalizar el enunciado de las reglas de los signos.

Palabras clave: Reglas de los signos, propuesta didáctica, Teoría de Situaciones Didácticas, medio didáctico.

Eje temático: Experiencias educativas con asistencia de Cabri.

1 Introducción

El conocimiento se transmite en el aula de clases mediante una transposición didáctica que el profesor construye (selecciona) para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Bajo ese referente, se diseñó y elaboró un ambiente de aprendizaje en la interface del software Cabri Geometry II Plus, para la construcción y formalización de las reglas de los signos, mediante el concepto de área de regiones rectangulares, donde las dimensiones del rectángulo (largo y ancho) denotan los factores de la multiplicación, y el área que encierra el rectángulo denota el producto.

Para plasmar lo anterior se estructuró un escenario en la interface Cabri Geometry II Plus que da lugar a una historia ficticia donde un caballero (Ham) tiene la encomienda de rescatar a una princesa (Angie) y en esa travesía debe recorrer caminos de diferentes colores que lo guiarán hacia la princesa.

2 Problema y objetivo de investigación

Hoy en día en las aulas de clases, algunos conceptos matemáticos carecen de un significado para los estudiantes, tal es el caso de las reglas de los signos. En general, cuando se estudia el producto de números con signo surge la interrogante ¿Por qué , y ? Como matemáticos, sabemos que hay dos teoremas que al demostrarse bajo los axiomas de campo de los números reales, justifican las reglas de los signos. Sin embargo, un enfoque axiomático de las reglas de los signos en un ámbito educativo básico no es quizá el camino apropiado para que el estudiante adquiera el aprendizaje de dichas reglas, entonces ¿cuál sería el tratamiento adecuado para abordar las reglas de los signos de tal manera que garantice una apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes? ¿Cómo diseñar una propuesta didáctica que permita a los estudiantes construir las reglas de los signos? ¿Qué elementos se deben considerar en el diseño de una propuesta?

Considerando estas interrogantes, el objetivo de la investigación se orientó al diseño de una propuesta sistemática y estructurada que permita, didácticamente, que el estudiante construya las reglas de los signos para la multiplicación, mediante representaciones geométricas.

3 Marco teórico

3.1 Teoría de las situaciones didácticas

El diseño de la propuesta didáctica se fundamenta en la Teoría de Situaciones Didácticas, pues la intención es que el estudiante mediante una serie de actividades construya y formalice las reglas de los signos.

En esta teoría intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico que interactúan entre sí en una situación denominada didáctica, que es construida intencionalmente a través de un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un estudiante o un grupo de estudiantes, un cierto medio y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos estudiantes se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, 1982). En particular la situación didáctica se presenta al estudiante mediante una *situación problema* en la cual el estudiante maneja una estrategia inicial ya disponible en él para resolver el problema, para que el estudiante logre construir el conocimiento debe transitar por diferentes fases propias de la Teoría de Situaciones Didácticas:

- *Fase de acción* que consiste básicamente en que el estudiante interactúa con el medio didáctico para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos, a través de esta interacción con el medio el estudiante, formula, prevé y explica el problema.
- *Fase de formulación,* en la cual el estudiante debe plantear hipótesis que evidencien los elementos matemáticos en la solución al problema, encaminados a conjeturar la estrategia óptima de solución.
- *Fase de validación,* en ella, estudiante debe comprobar sus conjeturas, es decir, la propia situación tiene que informar al estudiante si lo ha hecho bien o no, si su solución es correcta, sin tener que recurrir a la ayuda del maestro.
- *Fase de institucionalización;* una vez que los estudiantes han construido el conocimiento el docente retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aportando observaciones y clarificando conceptos si en la situación didáctica se tuvo problemas.

3.2 La ingeniería didáctica

La metodología utilizada en esta investigación es la ingeniería didáctica. Douady (1996), expresa que una ingeniería didáctica es un conjunto de secuencias, de clase, diseñadas, organizadas, y articuladas coherentemente por un profesor-ingeniero, para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo específico de estudiantes. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los estudiantes, el aprendizaje debe evolucionar bajo las reacciones de los estudiantes en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un *análisis a priori*, y un proceso, resultante de un *análisis a posteriori* de la puesta en funcionamiento de una secuencia acorde con las condiciones dinámicas de una clase. El diseño de la propuesta transita por las cuatro etapas de la ingeniería didáctica, es decir por la etapa de análisis preliminares (epistemológico, didáctico y cognitivo); la etapa de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas; la etapa de experimentación y la etapa de análisis a posteriori y evaluación. El tránsito por las dos primeras etapas contribuyó en el diseño de la propuesta.

Diseño de la propuesta

Considerando el análisis epistemológico, el tratamiento utilizado para abordar las reglas de los signos es por medio de la representación geométrica del producto de números con signos, donde las dimensiones del rectángulo representan los signos de los factores y el área del rectángulo representa el producto resultante de la multiplicación. Tomando en consideración el análisis didáctico y motivando al estudiante a involucrarse en la resolución de las actividades se decidió inventar una historia ficticia en una época de caballeros y princesas donde esté inmersa la transposición didáctica de las reglas de los signos. Así, se construyó la ambientación de la historia en la interface del software Cabri Geometry II Plus, pues dicho software proporciona dinamismo y movimiento a las actividades, además permitió colocar imágenes, mostrar y ocultar información, mover objetos, trazar trayectorias, sombrear (colorear) áreas y presentar escenas consecutivas. En general la propuesta se conforma de ocho escenas, algunas de las cuales son de utilería. A continuación se describen cada una de las escenas y los objetivos de las mismas.

Escena 1. Introducción. Se presenta una breve reseña de la historia y las instrucciones para realizar las actividades (Imagen 1). Los elementos característicos de esta escena son: el título de la actividad “Rescatando a la princesa Angie”, información acerca del manejo de los botones, relato de la historia, reglas de los movimientos para cada actividad respectivamente y un mapa de la ubicación de los castillos.

Imagen 1. Escena 1. Presentación de las actividades diseñadas en el software Cabri Geometry II Plus.

Escenas 2 y 4. Desarrollo. En estas escenas se presenta la situación que involucra a las reglas de los signos por medio de dos actividades (Actividades 1 y 2); en dichas actividades el caballero Ham debe llegar a determinados castillos para intentar rescatar a la princesa, para ello debe ir seleccionando caminos hasta llegar a los castillos. La selección de los caminos se realiza por medio de un movimiento (que consiste en un desplazamiento horizontal y uno vertical sin importar el orden); así cuando el caballero selecciona caminos que conducen al castillo se sombrean áreas de un mismo color, haciendo alusión (implícitamente) a las reglas , , (el producto de dos números con signos iguales es positivo); y cuando selecciona caminos que no conducen al castillo se sombrean áreas de otro color, lo anterior relacionado a la regla

, (el producto de dos números con signos diferentes es negativo) (Imagen 2). Adicionalmente se incluyen unos botones, que permiten al estudiante evaluar sus movimientos.

Imagen 2. Escenas 2 y 4. Actividades 1 y 2. Ejemplos de elección de los caminos para llegar a los castillos y evaluación de los movimientos.

Los objetivos específicos de las Actividades 1 y 2 son, que el estudiante:

- Identifique las características de los movimientos que conforman las rutas para llegar a los castillos.
- Establezca una relación entre los movimientos y el área que determinan los caminos de la ruta para llegar a los castillos.
- Establezca conjeturas y plantee una estrategia solución.

En dichas actividades se pretende que el estudiante explore los diferentes caminos para llegar a los castillos, no importa si selecciona los caminos por ensayo y error; se confía que conforme avance en su trayectoria, encontrará estrategias que le permitan determinar de manera inmediata cuáles caminos conducen hacia los castillos y en particular al rescate de la princesa (Actividad 3). Lo anterior, constituyen las fases de acción y de formulación.

Escena 7. Cierre. En la Actividad 3, se pretende que el estudiante seleccione, de cuatro caminos proporcionados (en el interior de un castillo) aquel que conduce al rescate de la princesa, basándose en las conjeturas realizadas en las fases previas (Imagen 3); esta actividad constituye la fase de validación de acuerdo al marco teórico.

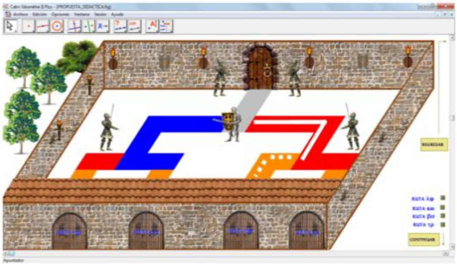


Imagen 3. Actividad 3. Fase de validación. El caballero Ham debe elegir la ruta adecuada para rescatar a la princesa en un solo intento. La trayectoria señalada en blanco conduce al rescate.

Para dar continuidad y motivación a la historia, se construyeron unas escenas denominadas de utilería.

Escenas 3 y 5. Las escenas 3 y 5 contienen un mapa que señala la trayectoria recorrida por el personaje Ham y un pergamino con información que encadena la historia (Imagen 4). Estas escenas enlazan las Actividades 1 y 2.

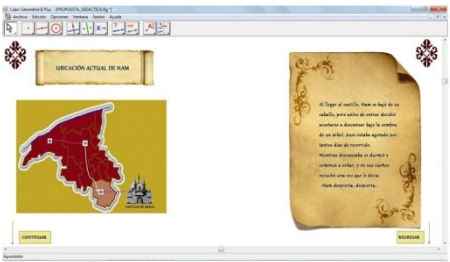


Imagen 4. Escena 3. Motivación para que el estudiante continúe con la actividad.

Escena 6. Se presentan las instrucciones para realizar la Actividad 3 para ello se incluyen tres botones que al accionarlos muestran información que contienen pistas para resolver la actividad siguiente (Imagen 5).

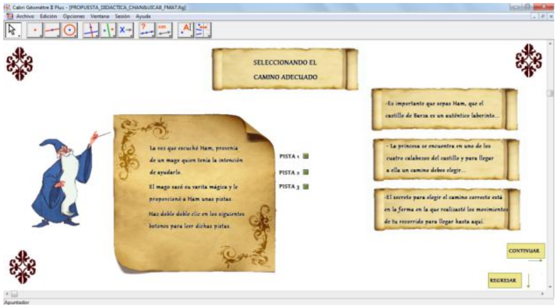


Imagen 5. Pistas para resolver la Actividad 3.

Escena 8. Se muestran dos pergaminos que contienen el final de la historia y las instrucciones para guardar el archivo (Imagen 6).

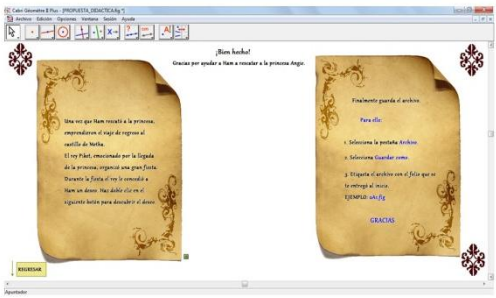


Imagen 6. Final de la historia.

Resultados

La propuesta didáctica denominada "Rescatando a la princesa Angie" fue aplicada a 9 estudiantes del segundo grado de secundaria de edades entre 12 a 16 años. Tomando como referencia que 6 de los 9 estudiantes finalizaron adecuadamente la propuesta, además de los resultados obtenidos en cada una de las actividades que conforman la propuesta didáctica, se afirma que dicha propuesta cumple con el objetivo que los estudiantes construyan y formalicen las reglas de los signos. Lo anterior se sustenta considerando los resultados de las actividades de las

Hojas de Trabajo de verificación de aprendizaje (que no se describen en este documento).

En general la propuesta permite establecer un significado a las reglas de los signos de la multiplicación, mediante la representación geométrica del producto. Cuando se habla de un significado para las reglas de los signos se hace alusión a que el estudiante tenga una manera de argumentar el porqué de las reglas de los signos, y no limitarse a la simple memorización, es decir, se pone de manifiesto que la implementación de la propuesta didáctica en el aula de clases sería una alternativa para propiciar el aprendizaje de este contenido, pues esclarece de una forma ordenada y coherente una justificación a las reglas de los signos.

Por otro lado, considerando que 3 de los 9 estudiantes presentaron dificultades en la implementación de la propuesta, la intención estaría encaminada a realizar un rediseño de la propuesta, en función de presentar las instrucciones de forma más clara y proporcionar un espacio de reflexión y análisis entre una actividad y otra, con la finalidad que el estudiante rescate los puntos importantes de cada actividad.

Conclusiones

En este trabajo de investigación se presentó un tratamiento alternativo para abordar las reglas de los signos de la multiplicación en la secundaria. El tratamiento se presenta a través de una propuesta didáctica, que orienta al estudiante a la construcción y formalización de las reglas de los signos mediante una situación problema. En esta situación la noción de las reglas de los signos, se aborda por medio de la representación geométrica del producto, considerando al producto como el área de una figura geométrica (rectángulo).

De los análisis realizados se consideró incluir en la propuesta elementos donde se evidencie una justificación a las reglas de los signos que permita a los estudiantes argumentar el porqué de dichas reglas, en ese sentido la propuesta didáctica se conformaría de actividades a realizar en el software Cabri

Geometry II Plus y en la hoja de trabajo; articuladas para que los estudiantes en primera instancia construyan y luego formalicen las reglas de los signos, esta es una particularidad del tratamiento propuesto en este trabajo.

Asimismo, durante la aplicación de la propuesta se observó que la presentación de las actividades resultó ser atractiva para los estudiantes ya que interactuaron con conceptos matemáticos de una forma diferente a la que están acostumbrados en el aula de clase; se observó que mostraron sorpresa, pues no esperaban ese tipo de actividades las cuales resultaron ser agradables para ellos. Algunos estudiantes en primera instancia tenían cierto temor para contestar las actividades, sin embargo, en el transcurso de la misma, fueron perdiendo el miedo y se concentraron en la solución de las actividades al grado que lograron conjeturar la noción de las reglas de los signos, de esta forma los estudiantes tuvieron confianza en trabajar con nociones matemáticas.

Finalmente este tipo de propuestas didácticas donde el conocimiento en cuestión se encuentra inmerso en un juego (problema), contribuye a que el estudiante pueda conjeturar las nociones y conceptos matemáticos, por otro lado facilita la comunicación entre el profesor y el estudiante.

Referencias

Brousseau G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde.

❖❖❖

SOCIALIZACIÓN DE TRABAJOS EN ÁREAS AFINES A LA MATEMÁTICA

Las curvas de Bezier en 3D, aplicaciones y perspectivas

Juana Castillo Padilla
juanacp@hotmail.com,

Alejandro Antonio López Patiño
westermania_21smackraw@hotmail.com

Edgar Efrén López Torres
certerus_paribus@hotmail.com

Fernando Ponce Hernández
f.ponce93@yahoo.com

UNAM, TESE, México

Resumen

El desarrollo de las curvas de Bezier 2D y 3D han sido un elemento clave en el desarrollo de los gráficos por computadora, sus aplicaciones son variadas y han tenido influencia en todos los ramos del diseño asistido.

Uno de los problemas principales al momento de utilizar o diseñar aplicaciones con herramientas de Bezier es el desconocimiento de sus principios, tanto algebraicos como geométricos. En nuestra experiencia como docentes e investigadores hemos descubierto una mejora significativa en el aprendizaje de este tipo de tópicos al utilizar herramientas de geometría dinámica; en este sentido Cabri es una herramienta idónea que permite la generación de una estructura mental capaz de entender las limitaciones y perspectivas de estas curvas.

El presente trabajo muestra el desarrollo de una serie de prácticas enfocadas a mejorar el entendimiento de estas herramientas de diseño, desde la generación de curvas en cabri II Plus, hasta su extensión en curvas en tres dimenciones con Cabri 3D.

Referencias

Hkarn, D. y Baker, M. (2006). *Gráficos por computadora con OPENGL.* España: Pearson Education.

Leontiev, A. (1978). *Actividad, Conciencia y Personalidad*. Argentina: Ciencias del Hobre.

UNAM dirección general del CCH-Área de matemáticas. (2003). *Programa de estudios de matemáticas*. México.

Vygotski, L. (1993). *Obras escogidas.* España: Visor.

❖❖❖

COMUNICACIÓN DE EXPERIENCIAS O PROPUESTAS DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA

Estudo das transformações no plano – uma situação de aprendizagem

Lúcia Helena Nobre Barros
Secretaria de Educação do Estado de São Paulo – Brasil
luciahnobre@gmail.com

Katia Vigo Ingar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
kvingar21@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal do Ceará – Brasil
fregis@ifce.edu.br

Resumo

Apresentamos neste trabalho as relações institucionais existentes para uma situação de aprendizagem de simetria: axial ou reflexão e rotação. O objetivo é criar um ambiente educacional com o uso do software *Cabri*, manipulando os recursos disponíveis que provoque ao estudante a identificação das principais transformações no plano. Dessa forma, estudamos as relações institucionais esperadas, via Currículo Unificado do Estado de São Paulo, e as relações institucionais existentes, que são desenvolvidas por meio dos *Cadernos do professor e do aluno* utilizados na prática pedagógica na 6ª série do Ensino Fundamental desse estado. Observamos que nesse material didático, encontramos as tarefas e técnicas associadas às justificativas tecnológicas e teóricas, que podem representar uma modelagem das práticas sociais em uma atividade matemática. Para essas análises, o referencial teórico dessa pesquisa é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992), na tentativa de melhor compreender as propostas institucionais associadas às relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e aprendizagem das transformações no plano. Portanto, buscamos favorecer a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema, estimulando a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses por meio da otimização das tarefas sugeridas nos materiais didáticos

selecionados. Dessa forma, buscamos uma situação de aprendizagem que possa atender às condições de um determinado grupo de estudantes por meio das tarefas desenvolvidas no *Cabri* onde possa possibilitar uma seqüência de estudos para compreender melhor os conceitos básicos e a percepção visual de simetrias e movimentos no plano.

Palavras-chave: Transformações no plano. Relações institucionais esperadas e existentes; Uso das novas tecnologias em ambiente escolar.

Introdução

Este artigo tem o objetivo de apresentar algumas tarefas em um ambiente educacional com o uso do software *Cabri* tentando, com isso, provocar o estudante na identificação das principais transformações no plano, usando como pano de fundo os materiais didáticos trabalhados nas escolas públicas do estado de São Paulo (Brasil).

Para tal, escolhemos como referencial teórico da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático definida por Chevallard (1992), em particular, as noções de relações institucionais como ferramenta de análise, na tentativa de compreender e repensar melhor as práticas docentes quando se pretende introduzir um novo conceito, ou seja, identificar quais conceitos que podem ser considerados intrinsecamente ligados quando se deseja trabalhar uma nova noção em ambientes educacionais usando tecnologia da informação.

Dessa forma, para introduzir a noção de transformações no plano, em particular, as interpretações de simetria axial ou reflexão e rotação, selecionamos algumas tarefas, somos sabedoras que para isso serão necessárias diferentes abordagens, e estas não se reduzem as que aqui estão apresentadas, porém a escolha dessas tarefas está relacionada ao fato de que podem ser facilmente manipuladas e, com pequenas mudanças em seu enunciado, poderá possibilitar ao estudante a apreensão desses conceitos por meio do software *Cabri*, considerando que o mesmo traz recursos dinâmicos que o material didático trabalhado nas escolas públicas do estado de São Paulo, dificilmente possibilitaria.

Na sequência, apresentamos uma breve explanação do referencial teórico escolhido.

1. Referencial teórico

As análises desse estudo estão fundamentadas, como fora dito anteriormente, em algumas noções pertencentes à Teoria Antropológica do Didático (TAD) definida por Chevallard (1992-2011).

Assim, para o teórico, o ensino da Matemática corresponde o estudo do ser humano em confronto com a mesma, ou seja, a atividade matemática dentro do conjunto de atividades humanas e das instituições sociais, designado antropologia do conhecimento matemático, conduzindo a uma atividade matemática como uma atividade de estudo. Para tal, ele parte do seguinte princípio *tudo é objeto*: cadeira, mesa lápis, pessoas, instituições etc. e partindo de dois tipos específicos de objetos – as instituições (I) e as pessoas (X), ele considera que o objeto ao ser reconhecido por uma pessoa (X) é dito relação pessoal, e se este é reconhecido por uma instituição (I) é denominado relação institucional, o que ele denominou de elementos primitivos.

Dessa forma, entendemos que as ferramentas acima descritas, podem auxiliar a compreender qual o trabalho que se espera que seja desenvolvido na etapa escolar selecionada, isto é, o que podemos assim atingir quando se deseja introduzir uma nova noção por meio de um conjunto de tarefas e práticas para desenvolver em ambiente educacional os conceitos de simetria axial e reflexão.

Após a descrição do referencial teórico escolhido, a seguir apresentamos a metodologia usada nesse estudo.

2. Metodologia da pesquisa

O objetivo da pesquisa é criar um ambiente educacional com o uso do software *Cabri*, manipulando os recursos disponíveis que provoque ao estudante a identificação das principais transformações no plano.

Assim, na tentativa de alcançar o objetivo acima, propomos a seguinte metodologia:

- Análise e comentários da nova proposta institucional para o ensino e aprendizagem das transformações no plano, via Cadernos do Professor e do Aluno da 6ª série do Ensino Fundamental;
- Seleção de algumas tarefas que podem possibilitar a articulação das atividades sugeridas com papel e lápis com o uso do software *Cabri*;
- Identificar quais as tarefas que podem favorecer o uso das novas tecnologias em ambientes educacionais.

Dessa maneira, faremos uma análise rápida comentada da nova proposta institucional do estado de São Paulo, buscando relacionar com as relações institucionais definidas por Chevallard (1992).

3. Análises e comentários da nova proposta institucional do estado de São Paulo

Considerando como fator relevante as mudanças sociais, a nova proposta visa tentar modificar um cenário que outrora era para poucos; para isso, busca "[...] uma aprendizagem que resulte também da coordenação de ações entre as disciplinas, do estimulo a vida cultural da escola e do fortalecimento de suas relações com a comunidade" (SÃO PAULO – ESTADO, 2008, p. 9).

Assim, com o objetivo de contribuir para melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem de seus estudantes, o governo do estado de São Paulo propõe um currículo unificado, isto é, uma base comum de conhecimentos e competências, para os níveis de Ensino Fundamental – Ciclo II e Médio – instituído como a Nova Proposta Curricular, hoje Currículo Unificado.

Assim, após a mudança e a implantação da nova proposta, o governo do estado de São Paulo espera trabalha essa proposta como um suporte técnico e auxiliar do trabalho do professor ao fazer com que o estudante da Educação Básica desenvolva competências e habilidades indispensáveis para a sua inserção sociocultural e profissional.

Para tal, o Currículo Unificado do estado de São Paulo dispõe de material específico – materiais didáticos a serem trabalhados pelo estudante e professor, com conteúdos sugeridos e práticas pedagógicas que indicam caminhos a serem seguidos pelo professor, cujo papel atual é completar o trabalho apresentado em forma de cadernos para professores e estudantes.

Dessa forma, buscamos apresentar neste trabalho de que maneira as relações institucionais esperadas quando se considera o documento oficial do Currículo Unificado do estado de São Paulo e as relações institucionais existentes ao levarmos em conta os Cadernos do Professor e Aluno instituídos nas escolas públicas desse estado, quando se deseja introduzir as noções de transformações no plano.

Portanto, ao propormos desenvolver tais noções com o uso do software *Cabri*, verificamos que a articulação dos conteúdos com o tratamento da informação tem como um dos objetivos é desenvolver a autonomia dos estudantes, ou seja, permitir que estes sejam capazes de argumentar e estruturar problemas, buscando respostas nos seus conhecimentos prévios articulados aos novos.

Na sequência, apresentamos uma tarefa que é habitualmente trabalhada na 6ª série do ensino fundamental com a finalidade de reconhecer a necessidade de incorporar ao trabalho do professor a manipulação do software *Cabri* como ferramenta para incitar o estudante a apreensão da noção em jogo, em particular, a noção de simetria axial e rotacional.

4. Análises e comentários das tarefas

Ao escolhermos essa tarefa apresentada na proposta paulista, observamos que para desenvolvê-la podemos fazer uso de ambientes computacionais com o auxílio de software, possibilitando uma dinâmica e interação do estudante com as noções que desejamos introduzir, em particular, o uso do software *Cabri* para os conceitos introdutórios de transformações no plano.

Dessa forma, observamos que nesse material didático, encontramos outras tarefas que podem ser mais bem trabalhadas quando manipuladas por meio desse software, auxiliando o estudante a se familiarizar com o sistema de representação de pontos, como podemos constatar a seguir.

***Tarefa Geral**: Identificar transformações no plano por meio do uso de malhas quadriculadas e pontos.*

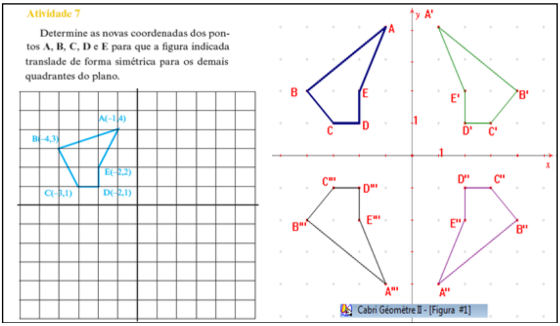


Figura 1: Relação entre uma tarefa proposta estática e o uso das novas tecnologias trabalhadas na geometria dinâmica. FONTE: São Paulo – Estado (2010, p.31)

A tarefa selecionada mostra a diversidade de relações institucionais possíveis, segundo suas características, isto é, quando se leva em conta a execução da mesma, seja por meio de papel e lápis ou quando se faz uso do software. Pontuaremos algumas considerações quando se deseja trabalhar essa tarefa por meio de geometria dinâmica, sendo que:

- O estudante poderá observar as regularidades dos planos coordenados, como os sinais em cada um dos quadrantes;
- Manipulando o mouse, ele deverá ser capaz de explorar mais detalhadamente os diferentes pontos, bem como a percepção visual dos movimentos no plano;

- O professor poderá apresentar outras situações em que o estudante possa identificar axial e rotacional, favorecendo a ampliação de tarefas com o objetivo de familiarizar o estudante na interpretação e apreensão das noções em jogo envolvidas na tarefa.

Dessa forma, verificamos que uso de um software para essa tarefa poderá auxiliar o estudante a melhor identificar as simetrias e como estas podem ser consideradas como conhecimento prévio para o estudo do plano coordenado, quando levamos em conta as atividades que podem ser trabalhadas com a familiarização do sistema de representação de pontos.

Considerações finais

Na tentativa de melhor compreender as propostas institucionais escolhidas associadas às relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e aprendizagem das transformações no plano, em particular, as simetrias axial e rotação, buscamos favorecer a percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema, estimulando a descoberta de por meio da otimização das tarefas sugeridas nos materiais didáticos selecionados, usando o software *Cabri* como pano de fundo.

Assim, verificamos que os cadernos podem atender as condições de um determinado grupo de estudantes por meio das tarefas que lhes são apresentadas, possibilitando o desenvolvimento de uma sequência progressiva de estudos que objetiva a aquisição de conceitos básicos para melhor compreender o processo de percepção visual de simetrias e movimentos no plano.

Compreendemos, portanto, que um dos objetivos dos Cadernos do Professor e do Aluno é de oferecer subsídios para o desenvolvimento do trabalho do professor sobre o ensino e aprendizagem das noções matemáticas ali sugeridas, articulado ao trabalho esperado dos estudantes.

Dessa forma, o professor faz parte de modo integrado à proposta, considerando que ao planejar a forma de trabalho, mesmo que relacionada às relações institucionais esperadas "[...] podem possibilitar a avaliação do desenvolvimento dos estudantes, orientando-os na construção do conhecimento, levando em conta as relações institucionais existentes" (Nobre Barros, 2011, p. 7).

Referências

Chevallard, Y. (1992). *Concepts Fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v. 12.1, 73-111.

Chevallard, Y. (2011). *Notas do Curso de Altos Estudos : Iniciação a Teoria Antropológica do Didático*. São Paulo: UNIBAN.

Nobre Barros, L. H. (2011). *As relações pessoais esperadas dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem da noção de derivada de uma função*. In: Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: UFPE, CD – ROOM, 1-9.

São Paulo - Estado, Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. (2008). *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de Saõ Paulo – SEE/SP.

São Paulo. (2009). *Caderno do Professor: Matemática, Ensino Fundamental – 6ª série*, v. 2. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de Saõ Paulo – SEE/SP.

São Paulo. (2010). *Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Fundamental – 6ª série*, v. 2. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de Saõ Paulo – SEE/SP.

❖❖❖

Geometría plana y espacial con Cabri

Tomasa Carazas Machaca
Centro de Educación Básica Alternativa Comercio 41 del Cusco, Perú
tcarazas@yahoo.es

Resumen

Esta experiencia se realizó con alumnos del 4° del ciclo avanzado de Educación Básica Alternativa Comercio 41 del Cusco, en el primer bimestre del año 2012. Los objetivos de dicha experiencia fueron construir las rectas paralelas, y el teorema de Thales utilizando el programa Cabri 3D mediante este software los estudiantes logran visualizar de forma rápida y eficaz las propiedades básicas de las rectas paralelas en el plano.
Pensamos que esta experiencia es valiosa, ya que es necesario estudiar la geometría en forma dinámica.

Se utilizó en las sesiones de clases las fichas programadas de las rectas paralelas y rectas paralelas cortadas por una secante, luego los estudiantes con el uso del ordenador en el programa Cabri 3D logran trazar las paralelas, rectas coincidentes y las rectas cortadas por una secante.

Finalmente se puede observar que la actividad logró cumplir con sus objetivos, sin embargo es necesario facilitar una computadora por alumno y tener las respuestas y gráficos más precisos.

Palabras clave: Rectas paralelas, Geometría plana y del espacio, Cabri 3D.

Eje temático: Geometría plana y espacial con Cabri

Planificación Pedagógica del Proyecto

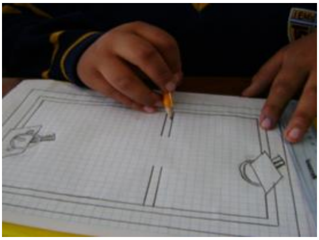
Contenidos:

Bloque 1: Contenidos comunes

Interpretación de información de carácter científico y utilización de dicha información para formarse una opinión propia, expresarse con precisión y argumentar sobre problemas relacionados con la geometría mediante el uso del cabri. 3D.

Bloque 2: Aplicación de la geometría plana mediante el cabri 3D.

Exploración de rectas paralelas en el plano. ¿Qué objetos matemáticos observas en las rectas y planos paralelos.



APLICACIONES EN EL AULA

Antes de introducir la presentación, partí de lo que ya sabían y de sus experiencias. Para introducirles en el tema, empecé preguntando ¿cómo se organizan y se aplica el cabri 3D en Geometría Plana y en otras ciencias como la Física y la Geometría Analítica, mediante el siguiente procedimiento:

- El docente facilita la información preliminar de las distintas posiciones que adoptan las rectas en el plano: rectas que se cruzan, rectas que se intersecan, rectas alabeadas y rectas paralelas en el plano tal como se observa en la siguiente gráficas que se adjuntan en la ficha de sesión programada, en el cual el estudiante con la ayuda del software cabri 3D; ejecuta los gráficos de rectas paralelas.

- El docente realiza la definición de rectas paralelas y su notación; las propiedades que se cumple: reflexiva, simétrica y transitiva.
- El docente les da a conocer a los estudiantes y les plantea ejercicios para completar espacios en blanco la palabra o símbolo de los enunciados planteados.
- El docente les plantea ángulos que se forman en dos rectas paralelas cortadas por una secante, determinando las denominaciones en los pares de ángulos que se forman.
- Asimismo los estudiantes representan y grafican utilizando el cabri 3D, utilizando sus computadoras lo descrito anteriormente.
- Una vez que los estudiantes han comprendido los casos y las denominaciones de los ángulos que se forman en dos rectas paralelas cortadas por una secante. Se les plantea una matriz de preguntas para completar en los espacios en blanco
- El docente les plantea ejercicios complementarios de autoevaluación a los alumnos.
- Finalmente el estudiante discrimina rectas paralelas y los ángulos de dos rectas paralelas cortadas por una secante de los ejercicios propuestos en una matriz y de complementación para su autoevaluación.
- Para su mayor comprensión adjunto una ficha de sesión programada y las evidencias con los estudiantes en la sesión.

Objetivo: Rectas paralelas

Contenido: Rectas paralelas. Rectas paralelas cortadas por una transversal.

a. Antes de tratar rectas transversales, primero estudiaremos a distintas posiciones que adoptan las rectas en el plano.

b. Dos rectas se cruzan cuando no están en el mismo plano; tal como se observa en la Fig. (1)

c. Dos rectas se intersecan en un solo punto. Fig. (2)

d. Dos rectas pueden no intersecarse. En este caso se llaman rectas alabeadas; o sea las rectas coinciden Fig. (3) Finalmente las dos rectas pueden estar en un mismo plano sin intersecarse; es decir, que no tienen ningún punto en común. (Fig. 4)

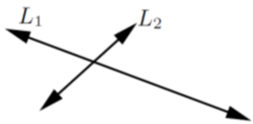


Fig. 1: L_1 y L_2 no son paralelas porque ambas no se curzan

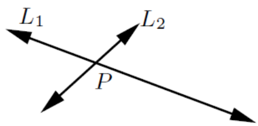


Fig. 2: $L_1 \cap L_2 = P$

Fig. 3: $L_1=L_2 \rightarrow L_1$ □ L_2

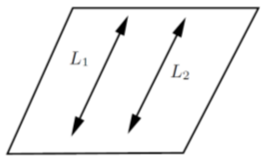


Fig. 4: L_1 □ L_2 ó $L_1 \cap L_2 = \phi$

El 3ro. Y 4to Caso garantizan las condiciones del paralelismo de la s rectas; luego de las figures (3) y (4) podemos deducir la definición.

Definición: Dos rectas son paralelas, si y solos sí, coinciden o su intersección es vacía.

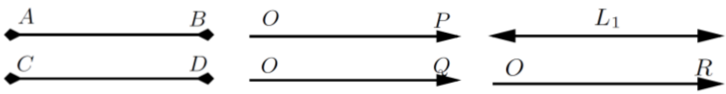
Notación: El paralelismo se denota así: □; de modo que:

Que es la expresión simbólica del paralelismo de 2 rectas.
Relación de Equivalencia. Cuando empleamos el conectivo lógico (sí sólo sí) implica una relación de equivalencia.

Por consiguiente el paralelismo de 2 rectas es una relación de equivalencia: es decir, cumplen las tres propiedades siguientes.

- Reflexiva:
- Simétrica: si
- Transitiva: si

También pueden ser paralelos los segmentos, rayos o rayos con rec. Segmentos y una recta. Ejemplo:



AB□CD □ L_1□

A continuación, en cada ejercicio, en el espacio en blanco, escribe la palabra(s) o símbolo(s) que faltan para completar el enunciado.

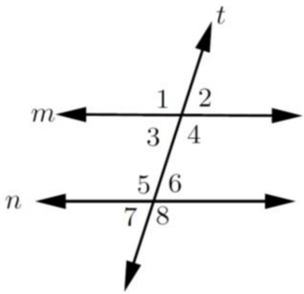
Cuando las rectas coinciden, las rectas son …………………………	Paralelas
Si L_1 y L_2 son dos rectas que se intersecan en un solo punto. Garantiza el paralelismo de ambas rectas? Responde si o no.	No
Dos rectas en el plano son paralelas, si sólo si………………… o su intersección es………..	coinciden Vacía
Escriba la notación del paralelismo de las rectas L_1 y L_2…………………………………………………………	
Una recta sobre el pizarrón y una recta en el piso.	Se cruzan o se intersecan

Contenido: Rectas paralelas cortadas por una transversal.

Antes de empezar este tema, estudiaremos las terminologías nuevas, en este caso transversal.

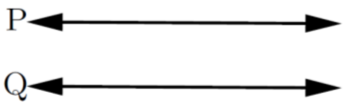
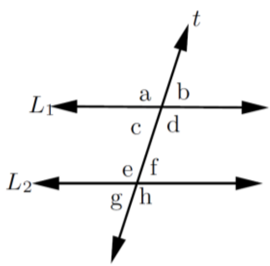
Transversal: Es una recta que interseca a dos o más rectas en puntos diferentes la palabra transversal se usará si cuando todas las rectas estén en el mismo plano.

En la siguiente figura, t es una recta transversa de las rectas m y n, que las rectas forma ocho ángulos distribuidos de la siguiente manera:

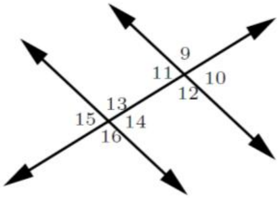
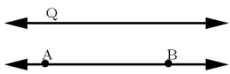
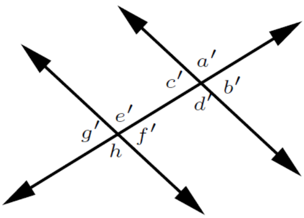


a. Los águlos: 1, 2, 3, 7, 8 son *ángulos exteriores*
b. Los ángulos: 3, 4, 5, 6 son *ángulos interiores*
c. Los ángulos 1 y 5, uno interno y el otro externo; pero situados en el mismo lado de la transversal y con vértices diferentes se llaman *ángulos correspondientes*. También son ángulos correspondientes: 2. y 6; 4 y 8; 3 y 7.
d. *Ángulos alternos internos*, son pares de ángulos internos los situados en lados opuestos de la transversal y con vértices iguales, como por ejemplo los ángulos 3 y 6; 4 y 5.
e. *Ángulos alternos externo*s, son pares de ángulos externos situados en lados opuestos de la transversal y con vértices diferentes por ejemplo los ángulos 1 y 8 ; 2 y 7

A continuación responda las siguientes preguntas y escriba lo que falta en el espacio en blanco.

Una transversal es una.......... que interseca a dos o más rectas en puntos diferentes.	Recta
En la siguiente figura, trace una transversal determine el número de ángulo que forma:  Donde ⍰	Transversal Determina 8 ángulos
Si a los ángulos anteriores ha denotado por números, nombrar cada uno de los ángulos.	• Ángulos internos • Ángulos externos • Ángulos correspondientes • Ángulos alternos externos • Ángulos alternos internos.
En la siguiente figura, nombrar los ngu1os alternos, internos y ángulos alternos externos.  	Alternos internos: c y f; d y f Alternos externos: a y h; b y g

Problemas complementarios de autoevaluación

Cuando se dice que dos rectas en el plano son paralelas de un ejemplo	Cuando su intersección es vacía
¿Dos rectas que se cruzan son paralelas?, corresponda sí o no.	No
En la siguiente figura, nombrar los ángulos correspondientes. 	Los ángulos 9 y 13; 11 y 15; 10 y 14; 12 y 16.
Dado un punto Q exterior a la recta , trace por Q la paralela a :	
En la siguiente figura, nombrar los ángulos alternos externos y alternos internos. 	Alternos externos: ; . Alternos internos; ;
• Una transversal a 2 rectas en el plano es una recta que las…………..en dos puntos diferentes.	corta

Bibliografía.

Brihuega, J. Molero, M., Salvador, A (2000): Didáctica de la Matemática. Edit. Complutense: Madrid.

Carazas, T. (2009): Enseñanza Programada de la Geometría plana. Publicado por Indecopi

Dolciani, M. y otros (1997): Geometría Moderna .Edit. Trillas: México

Perry, p. Camargo, L. Samper, C y Rojas, C. (2006*). Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemática.* Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Polya, G. 1992.Cómo plantear y resolver problemas. Edit. Trillas: México

Samper, C. Perry, P; Echeverry A. y Molina, O. (2008). *Aprendizaje de la demostración de la geometría dinámica.* Reporte de investigación no publicado. Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

❖❖❖

Introducción a la geometría analítica espacial con Cabri 3D

Jesús Flores Salazar
jvflores@pucp.pe

Cecilia Gaita Iparraguirre
cgaita@pucp.edu.pe

Pontificia Universidad Católica del Perú
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM/Perú)

Marisel Beteta Salas
Colegio Hiram Bingham
mbeteta@hirambingham.edu.pe

Resumen

La experiencia se desarrolló en un primer curso de matemática con estudiantes de Arquitectura en donde, con ayuda del software Cabri 3D, se inició el estudio de objetos elementales en la geometría analítica espacial. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular representaciones de objetos como el punto, la recta, el plano y la esfera. Determinaron posiciones relativas entre ellos, asociaron ecuaciones a sus representaciones e hicieron deducciones sobre las formas y las ecuaciones de sus intersecciones. Para el diseño de las actividades se tomaron en cuenta los niveles de pensamiento geométrico de Parzysz. Las actividades con Cabri 3D favorecieron la evolución de los niveles de pensamiento G0 a G1 y en algunos casos también del G1 al G2.

Palabras clave: geometría, geometría analítica espacial, geometría dinámica.

Eje temático: Geometría plana y espacial con Cabri.

Introducción

A partir de la experiencia docente, se ha podido observar que los estudiantes tienen dificultades para determinar representaciones analíticas asociadas a objetos tridimensionales, aun cuando estos son elementales como es el caso del punto, la recta, el plano y las superficies cuadráticas.

En este contexto se consideró pertinente diseñar una secuencia de enseñanza en donde los estudiantes tuvieran la oportunidad de explorar posiciones relativas entre objetos elementales en tres dimensiones y de asignarles representaciones analíticas, haciendo uso del Cabri 3D.

El principio en el que se apoyó el diseño fue aprovechar las potencialidades que ofrece el Cabri 3D tales como la opción de cambiar de punto de vista para estudiar un objeto, la determinación de posiciones relativas como el paralelismo o la perpendicularidad de rectas y planos, la construcción de objetos que verifiquen condiciones dadas y la asignación de ecuaciones o coordenadas a objetos elementales. Además, las herramientas y recursos que posee Cabri 3D permitieron, por ejemplo, la ubicación de puntos dadas sus coordenadas, de planos paralelos y perpendiculares entre sí y que los estudiantes identificaran las ecuaciones de estos planos.

Modelo teórico utilizado

Se tuvo en cuenta el modelo teórico presentado por Parsysz (1988) para la enseñanza de la Geometría, en el que destaca cuatro etapas en el desarrollo del pensamiento geométrico:
Geometría concreta (nivel G0)*:* en esta etapa se parte de la realidad, de lo concreto y es donde los objetos son materializados.

Geometría espacio-gráfica (nivel G1): es la geometría de representaciones figurales y gráficas; en este nivel los objetos son bidimensionales como por ejemplo los diseños producidos utilizando Cabri 3D. La justificación de las propiedades es hecha por lo que se *ve*.

Geometría pro-axiomática (nivel G2): en este nivel los conceptos son objetos teóricos y las demostraciones de los teoremas son hechas a partir de premisas aceptadas por los estudiantes de manera intuitiva y no hay necesidad de explicitar un sistema de axiomas. Aquí es posible que lo que se *sabe* se apoye todavía en lo que se *ve*.

Geometría axiomática (nivel G3): es el nivel en el que los axiomas son explicados completamente.

De acuerdo con Parsysz (1991), en los niveles G0 y G1 los objetos son concretos y las justificaciones y validaciones son perceptivas. En los niveles G2 y G3 los objetos son teóricos y las validaciones son deductivas.

El autor afirma que para los profesores es difícil distinguir los niveles de adquisición G1 y G2 y, como consecuencia de esto, en muchos casos no consiguen distinguir validaciones perceptivas de validaciones teóricas.

Teniendo en cuenta los supuestos de este marco teórico, se consideró pertinente incorporar en la propuesta actividades que propiciaran la adquisición progresiva de estos niveles. A continuación se describen dichas tareas.

Para garantizar la adquisición del nivel G0, donde debía darse un reconocimiento inmediato del objeto en tres dimensiones, se propusieron las siguientes actividades: Identificar si algunos puntos dados estaban o no sobre un plano, identificar a partir de un gráfico, sólidos como cubos. También se plantearon preguntas para que, con argumentos basados solo en el gráfico, reconocieran la forma que tenían curvas que resultaban de cortar la esfera con planos que pasaban por el centro de esta.

Para el nivel G1, que se caracteriza por ser aquel en el que los objetos todavía son considerados a través de sus representaciones bidimensionales, se plantearon preguntas que implicaban reconocer vectores perpendiculares, planos paralelos, planos perpendiculares, planos que contienen caras de un cubo, entre otras; en todas ellas los argumentos dar los estudiantes para ser considerados en este nivel debían estar apoyados en lo que se podía observar.

Para propiciar la evolución al nivel G2, donde se debía evidenciar un reconocimiento de propiedades o características de los objetos tridimensionales, se plantearon preguntas referidas a encontrar condiciones que satisfacían puntos que se encontraban sobre planos paralelos a los planos de coordenadas. Entra las preguntas propuestas se solicitó hallar las coordenadas de vértices de cubos conociendo las ecuaciones de sus caras; también se plantearon actividades para reconocer los efectos en las ecuaciones de los objetos el que estos cambiaran de posición.

Implementación del proceso de instrucción

La experiencia se desarrolló en un laboratorio de cómputo, donde cada estudiante interactuaba con una computadora. Luego de algunas tareas que buscaban familiarizar al estudiante con el programa Cabri 3D, se plantearon cinco actividades.
En relación a la primera actividad propuesta a los estudiantes en donde se pedía que ubicaran cuatro puntos en el espacio, como muestra la figura 1, para que luego, según lo que se observaba, indicara si se encontraban en un mismo plano, hubo distintas respuestas. Esto había sido previsto ya que se les dio libertad para que ubicaran los puntos en cualquier lugar del espacio. Sin embargo, la posibilidad que ofrece el Cabri 3D de modificar la perspectiva del observador, permitió que los estudiantes cambiaran su percepción inicial y pudieran comprobar o modificar su respuesta inicial sobre la posición relativa de los cuatro puntos.

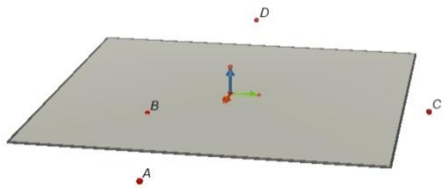


Figura1: Puntos en el plano

En relación a la segunda actividad propuesta para determinar condiciones que debían satisfacer los puntos al encontrarse en determinados planos, se obtuvieron respuestas diversas, siendo algunas más precisas que otras. Por ejemplo, para describir los puntos en el plano XY, los alumnos emplearon expresiones tales como:

- *Va a estar en solo dos dimensiones x e y por lo tanto no contendrá valores en el eje z, z=0.*
- *Su tercera coordenada siempre será 0.*
- *Solo tendrán como coordenadas pares ordenados (x, y).*

En esa misma actividad, la mayoría de estudiantes reconoció cuáles eran las ecuaciones de los otros dos planos de coordenadas, x=0 e y =0. También identificaron que la posición relativa entre ellos era la de ser perpendiculares (ver figura 2). Sus argumentos se basaban en lo que observaban. La tarea adicional en la que debían construir planos paralelos a los planos de coordenadas permitió reforzar la conexión entre la representación geométrica y la ecuación respectiva.

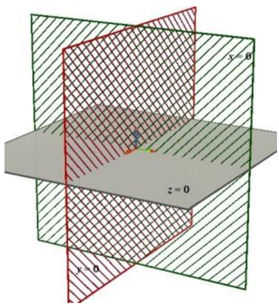


Figura 2: Planos perpendiculares entre si y sus ecuaciones

En la tercera actividad los estudiantes debían manipular un objeto previamente construido y determinar de qué tipo de figura se trataba, como mostramos en la figura 3. Esto debía hacerse reconociendo la posición relativa entre las caras así como las dimensiones de estas, llegando a concluir que se trataba de un cubo. La mayoría de estudiantes logró realizar exitosamente la tarea, basándose para ello en características de los objetos involucrados tales como caras perpendiculares, sin restringir su respuesta a la apariencia de la figura.
En relación a la pregunta en la que se pedía que establecería el efecto en la forma de la figura al manipular uno de sus vértices, se encontró que la mayoría de estudiantes señaló que el cubo “crecía” ya que “sus caras crecían” y que, por lo tanto, las

ecuaciones de las seis caras también cambiarían. Un estudiante manifestó que al manipular el punto C (uno de los vértices de la figura), el cubo crecía tanto que sus caras se salían de los planos; con esta explicación, el estudiante evidencia que todavía se encuentra en el nivel G1 ya que su argumento se basa en lo que ve, es decir, tiene una concepción de plano como un conjunto acotado que coincide con la representación del plano como un paralelogramo.

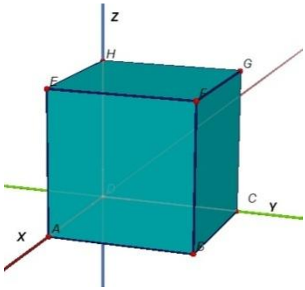


Figura 3: El Cubo

La actividad 4 permitió que los estudiantes se familiaricen con la condición geométrica que define a una esfera (ver figura 4); solo unos pocos estudiantes ubicaron el centro de la esfera de manera incorrecta, lo que originó que se obtuvieran ecuaciones que luego no pudieron explicar.

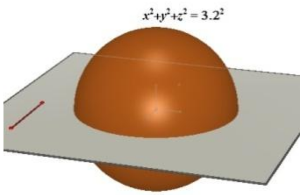


Figura 4: La esfera

Y en relación a la actividad 5, dado que el Cabri 3D no proporciona ecuaciones de curvas que resultan de intersecar dos objetos, los alumnos se vieron en la necesidad de observar la intersección de la esfera y el plano desde otra perspectiva desde la cual intuyeron que se trataría de una circunferencia (ver figura 5).

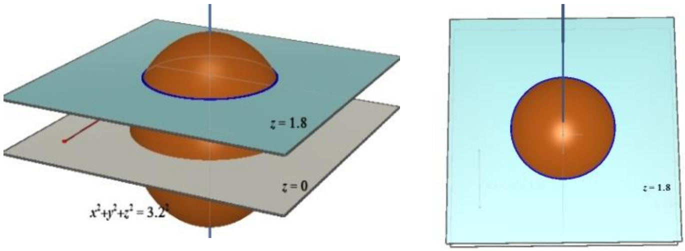


Figura 5. Curva de intersección y cambio de punto de vista del observador

Algunos estudiantes formalizaron su afirmación colocando un punto en el eje z y midiendo la distancia del candidato a ser el centro de la esfera a un punto de la curva y confirmaron que estas distancias se mantenían constantes. De esta manera, justificaron que la ecuación de la curva, resultado de esa intersección, era de la forma , siendo *y*=constante. Este resultado se obtuvo sin manipular algebraicamente las ecuaciones; la conexión entre la representación geométrica y la algebraica se dio casi naturalmente.

Algunas consideraciones

En general, las actividades propuestas en las que se hizo uso del Cabri 3D favorecieron la evolución de los niveles de pensamiento G0 a G1 y en algunos casos también del G1 al G2; contribuyó a este hecho la posibilidad de manipular los objetos, así como el poder posicionarse en distintas ubicaciones cambiando de perspectiva en la observación de los objetos.

Además, las herramientas y recursos que posee Cabri 3D permitieron, por ejemplo, la ubicación de puntos dadas sus coordenadas, de planos paralelos y perpendiculares entre sí y que los estudiantes identifiquen las ecuaciones de estos planos, aprovechando un elemento práctico y experimental como lo es el CABRI 3D para facilitar la comprensión de componentes teóricos y el paso entre distintos niveles de pensamiento.

Referencias

Gómez, N., Parada, D. y Romero, V. (2008). *Geometría Dinámica: Una propuesta renovada para enseñar lugares geométricos*. Recuperado el 19 de Mayo de 2012, de: http://www.jornadas-virtuales.revoluciontic.com.ar/Trab_2008/NTIC/geometria.pdf

Parzysz, B. (1988). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at High school Level. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 575-593.

❖❖❖

Visualización de diferentes sólidos geométricos usando Cabri 3D

Maritza Luna Valenzuela
Pontificia Universidad Católica de Perú
luna.m@pucp.edu.pe

Resumen

Esta comunicación pretende mostrar una experiencia positiva del curso de Introducción a la Matemática Universitaria, el cual vengo dictando desde el año 2009, en la unidad académica de Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica de Perú. En este contexto, presentaré este artículo para compartir con los docentes de nivel secundario y superior algunos casos muy interesantes de planteamiento para la solución de problemas de geometría en el espacio vistos durante el año 2012-1. Los temas que se abordan son Pirámide, Cono y Esfera. Los objetivos que se logran con estos planteamientos son: mejorar la visualización de los diferentes sólidos geométricos mediante la herramienta dinámica de Cabri 3D; desarrollar capacidades para la propuesta y resolución de problemas; y ampliar la visión geométrica de los estudiantes.

Palabras clave: Geometría, Cono, Pirámide, Esfera.

Eje temático: Experiencias educativas con asistencia de Cabri.

Introducción.

Se presenta la visualización de dos situaciones de solidos geométricos con la herramienta dinámica de Cabri 3D que fueron abordadas en el curso de Introducción a la Matemática Universitaria. En la primera de ellas se debe determinar el área lateral de una pirámide no regular. La segunda, se debe determinar el volumen de un cono circunscrito a dos esferas tangentes.

Marco teórico

De acuerdo con Duval (1996), la actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación” y es de fundamental importancia en el funcionamiento cognitivo la distinción entre un objeto y su representación, y la comprensión de la matemática como una actividad que moviliza una variedad de registros de representación semiótica.

Además teniendo presente que el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie niveles de razonamiento que son secuenciales (Reconocimiento, Análisis, Abstracción, Deducción) y ordenados, de tal manera que no se puede saltar ninguno. Asimismo, en cada nivel se supone la comprensión y utilización de los conceptos y definiciones de una manera distinta, lo cual se manifiesta en una manera diferente de reconocerlos, definirlos, clasificarlos, y en la realización de construcciones o planteamientos; todo esto como resultado del proceso de aprendizaje como indica López, R.

La herramienta del Cabri 3D hace posible la construcción, manipulación y calculo de diversos sólidos como pirámides, conos, esferas, etc.

Objetivos de la experiencia

- Interpretar y analizar los datos de la situación.
- Mejorar la visualización de los diferentes sólidos geométricos mediante la herramienta dinámica de Cabri 3D.
- Desarrollar capacidades para la propuesta y resolución de problemas o situaciones.
- Ampliar la visión geométrica de los estudiantes.

Situación 1

Una pirámide tiene como base un cuadrado de lado 4 cm y su vértice se encuentra sobre la recta perpendicular a su base y pasa por un de los vértice del cuadrado. Si la altura de la pirámide mide 4 cm, calcula su área lateral.

Planteamiento

De la información tenemos la construcción de la pirámide no regular como se muestra en la Figura 1 y donde no es posible visualizar las caras posteriores.

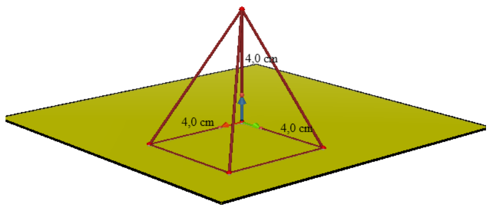


Figura 1

Las opciones de dinamismo del Cabri 3D permite que el alumno pueda gijar y ver los distintos caras y ángulos para finalmente dar la solución.

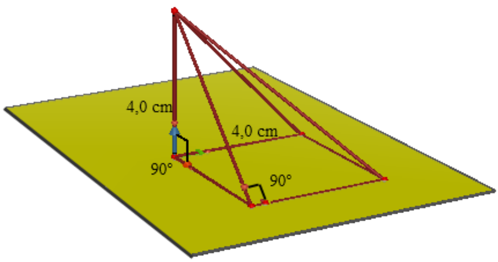


Figura 2

Situación 2

Se tienen dos esferas tangentes exteriormente, cuyos radios miden 3 cm y 5 cm. Calcula el volumen del cono circunscrito a ambas esferas.

Planteamiento

De la información se esboza las esferas tangentes y el cono circunscrito como se observa a continuación en la siguiente figura

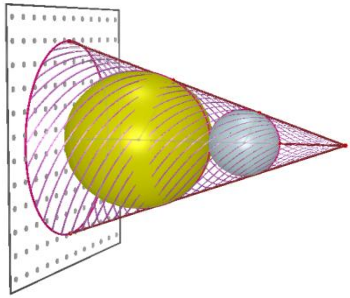


Figura 3

Para poder dar solución a la situación es necesario tener presente la tangencia como se observa en la Figura 4 para luego establecer semejanza de triángulos y dar solución.

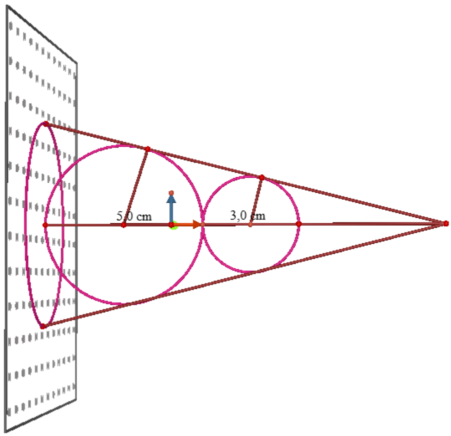


Figura 4

Las opciones del Cabri 3D facilita la visualización y determinar el volumen.

Referencias

CABRI 3D, *Manual do usuario*. Recuperado el 30 de mayo de 2012, de: http://es.scribd.com/doc/6338612/Manual-Cabri3d

Duval, R. (1996) La habilidad para cambiar el registro de representación. *LA GACETA DE LA RSME*, Vol. 9.1, Págs. 143–168. Recuperado el 31 de mayo de 2012, de: http://cmapspublic.ihmc.us/rid%3D1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%2520habilidad%2520para%2520cambiar%2520el%2520registro%2520de%2520representaci%25C3%25B3n.pdf

López, R. *Los niveles de Van-Hiele*. Recuperado el 30 de mayo de 2012, de: http://www.slideshare.net/rafikylopez/niveles-de-vanhiele

Torregrosa G. & Quesada H. (2007) Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (2007) pp 275-300.

❖❖❖

Uma experiência no cabri 3D na apreensão de axiomas de incidência no espaço com alunos de mestrado

José Carlos Pinto Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Brazil
leivasjc@yahoo.com.br; leivasjc@unifra.br

Resumen

Este trabalho relata uma experiência realizada no primeiro semestre de 2012, com doze alunos da disciplina de Geometria de um Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática no Brasil. Os alunos são todos professores que ensinam na escola básica e apenas um deles tinha algum conhecimento do Cabri 3D. Na segunda parte do programa o investigador, que é o professor da disciplina, buscou por meio do Cabri 3D reconstruir o grupo de axiomas de incidência da axiomática de Hilbert, com relação ao espaço. A opção por essa tecnologia prendeu-se ao fato de ser ela um recurso poderoso para o desenvolvimento de habilidades visuais como afirmou Alsina: *O desenvolvimento do programa CABRI tem permitido abrir novas perspectivas às experiências geométricas. O uso estratégico desse programa permite diagnosticar as habilidades iniciais, planejar uma aprendizagem passo a passo, avaliar os progressos e tomar decisões que reorientem o ensino de muitos temas geométricos (1997, p. 126)*. Com o objetivo de verificar a influência do software na formulação dos axiomas, foram propostas três atividades a serem realizadas em laboratório informatizado quando os alunos, ao mesmo tempo em que adquiriam destreza no uso das ferramentas do Cabri, exploravam e redigiam suas conclusões geométricas utilizando a ferramenta Nova vista texto no ícone Documento. Pode-se concluir da experiência realizada que o software foi um facilitador para a ocorrência da apreensão dos axiomas de incidência no espaço, proporcionando o planejamento com seu uso nos próximos passos do desenvolvimento de conteúdos programáticos.

Palabras clave: axiomas de incidência, geometría espacial, Cabri 3D.

Eixo: Geometría plana y espacial con Cabri.

Corpo do documento

A Geometria é uma das áreas da Matemática que sofreu muitas mudanças desde suas origens. Por sua vez, ela proporciona uma variedade de posibilidades de trabalho para os diversos campos do conhecimento que a humanidade necessitou e necesita para melhorar sua qualidade de vida. Neste sentido, passou da geometria grega à geometria analítica, por exemplo, e, mais recentemente, pela geometria fractal e geometria dinâmica.

Na década de 70, com a denominada Matemática Moderna, ela assumiu um caráter eminentemente formal, no qual havia acentuado interesse pelo processo dedutivo e, talvez por isso, deixou de ser ensinada por um grande número de professores. A aprendizagem matemática ficou bastante prejudicada, uma vez que os alunos não manifestavam interesse por tal forma de ensino.

A construção do conhecimento geométrico, por meio do uso de instrumentos convencionais como régua e compasso, não é mais atrativa para a maioria dos estudantes e, muitos deles, chegam à Licenciatura em Matemática no Brasil, sem conhecer e sem saber fazer uso de um transferidor, por exemplo. Essas construções, quando não são feitas corretamente, exigem que o aluno retome o trabalho, em geral, de seu início, desperdiçando o que já foi feito bem como perda de tempo.

Nesse sentido, com o desenvolvimento da linguagem computacional, parece que houve um interesse maior e, atualmente, crescente tanto por parte dos aprendizes quanto dos professores, bem como mundanças consubstanciais entre os conservadores e os não conservadores do ensino. Papert (1994, p.18) afirma: *A maioria dos Conservadores honestos está trancada na suposição de que o estilo da Escola é o único estilo, pois jamais* *viram ou imaginaram alternativas para a capacidade de comunicar determinados tipos de conhecimento*.

Realizar novas experimentações quanto ao ensino em Geometria pode ser alternativa para uma melhor compreensão e apreensão do conteúdo. Para Borba e Villarreal (2006, p.65), *"um experimento é realizado para descobrir algo, para verificar a veracidade de uma hipótese, a fim de aceitar ou rejeitá-la ou para fornecer exemplos (ilustrar) de uma verdade conhecida, todas as ações que nem matemáticos nem estudantes poderia dizer que nunca fez"*. Assim, entendemos que promover, em sala de aula, atividades investigativas num software, para reconstruir teóricamente elementos de geometria espacial, torna-se motivador para a aprendizagem dos alunos em qualquer nível de escolaridade.

O Cabri 3D, em nosso entendimento, é um software que oferece ao estudante, e também ao professor, inúmeras posibilidades de construção espacial, mesmo no sentido axiomático, muitas vezes rejeitado pelas dificuldades visuais que indivíduos apresentam. A esse respeito definimos*"visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos".* (LEIVAS, 2009, p.22)

Em nossa prática profissional, e em nossas pesquisas, temos comprovado que o Cabri é um recurso didático facilitadorr deste proceso de construção mental, mais do que outros recursos, como os materiais concretos. No IberoCabri de 2010, realizado na cidade de Querétaro, no México, apresentamos resultados de uma investigação, para ilustrar a construção do conceito de altura de triângulos utilizando o Cabri Plus, tendo por conclusão que indivíduos relacionam este conceito à verticalidade e não à perpendicularidade ao lado oposto ao vértice. A pesquisa completa se encontra em (LEIVAS, 2010).

O presente trabalho tem por objetivo relatar uma experiência realizada na disciplina Fundamentos de Geometria Plana e Espacial, oferecida a um Mestrado Profissional em Ensino de

Física e de Matemática no Brasil, na qual o investigador é o próprio professor. O experimento ocorreu no primeiro semestre letivo do ano de 2012, num encontro de quatro horas aula, num laboratório informatizado com o Cabri 3D instalado, envolvendo 12 alunos, todos eles professores atuantes na escola básica brasileira. Apenas um dos estudantes tinha conhecimento prévio do software.

O professor já havia construído uma plataforma, na qual os alunos postavam as atividades que realizavam durante as aulas. Solicitou que cada um criasse uma pasta com o nome acrescido da palavra Cabri, a fim de distinguir das demais atividades que estavam sendo realizadas.

O investigador fez um "passeio" pelo menu do Cabri 3D, abrindo e explanando superficialmente as potencialidades de cada ferramenta, dando atenção especial à "documento – nova vista de texto" uma vez que os alunos deveriam fazer seus registros naquele espaço para posterior encaminhamento.

Foram propostas três atividades, sequencialmente apresentadas, as quais os alunos procuravam identificar as ferramentas do software, ao mesmo tempo em que reelaboravam seus construtos mentais na busca de identificar axiomas de pertinência no espaço tridimensional. Por limitação do espaço imposto, apresentaremos aqui um pequeno relato correspondente à primeira atividade (figura 1), a qual foi constituida de cinco itens. Era esperado que os alunos identificassem as seguintes relações:

- Três pontos distintos não colineares determinam um único plano no espaço.
- Uma reta r está num plano π se cada ponto de r está em π.
- Se dois pontos distintos estão em um plano, então a reta que os contem também está contida no plano.
- Medir o ângulo entre a reta e o plano.

Atividade 1 proposta aos alunos

Represente três pontos quaisquer no espaço, usando o Cabri 3D e os denomine por A, B e C.

1. Existe reta passando pelos três ao mesmo tempo?

   1.1. Qual estratégia usar para responder? Registre-a.

   1.2. Traçar retas r,s,t passando por cada dois dos pontos representados.

2. Em caso de responder <u>não</u> à pergunta 1, existe plano contendo os três?

   2.1. Registre sua justificativa.

   2.2. Os três pontos estão nos limites visuais do plano?

   2.3. Em caso negativo à sua última resposta, movimente-os de modo a que fiquem na parte sombreada, ou seja, nos limites visuais do plano.

   2.4. O que podes concluir sobre os pontos? Antes e depois de movimentá-los? Qual é a característica principal do plano que isso sugere?

3. Enuncie o axioma que relaciona ponto e plano, ou seja, determinação do plano?

4. Considerando o axioma correspondente ao anterior para ponto e reta quando do estudo de Geometria Plana, como enuncias o axioma que relaciona ponto – reta – plano no espaço?

5. Obtenha uma reta r num plano α. Modifique sua cor para amarelo e espessura "muito largo". Altere a cor do plano e o estilo para vazio.

   5. 1. Crie um ponto A fora do plano α. Como saber se o ponto pertence ou não ao plano? Argumente.

   5. 2. Obtenha a reta t passando por A e perpendicular ao plano α.

- Como garantir que a reta foi construída corretamente? Elabore uma estratégia e comprova.

Figura 1: Atividade 1 proposta aos alunos

Todos os alunos responderam ao item 1 dizendo não haver reta contendo os três pontos uma vez que, em suas construções, tomaram os pontos não alinhados, no plano e exploraram seu conhecimento da geometria plana no qual bastam dois pontos distintos para definir uma única reta. As justificativas registradas aludiam à axiomática para o plano e, especialmente, pela construção dos pontos no espaço utilizando o Cabri. Com relação ao item 1.2 houve a possibilidade de confrontar se os pontos construidos, de fato, estavam no plano pela movimentação desse plano e a verificação de que as três retas construidas unindo os pontos dois a dois se encontravam nele, mesmo para os que haviam construido pontos fora dos limites da representação do plano.

Cinco dos 12 alunos responderam ao item 1.2 que os três pontos não estavam nos limites visuais do plano e puderam fazer suas comprovações pela sua movimentação, percebendo que as retas unindo os pontos dois a dois se encontravam no mesmo plano.

Lu respondeu que não à pergunta: Os três pontos estão nos limites visuais do plano? (item 2.2) Justifica sua resposta no item 2.4 da seguinte forma: *Apesar de os pontos visualmente não estarem sob o plano, eles pertencem a este, pois o plano foi construido a partir destes três pontos*.

O registro de Lau (figura 2), que havia respondido não ao item 2.2, indica a construção de um plano, diferente do plano base, e usa a ferramenta “nova vista de texto”, na qual justifica no item 2.4: *“Quando acontece o movimento, percebe-se que o ponto pertence ao plano, pois anteriormente, não era possivel perceber”*. Van, que também havia respondido “não” ao mesmo item, se expressa da seguinte forma: *Antes de movimentar os pontos A, B e C percebemos que "visualmente" estes pontos não pertencem ao plano. No entanto, ao movimentá-los percebemos que os pontos estão contidos no plano, pois os mesmos irão originá-lo”.*

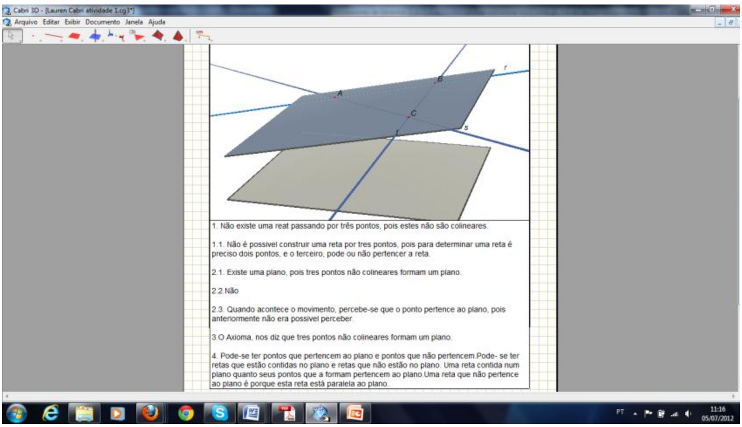


Figura 2: Registro de Lau sobre os quatro primeiros itens da Atividade 1.

Gui, que havia respondido sim ao item 2.2, justifica: *Ao movimentar os pontos no espaço, movimentamos junto o plano, pois o plano foi definido por esses três pontos. Podemos perceber que dependendo da posição dos pontos eles ficam fora do limite de visualização do plano, mas isso não quer dizer que estejam fora desse plano.*

Escolhemos a construção e a explicação de Gui (figura 3) para ilustrar a parte 5 da atividade 1, na qual foi utilizada a estratégia de medir o ângulo entre a reta construida ortogonalmente ao plano e esse, obtendo o valor de 90º, como previsto pelo professor na sequência a ser realizada no Cabri 3D.

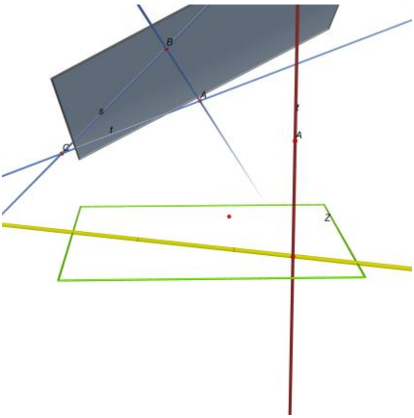


Figura 3: Construção da parte 5 da atividade 1 feita por Gui.

O aluno tece as seguintes considerações que bem comprovam a importância do Cabri para suas conclusões a respeito de visualização no espaço:

5.1. Usando o botão direito do mouse podemos visualizar o plano de diferentes perspectivas e, então, visualizar o ponto fora do plano ou construir um plano paralelo ao plano Z, passando por A, usando a ferramenta de perpendicularismo.

5.2. Usando a ferramenta de perpendicularismo conseguimos garantir que a reta é perpendicular ao plano. Podemos garantir que essa reta não está contida no plano, usando a ferramenta de pontos de intersecção.

Como explanado anteriormente, as limitações de texto impedem que se faça a descrição das outras duas atividades. Entretanto, pode-se concluir da experiência realizada que o software Cabri 3D é um recurso importante para o desenvolvimento de habilidades visuais bem como da aquisição e ou retomada dos axiomas de pertinência no espaço.

Referencias

Alsina, C. et al.(1997). *Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madri: Editorial Sínteses S.A.

Borba, M.C. and Villarreal, M.. (2006). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*: information and communication technologies, modeling, experimentation an visualization. USA:Springer.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização*: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

Leivas, J. C. P. (2010). Construindo o conceito de alturas de triângulos com o Cabri-Géomètre II: verticalidade ou perpendicularidade. proporcionalidad. *Boletim Gepem* 56,117-133.

Papert, S. (1994). *A máquina das crianças*: repensando a escola na era da informática; trad. Sandra Costa. – Porto Alegre: Artes médicas.

❖❖❖

Propuesta de actividades sobre cónicas con Cabri

Juana Contreras S.
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca, Chile

Resumen

La integración de recursos computacionales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es una cuestión que preocupa tanto a investigadores en Didáctica de la Matemática como a docentes de todos niveles educativos.

El uso de software de propósitos geométricos como recurso de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ha sido objeto de numerosas investigaciones y experiencias educativas, las que progresivamente se han incrementado con la aparición de programas de geometría dinámica, siendo *Cabri geométrico* el primero de este grupo. El desarrollo de estos programas ha permitido explorar nuevas posibilidades para trabajar en geometría. Las herramientas que ofrecen, permiten generar ambientes adecuados para desarrollar actividades de exploración y descubrimiento de propiedades, afianzar conceptos y abordar situaciones problemáticas.

En este trabajo se presenta una propuesta de actividades en el tema de las cónicas con apoyo del programa *Cabri II Plus*, experiencia realizada con profesores de matemática de enseñanza media. La propuesta considera actividades de construcción de las cónicas (construcciones clásicas), de exploración de sus propiedades fundamentales y de resolución problemas, con apoyo del programa.

Las herramientas que ofrece *Cabri* junto con la posibilidad de implementar applet, hacen del programa un poderoso recurso para apoyar un estudio de estas curvas y sus propiedades.

Palabras clave: Geometría dinámica, *Cabri*, Cónicas.

Propuesta de actividades

La propuesta considera actividades elementales para iniciar un estudio de las cónicas, con apoyo del programa geométrico *Cabri*. El uso de un software con características dinámicas favorece la integración de conceptos geométricos involucrados en las cónicas, la construcción, enfatizando el concepto de lugar geométrico que caracteriza a estas curvas, la verificación de propiedades y elaboración de conjeturas. En esta propuesta, las cónicas son consideradas como lugares geométricos en el plano.

I. Definición y propiedades básicas

Estudio de una cónica. Una actividad inicial en el estudio de la elipse, es apoyada con un archivo *Cabri* que contiene la figura de la curva y elementos característicos.

- Se describen los elementos principales de esta cónica (focos, vértices, centro, ejes, radios vectores, cuerdas, circunferencia principal, etc.).
- Se verifican propiedades y relaciones básicas. Por ejemplo, representando la suma constante como , y la longitud del eje menor y la distancia focal por y , respectivamente, se establece la relación entre y y el valor de la excentricidad. Se verifica que los puntos medios de cuerdas paralelas son colineales, y la recta que determinan pasa por el centro de la elipse.

Nota. Se trabajan actividades similares relacionadas con la hipérbola y la parábola.

II. Construcciones de cónicas como lugares geométricos en el plano.

Construcción 1. Construcción de una cónica, considerando la definición usual de cada curva

- **Elipse**: Dados dos puntos F y F’ (focos), una elipse es el lugar geométrico de los puntos P del plano tal que FP + F’P es una distancia fija (constante).

- **Hipérbola**: Dados dos puntos F y F' (focos), una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P del plano tal que FP - F'P es constante.
- **Parábola**: Dada una recta L (directriz) y un punto F (foco), una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano que equidistan de F y de la recta L.

Construcción 2. Construcción de una cónica, dados el foco y una directriz.

Una *cónica* es el lugar geométrico del centro de una circunferencia que pasa por un punto fijo F y es tangente a una recta fija o a un circunferencia fija C.

Nota. Se puede observar que, cuando el foco es interior a la circunferencia, se obtiene una elipse, cuando es exterior, una hipérbola, y cuando C es una recta, la cónica es una parábola.

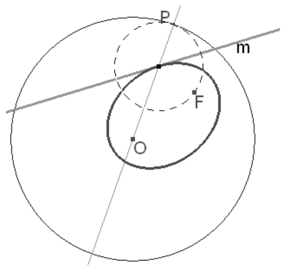


Figura 1

Construcción 3. Construcción de cónicas, como envolvente.

Una *cónica* es la envolvente de la mediatriz de un segmento que une un punto a una circunferencia (obteniendo una elipse o una hipérbola) o a una recta (obteniendo una parábola).

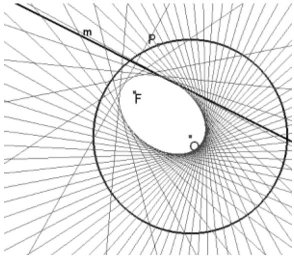


Figura 2

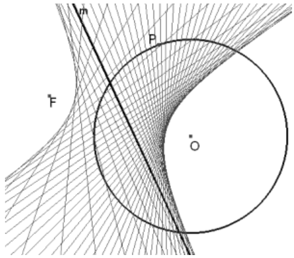


Figura 3

Nota: Para construir una parábola, se consideran dados una recta y un punto F.

III. Construcción de rectas tangentes a una cónica

1. Tangente a una *elipse* en un punto P de la curva, con focos F y F'.
   La recta tangente a la elipse en P, es la bisectriz del ángulo FPG, siendo G un punto en la prolongación de PF'. Ver figura 4.

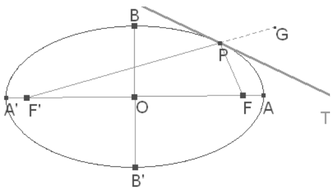


Figura 4

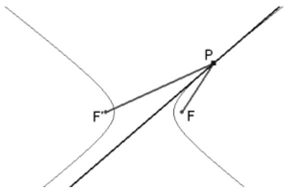


Figura 5

2. La recta tangente a una *hipérbola* en un punto P de la curva, con focos F y F', es la bisectriz del ángulo FPF'. Ver figura 5.

3. La recta tangente a una *parábola* en un punto P de la curva, dados el foco F y la directriz L, es la bisectriz del ángulo FPG, siendo G un punto en L tal que PG es perpendicular a L.

IV. Problemas

1. Construcciones de cónicas dados algunos elementos de la misma.
2. Dada una cónica (figura), construir los elementos fundamentales (vértices, focos, ejes, etc.).
3. Verificar que el lugar geométrico de la trayectoria de un punto de un segmento cuyos extremos se desplazan sobre rectas perpendiculares, es una elipse.
4. Trazar tangentes a una cónica por un punto exterior a la curva.
5. Dado un cuadrado de lado $2a$. Se construye una elipse con centro O, con eje mayor el lado del cuadrado, y eje menor $2b$ (con $b < a$), que se desliza tangente a dos lados consecutivos del cuadrado. Encontrar el lugar geométrico que describe el centro.

La enseñanza y aprendizaje de las cónicas con apoyo de un programa de geometría dinámica, favorece la comprensión del tema, en opinión de los profesores que participaron en el taller. El uso de un software como *Cabri*, obliga a profundizar en el tema, y motiva a innovar en metodologías para su enseñanza y de otros temas de geometría.

Referencias

Charrière, P.M. (1996). *Apprivoiser la géométrie avec Cabri-Géomètre*. Monographie du Centre informatique pédagogique (CIP). Genève.

Courant, R; Robbins, H. (1954). *¿Qué es la Matemática?.* Ed. Alda. Buenos Aires.

Coxeter, H.S.M. (1971). *Fundamentos de geometría*. Editorial Limusa-Willey. México.

Cupens, R. (1996). *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*. A.P.M.E.P.

Dahan, Jean. (2005). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques*. U. Joseph Fourier, France.

Díaz B, Eugenio. (1997). *Explorando las cónicas con el CABRI - Gèométre*. Revista IPN. Ciencia, Arte: Cultura, 13.

García, I., Arriero, C. (2000). *Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas*. Revista Suma 34.

Holzmuler, G. (1950). *Tratado metódico de Matemáticas elementales*. Tomo segundo. 3ra edición. Editorial Labor.

❖❖❖

Comunicaciones de experiencias

Troy Jones
Westlake High School, EE. UU.
tjones@alpinedistrict.org

Resumen

Se presentará propiedades de los puntos de concurrencia notables del triángulo, y sus puntos equivalentes en un tetraedro. Se espera de que los participantes se maravillen de las relacciones resultantes de puntos de concurrencia en un tetraedro, y lleguen a una comprehension firme de la construcción de los mismos. Además de las construcciones y representaciones en dos y tres dimensiones que se harán en Cabri 3D, mostraré con material didáctico asequible a todos los resultados de estas observaciones.

Palabras clave: Geometría del plano, geometría del espacio, recta de Euler

Referencias

Altshiller-Court, Nathan. (1952). *College Geometry*. Barnes & Noble, Inc.

Altshiller-Court, Nathan. (1935). *Modern Pure Solid Geometry*. The Macmillan Company.

Hernandez, Antonio Hernandez. (2002). *Monge: Libertad, igualdad, fraternidad y geometria*. Nivola libros y ediciones, S.L.

Monge, Gaspard. (1999). *Geometria Descriptiva*. Traduccion y revision de la obra original en Frances por Guillermo Carcia Talavera. Editorial Limusa, S.A. de C.V.

West, Stephen. *Discovering Theorems Using Cabri 3-D*. A summary by Ilene Hamilton of a dinner talk given to the Metropolitan Mathematics Club of Chicago, October 3rd, 2008 in *Points & Angles*, Newsletter of the Metropolitan Mathematics Club of Chicago, Volume XLIII No. 3, November 2008.

❖❖❖

Pirámides: una propuesta de enseñanza con Cabri 3D

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú
eadvincula@pucp.edu.pe

Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

Esta propuesta didáctica está dirigida a profesores de Educación Básica Regular que enseñan cursos de Matemática, que incluyen temas de geometría espacial. Presenta una alternativa para la enseñanza del tema de pirámides, incorporando el uso del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. El objetivo es presentar actividades, usando Cabri 3D, en las cuales se trabaja con área y volumen de pirámides, ya que este ambiente permite una mejor visualización de los objetos tridimensionales y una manipulación directa de las figuras. La propuesta consiste en introducir los conceptos relacionados con el área y el volumen de las pirámides usando construcciones previamente elaboradas que permitan formular conjeturas sobre este objeto matemático, modelar y resolver problemas. Se espera que el docente pueda incorporar el uso del Cabri 3D en la enseñanza de conceptos de geometría espacial, como las pirámides, para lo cual debe estar instrumentado con las herramientas y recursos de este ambiente. Lo que permitirá que la aprehensión secuencial y operatoria de la figura se logre con facilidad.

Palabras clave: Pirámide, área, volumen.

Eje temático: Geometría plana y espacial con Cabri.

Introducción

El interés por elaborar esta propuesta didáctica surgió al observar que los estudiantes presentan muchas dificultades en el aprendizaje de la geometría, en general, específicamente en el aprendizaje de las pirámides cuando se les pide que calculen el área o volumen. Es por ello que deseamos presentar una alternativa para la enseñanza de este objeto matemático incorporando el uso del ambiente de geometría dinámica *Cabri 3D.* Esta propuesta consiste es mostrar dos actividades en las que se use el Cabri 3D como instrumento facilitador del aprendizaje del concepto de pirámide, ya que este ambiente permite una mejor visualización de la pirámide en tres dimensiones y una manipulación directa de la misma que favorece la elaboración de conjeturas sobre sus propiedades.

Enfoque teórico

Para el desarrollo de esta propuesta nos basamos en el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y en la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), pues deseamos observar el papel de las representaciones dinámicas cuando se trabaja con los conceptos relacionados con el área y el volumen de las pirámides, usando construcciones previamente elaboradas que permitan formular conjeturas sobre este objeto matemático.
Para Rabardel (1995) la transformación de artefacto a instrumento, llamado proceso de génesis instrumental, es específica para cada sujeto. Este enfoque describe las relaciones que existen entre el sujeto, el artefacto (material, o simbólico) y los esquemas mentales del sujeto.

Para el autor la instrumentación es la adaptación del sujeto a las dificultades que constituyen el artefacto y sus funciones constitutivas, relativas a la aparición y evolución de los esquemas de utilización. Este aspecto del enfoque es el que queremos resaltar y observar con las actividades que presentamos.

Por su parte, Duval (1995) afirma que en geometría, el *registro figural* puede mostrar, de manera más rápida y clara, la solución de una situación-problema. Este registro posee cuatro aprehensiones: *perceptiva*, *discursiva, secuencial* (solicitada en la construcción de una figura geométrica con la ayuda de un instrumento) y *operatoria* (corresponde a modificar la figura dada en otras sub-figuras para obtener nuevos elementos que podrían ayudar en la solución de un problema).

Estamos interesadas especialmente en las aprehensiones secuencial y operatoria, porque estas aprehensiones son las que facilitan la construcción y la visualización de las representaciones de objetos bi o tridimensionales.

Propuesta

Presentamos dos actividades para introducir el área y volumen de las pirámides.

Actividad 1: Área de una pirámide

Se construye una pirámide cuadrangular y se realizan las siguientes acciones:

a. Calcular el área de la base de la pirámide. Para ello se utiliza la caja de herramientas *medida de área* del Cabri 3D, como se muestra en la figura 1.

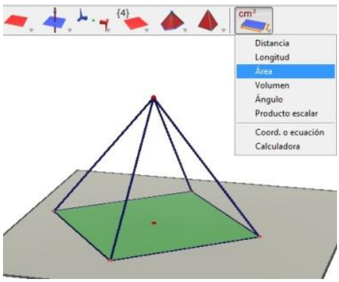


Figura 1: Área de la base de una pirámide

b. Calcular el área de las caras laterales de la pirámide. Para ello se crea un polígono en cada una de las caras de la pirámide, como se muestra en la figura 2, usando la caja de herramientas *polígono convexo*. Luego, se calcula el área de cada cara utilizando la caja de herramientas *medida de área.*

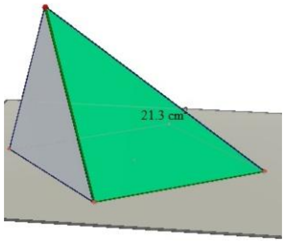


Figura 2: Área lateral de una pirámide

c. Hallar el área total de la pirámide de acuerdo a la siguiente relación: , donde es el área lateral y es el área de la base, utilizando la calculadora del Cabri 3D, como se muestra en la figura 3.

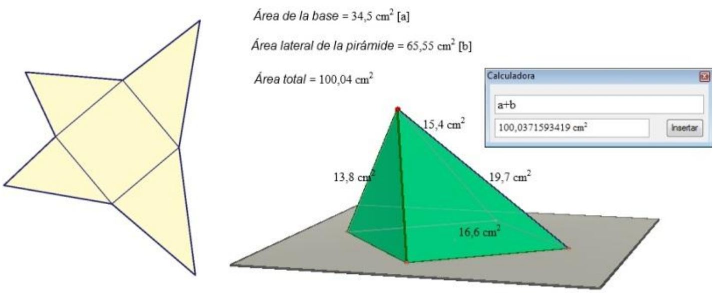


Figura 3: Área total de una pirámide y su desarrollo

d. Calcular el área total de la pirámide utilizando la caja de herramientas *medida de área* del Cabri 3D y verificar este resultado con el anterior.

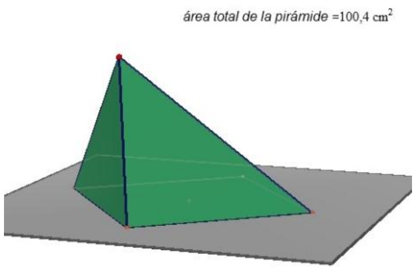


Figura 4: Área total de la pirámide

e. Utilizando el arrastre del Cabri 3D, mover un vértice cualquiera de la pirámide y verificar que la relación se mantiene.

Actividad 2: Volumen de una pirámide

Se construye un prisma triangular usando la caja de herramientas *prisma* y un *vector* dirección, y se realizan las siguientes acciones:

a. Para dividir el prisma en tres pirámides es necesario cambiar el estilo de la superficie del prisma a *vacío*, como se muestra en la figura 5.

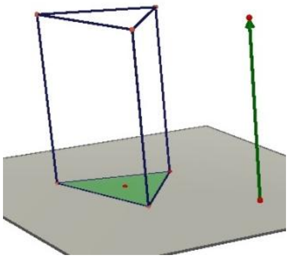


Figura 5: Prisma con estilo de superficie vacío

b. Dividir el prisma en tres pirámides triangulares, usando la caja de herramientas *poliedro convexo*, como se muestra en la figura 6.

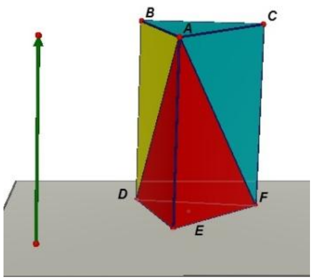


Figura 6: Prisma dividido en tres pirámides

c. Para visualizar las tres pirámides creadas en el prisma, trasladar cada una de ellas utilizando la caja de herramientas de transformaciones *traslación*. Luego, calcular el volumen de cada poliedro, utilizando la caja de herramientas de medida *volumen,* como se muestra en la figura 7.

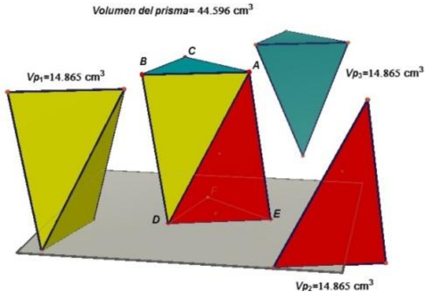


Figura 7: Volumen del prisma

d. Considerando los volúmenes obtenidos en la parte anterior, responder lo siguiente:

   i. ¿Cuál es la relación entre el volumen de cada pirámide y el volumen del prisma ABC-EDF?

   ii. Calcular el volumen de una de las pirámides utilizando la siguiente relación: – , donde es el área de la base y es la altura, y verificar este resultado con el obtenido en la parte anterior.

   iii. Utilizando el arrastre del Cabri 3D, mover un vértice cualquiera del prisma y verificar que la relación – se mantiene al calcular el volumen de las pirámides.

Algunas aplicaciones

1. ¿A qué distancia del vértice de un tetraedro regular de 12 cm de altura debe trazarse un plano paralelo a la base para que el tetraedro quede dividido en dos sólidos equivalentes?

2. Un queso viene en un envase que tiene la forma de un tronco de pirámide regular de bases cuadradas, cuyas aristas de las bases miden 4 cm y 6 cm, y cuya arista lateral mide 5 cm. Hallar el volumen del envase y el área de papel de la envoltura sabiendo que es igual a 125% de la superficie total.

Resultados esperados

Al utilizar el Cabri 3D, el profesor termina instrumentado con las herramientas y recursos de este ambiente. Y los alumnos se instrumentalizan con el concepto de pirámide, específicamente con el cálculo del área y volumen.

En el sentido de Duval (1999), el Cabri 3D permite que la aprehensión secuencial y operatoria de la figura se logre con facilidad.

La potencialidad del arrastre que posee el Cabri 3D permite que los alumnos comprueben que las relaciones para calcular el área total y el volumen de las pirámides se mantienen. Además, la manipulación de las figuras en este ambiente permite una mejor visualización de las representaciones de los objetos trabajados.

Referencias

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Advíncula, E.; Chau, N.; Mestanza, A. & Villogas, E. (2012). *Introducción a la Matemática Universitaria*. Lima: PUCP.

❖❖❖

Propuesta didáctica para apoyar el aprendizaje de la parábola usando el software Cabri

Janeth Mechán Martinez
Pontificia Universidad Católica del Perú
rj.mechan@gmail.com

Jose Luis Morón Valdivia
Pontificia Universidad Católica del Perú
jlmoronv@gmail.com

Resumen

El estudio de la parábola que está dirigida a los alumnos de educación secundaria de nuestro país usualmente se aborda bajo el enfoque de la Geometría Analítica. De acuerdo a su desarrollo histórico, en el estudio de la parábola ameritaría rescatar en un inicio su concepto geométrico previo al tratamiento algebraico.

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar una forma de trabajo a través de actividades de aprendizaje de modo que los alumnos asocien las características de una sección cónica como lo es el objeto parábola como lugar geométrico, la identificación de sus elementos básicos y su relación con el lenguaje de la Geometría Analítica con apoyo del software CABRI II y CABRI 3D.

Teniendo en cuenta una metodología adecuada, la propuesta didáctica se orienta a poner en práctica conceptos relativos a la parábola tales como lugar geométrico, recta directriz, foco, entre otros de sus componentes y lleva al alumno a reflexionar sobre otros adicionales como lo son distancia de un punto a una recta, mediatriz de un segmento, la construcción de la parábola y de su ecuación en sus casos más elementales.

Palabras clave: parábola, situaciones didácticas, Cabri.

Justificación

Según el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular que rige en los colegios de enseñanza pública y privada en el Perú desde el año 2009, el estudio de la parábola figura dentro del contenido temático de la Geometría Analítica, y bajo este enfoque, los programas curriculares no presentan los conceptos relacionados con la parábola a partir de sus propiedades geométricas sino a partir del punto de vista de la Geometría Analítica y ecuaciones. Dentro de este contexto, Calix (2007) señala que, entre las principales dificultades que presentan los alumnos del bachillerato en este tema se encuentran: reconocer las cónicas como lugares geométricos, identificar y describir sus elementos característicos, establecer la relación entre los parámetros de la ecuación y la representación gráfica (cómo la variación de los parámetros determina la transformación de la gráfica de la curva), y apreciar sus potencialidades para modelar fenómenos de la realidad.

Por nuestra experiencia docente, se sabe que los estudiantes no responden de manera unívoca a los problemas y ejercicios, porque su aprendizaje responde a procesos de reflexión y experimentación distintos. Es la propia reflexión acerca de determinado objeto lo que conduce al alumno al dominio del mismo y no sólo como resultado de un proceso de enseñanza. Si un alumno sólo puede asimilar una parte del concepto que le es presentado, los profesores deberán diseñar actividades que les permita alcanzar un mejor conocimiento.

Asimismo, hemos encontrado diversos investigadores, tales como Fernández (2009), Gonzáles (2010) y Calix (2007), quienes desarrollaron actividades de enseñanza para revisar propiedades y conceptos propios de la geometría con apoyo el software CABRI como recurso didáctico.

Objetivos

De acuerdo con el planteamiento inicial de nuestra propuesta didáctica que determina el eje temático elegido señalamos los siguientes objetivos:

A. Objetivo general

Diseñar actividades de enseñanza del objeto parábola, como lugar geométrico; la identificación de sus elementos básicos, en su aspecto gráfico y analítico usando como herramienta el software CABRI.

B. Objetivos específicos

- Determinar los conceptos previos de los estudiantes en referencia a la medición, trazado y construcción de una parábola.
- Diseñar y aplicar una secuencia de actividades de enseñanza para abordar el concepto de parábola como lugar geométrico en su aspecto gráfico y analítico usando el software CABRI.
- Evaluar si el alumno conjetura posibles vías de solución para resolver los problemas planteados en base a los resultados obtenidos y luego de la aplicación de la secuencia de actividades previas con apoyo del software CABRI.

Descripción de las Actividades diseñadas

En un primer momento, el objetivo de esta secuencia de actividades es guiar a los estudiantes en el nuevo conocimiento de la parábola como lugar geométrico y sus elementos más importantes. Se desarrollaron actividades que permitieron el descubrimiento, conceptualización, visualización y deducción de las propiedades geométricas de la parábola. Cabe mencionar que, el profesor cumple el rol de orientador permanente ante los posibles cuestionamientos de los alumnos, y la reflexión acerca de las posibles dificultades que se le presenten.

Actividad 1

Después de una breve explicación de los principales comandos del programa CABRI, esperamos que en corto tiempo, el alumno utilice el programa convenientemente. La intención de esta actividad es que los estudiantes visualicen la construcción de la parábola como lugar geométrico usando los objetos geométricos pertinentes.

Actividad 2

En esta actividad los alumnos reconocerán los principales elementos de la parábola: foco, recta directriz, eje focal, vértice, lado recto y descubrirá las relaciones entre los elementos representados gráficamente.

Actividad 3

Los estudiantes confirman que el lugar geométrico de la parábola cumple la propiedad de simetría respecto del eje focal. Asimismo, puede ubicar los puntos R` y S`, puntos simétricos a los puntos R y S, respectivamente, que también se encuentran sobre la parábola.

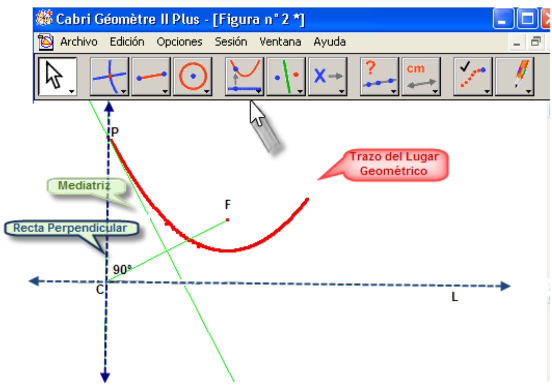
Actividad 4

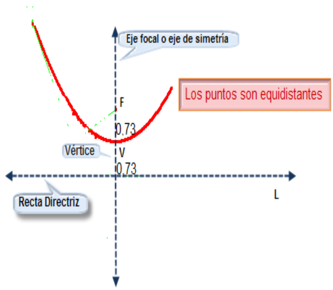
Se repasan conceptos como distancia de un punto a una recta y distancia entre dos puntos, previo a definir la parábola como lugar geométrico que equidista de un punto fijo, llamado foco y de una recta fija, denominada recta directriz.

Actividades 5

El objetivo de esta actividad es la resolución de problemas en el cual el estudiante use las opciones del CABRI para justificar su solución.

La parábola como lugar geométrico y sus elementos





Referencias

Calix, C & Alvarado, J (2007) *Enseñando las cónicas con el empleo del CABRI como recurso didáctico. Un entorno virtual interactivo*. Recuperado el 27 de Junio del 2012, de www.utn.edu.ar/aprobedutec07/docs/80.doc

De La Rosa, L. (1996) *La parábola. Una propuesta para el tratamiento del aprendizaje de las cónicas*. Universidad Autónoma de México. Matemáticas. Recuperado el 15 de junio del 2010, de: www.cch.unam.mx/ssaa/new/sites/default/files/parabola.pdf

Douady, R. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. Pedro Gómez (editor).

Fernández, E (2009) Cónicas como lugares geométricos desde um enfoque puntual y global en cabri. Recuperado el 3 de octubre Del 2009, de http://funes.uniandes.edu.co/768/1/conicas.pdf

Gonzáles, M. (2010) *Construcción de lugares geométricos en un ambiente de Geometría Dinámica.* Pontificia Universidad Católica. Recuperado el 13 de agosto del 2010, de http://macareo.pucp.edu.pe/~mgonzal/publicaciones_archivos/Lug-Geo-y-Geo-Dinamica.pdf

Ministerio de Educación del Perú (2009). "Diseño Curricular Nacional para Educación Secundaria" Lima - Perú. Recuperado el 5 de Junio de 2010 de

<http://destp.minedu.gob.pe/secundaria/nwdes/discurna1.htm>

Swokowski, E (2005). Algebra y trigonometría con Geometría Analítica. 11ª Edición. Editorial Thompson. México.

❖❖❖

Planos y esferas con Cabri 3D

Nélida Salomé Medina García
Pontificia Universidad Católica del Perú
nmedina@pucp.edu.pe

Resumen

El curso Análisis en Varias Variables Reales se enseña a los alumnos del segundo ciclo de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú. Los temas: vectores, rectas, planos y superficies cuadráticas en R^3 se desarrollan con apoyo del Programa Cabri 3D. Enseñar álgebra vectorial y superficies cuadráticas en R^3 con apoyo de Cabri 3D es importante porque: refuerza y potencia los aspectos intuitivo y cognitivo de los alumnos, En la experiencia educativa: Dado un problema de Geometría Analítica tridimensional relacionado a rectas, planos, esferas, el alumno encuentra la solución realizando las construcciones adecuadas con Cabri 3D, luego da las soluciones analíticas y las interpreta geométricamente. Los objetivos relacionados a estos temas son: Dar énfasis a la rigurosidad de los conceptos y sus propiedades, analizar e interpretar geométricamente resultados, realizar construcciones geométricas, conocer el manejo y uso del Programa Cabri 3D. Con el apoyo del Programa Cabri 3D, el alumno representa vectores en R^3, usa las definiciones y resultados teóricos para construir rectas, planos, esferas, plano tangente a una esfera en R^3. Los temas propuestos se desarrollan en cuatro horas: dos horas de exposición en el aula y dos horas de práctica en el Laboratorio, donde cada alumno resuelve la tarea usando el programa Cabri 3D. Los alumnos utilizaron el programa Cabri 3D en la solución de los Trabajos Grupales del curso (4 alumnos por grupo), Además, el Examen Parcial del curso incluyó dos preguntas de Laboratorio sobre rectas, planos, superficies de revolución.

Palabras clave: Vectores, rectas, planos, esferas, construcción.

Planos y esferas en

El estudio de rectas, planos, esferas, cilindros, conos, superficies en el espacio tridimensional es más simple usando vectores. Consideramos operaciones con vectores y sus propiedades; definición de recta, circunferencia, plano y esfera; posiciones relativas de recta y plano, dos planos; intersección de rectas, recta y plano, planos, esfera y plano; plano tangente a una esfera. Con apoyo de Cabri 3D logramos:

- Visualizar y representar figuras geométricas, dando énfasis al desarrollo del sentido espacial.
- Representar y resolver problemas de geometría en el espacio empleando la teoría y construcciones geométricas.
- Construir modelos geométricos y utilizarlos para explorar.

Para obtener:

- Gráfica de los ejes coordenados: Haga clic en el tercer botón y seleccione Recta. Construya la recta (eje) que pasa por el origen de coordenadas O y el extremo del vector . Para ocultar este vector: seleccione , haga clic derecho en Ocultar/Mostrar. De modo similar construya el eje Y, el eje Z. Luego oculte el plano de base gris.
- Gráfica de un punto en . Haga clic en el décimo botón y seleccione Calculadora. Ingrese el número , enter, y clic izquierdo. Haga clic en el quinto botón y seleccione Transferencia de medida, transfiera el valor sobre el eje , se obtiene el punto . Haga clic en el quinto botón y seleccione Paralela. Grafique la recta paralela al eje Y que pasa por este punto, En forma similar, ingrese , transfiera este valor sobre el eje y grafique la recta paralela al eje que pasa por El punto de intersección de las rectas obtenidas es Ingrese , transfiera este valor sobre la recta paralela al eje a partir de Oculte rectas y puntos auxiliares.

El manual de ayuda indica la forma de obtener un objeto geométrico, su ecuación y realizar mediciones. Para activar la Función de ayuda interactiva para las herramientas haga clic en Ayuda, Ayuda-herramientas.

Presentamos la solución de algunos problemas propuestos en los Laboratorios 1 y 2 del curso Análisis en varias variables reales.

Plano que contiene dos vectores dados.

Dados los vectores y), construir y hallar la ecuación del plano que contiene ambos vectores. Determinar un vector unitario normal a este plano.

Solución

Graficamos el punto , hacemos clic en el tercer botón y seleccionamos Vector con origen O (origen de coordenadas). En forma similar, graficamos el vector . Hacemos clic en el cuarto botón y seleccionamos Plano. Graficamos el plano que pasa por los extremos de los vectores y O. Hacemos clic en el décimo botón y seleccionamos Coord. o ecuación. La ecuación del plano es . Sabemos que es un vector normal a este plano, Graficamos el vector y transferimos 1 sobre él.

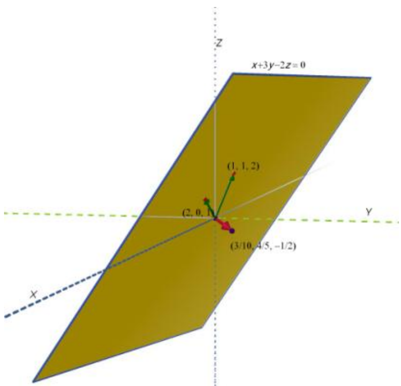


Figura 1: Plano que contiene los vectores

Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Construir la proyección ortogonal de la recta R, sobre el plano

Solución

El plano dado pasa por el punto y es un vector normal a él. Hacemos clic en el quinto botón y seleccionamos Perpendicular. Graficamos el plano P perpendicular al vector y que pasa por el punto Graficamos el punto y el vector Hacemos clic en el quinto botón y seleccionamos Paralela. Graficamos la recta paralela al vector que pasa por Hacemos clic en el segundo botón u seleccionamos Puntos de intersección. El punto de intersección de P y es Por el punto de graficamos una recta perpendicular a P. El punto de intersección de ambos es — — — Graficamos la recta que pasa por los puntos y B.

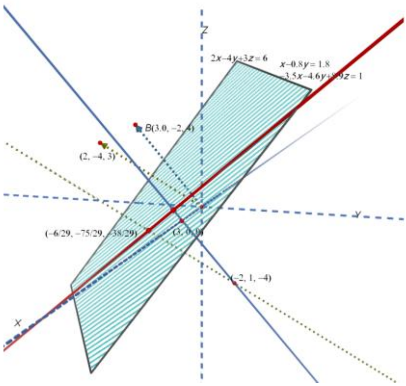


Figura 2: Proyección ortogonal de sobre

Esfera tangente a un plano.

Sea una esfera tangente al plano en el punto y centro en el plano .

a. Construir y hallar la ecuación de la esfera .
b. Trazar la circunferencia que se obtiene al cortar con un plano paralelo a distante unidades. Dar el radio y el centro de esta circunferencia.

Solución

a. Hacemos clic en el quinto botón y seleccionamos Perpendicular. Graficamos el plano P perpendicular al vector y que pasa por el punto Hacemos clic en el quinto botón y seleccionamos Recta. Graficamos la recta que pasa por A y es paralela al vector . Graficamos el plano El centro de la esfera es el punto de intersección de y el plano : Hacemos clic en el cuarto botón y seleccionamos Esfera, Graficamos la esfera centrada en y que pasa por La ecuación de esta esfera es

b. Clic en el décimo botón y seleccionamos Calculadora. Ingresamos , transferimos este valor sobre a partir de y obtenemos el punto Graficamos el plano perpendicular a y que pasa por Clic en el tercer botón y seleccionamos Curva de intersección. Esta es la circunferencia de centro y radio obtenidos haciendo clic en el décimo botón y seleccionando Coord. o ecuación y Distancia, respectivamente.

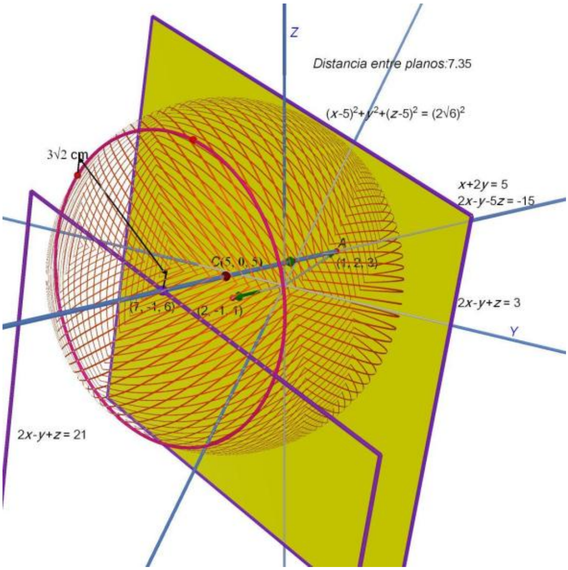


Figura 3: es tangente a en

Circunferencia que pasa por tres puntos. Esfera que pasa por cuatro puntos

a. Construir la circunferencia que pasa por los puntos Hallar el centro y radio de esta circunferencia.

b. Construir la esfera que pasa por los puntos , Hallar la ecuación de esta esfera.

Solución

a. Graficamos los puntos Graficamos el plano P que pasa por Clic en el tercer botón y seleccionamos Segmento, graficamos los segmentos y Clic en el quinto botón y seleccionamos Punto medio , obtenemos el punto medio de y El punto de intersección de las mediatrices de y es el centro de la circunferencia — — — El radio de esta circunferencia es la distancia de a

b. Hallamos el centro de la circunferencia que pasa por y el centro de la circunferencia que pasa por . El punto de intersección de las rectas perpendiculares a los planos que contienen estas circunferencias y que pasan por y es el centro de la esfera.

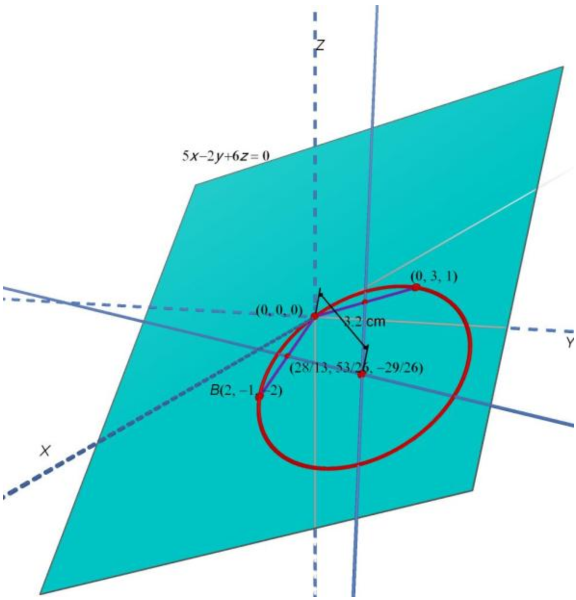


Figura 4: Circunferencia que pasa por

.

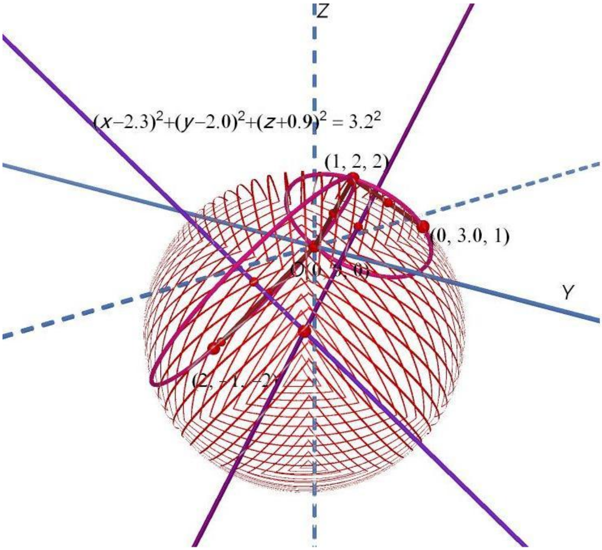


Figura 5: Esfera que pasa por

Referencias

Lehmann, Ch. (1990), Geometría Analítica, Limusa.

Stewart, J. (2000), Cálculo Multivariable (cuarta edición), Thomson Learning. http://www.cabri.com/es/cabri-3d.html***Cabri 3D***

❖❖❖

Índice de Autores

Edición y diagramación e impresión
EDITORIAL HOZLO S.R.L.
Psje. Santa Rosa 191-501. Lima-Perú
Telefax: 428-4071, 99999-2148
e-mail: guzlopster@gmail.com
Noviembre, 2012

PUCP

FACULTAD DE
EDUCACIÓN

ESCUELA DE
POSGRADO
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE
INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

CENTRO DE
INVESTIGACIONES Y SERVICIOS EDUCATIVOS

VICERRECTORADO DE
INVESTIGACIÓN
DIRECCIÓN DE GESTIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

ISBN: 978-612-45391-9-0
9 786124 539190

CABRILOG top technologies

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Embajada de Francia en el Perú

SANTILLANA

SMART Board
Premium Reseller
www.toptechnologies.com.pe