COLECCIÓN INTERTEXTOS

# MATEMÁTICAS PARA NO MATEMÁTICOS

Cecilia Gaita Iparraguirre
COORDINADORA

Elizabeth Advíncula Clemente
Elton Barrantes Requejo
José Henostroza Gamboa
Fabiola Jabo Bereche
Maritza Luna Valenzuela

ESTUDIOS GENERALES LETRAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Matemáticas para no matemáticos

COLECCIÓN INTERTEXTOS N.° 4

# MATEMÁTICAS PARA NO MATEMÁTICOS


Cecilia Gaita Iparraguirre
COORDINADORA

Elizabeth Advíncula Clemente
Elton Barrantes Requejo
José Henostroza Gamboa
Fabiola Jabo Bereche
Maritza Luna Valenzuela



ESTUDIOS
GENERALES
LETRAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

*Matemáticas para no matemáticos*
Colección Intertextos N.º 4
Cecilia Gaita Iparraguirre, coordinadora
Elizabeth Advíncula Clemente, Elton Barrantes Requejo, José Henostroza Gamboa, Fabiola Jabo Bereche, Maritza Luna Valenzuela


Av. Universitaria 1801, San Miguel
Teléfono: 626-2000
Correo electrónico: buzon18@pucp.edu.pe
http://www.pucp.edu.pe



Primera edición: agosto de 2009
500 ejemplares
Impreso en Perú - Printed in Peru

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.º 2009-09908
Registro del Proyecto Editorial en la Biblioteca Nacional del Perú N.º 11501360900563
ISBN: 978-9972-2968-3-3

ISBN 978-9972-2968-3-3
9 789972 296833

Ilustraciones: Ricardo Bernal Hiyane
Diseño y diagramación: Gisella Scheuch
Cuidado de la edición: Rocío Reátegui y Rafael Moreno
Impresión: Tarea Gráfica Educativa

# Índice

# Prólogo

Me es sumamente grato escribir el prólogo de este libro, porque conozco su origen, desde que empezó a pensarse en un curso para aquellos alumnos de Estudios Generales Letras de nuestra Universidad que no se han inscrito en una especialidad que use intensivamente las matemáticas. Se sabía lo desagradable que resultaba para un estudiante con el propósito de estudiar derecho (por ejemplo) tener que llevar un curso de matemáticas que era igual al que estudiaban quienes tenían el propósito de estudiar contabilidad; y no solo en los contenidos, sino en la forma de impartirlos. Lo grave de esta situación era que además de tener alumnos estudiando un curso por obligación y con desagrado, se contribuía a acentuar ideas y actitudes negativas hacia la matemática, que se revelaban durante los estudios y luego en la vida profesional y cotidiana. Ciertamente, una alternativa sencilla habría sido simplemente no considerar un curso de matemáticas en el plan de estudios de especialidades como derecho, literatura, filosofía, historia, comunicaciones, bibliotecología, arqueología; sin embargo, primó el criterio, felizmente compartido por matemáticos y no matemáticos vinculados con Estudios Generales Letras, de mantenerlo —haciendo las adecuaciones correspondientes— tanto en los contenidos como en la forma de impartirlo.

Soy uno de los convencidos de que la matemática debe formar parte de la cultura general de los jóvenes y ciudadanos, y con mayor razón de los profesionales de nuestra sociedad; más aún teniendo esta tales características por las que con muy justa razón la llaman «sociedad del conocimiento y la información». En una sociedad globalizada, con cambios tan rápidos en la tecnología, con avances profundos en los diversos campos del conocimiento y con tendencias a la superespecialización, considero fundamental, en un marco de interdisciplinariedad, estimular el cultivo de la matemática en los estudiantes de todas las especialidades, haciendo evidente su carácter de vínculo entre las ciencias, la tecnología y la cultura, mostrando sus aportes para modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las ciencias humanas, sociales y naturales.

Es de conocimiento bastante generalizado la relación estrecha y dinámica entre las ciencias naturales y la matemática; sin embargo, la matemática tiene también estrecha relación con las ciencias humanas. Es destacable el caso de la economía, pues los avances en teoría económica deben mucho a los modelos matemáticos en este campo y una muestra de ello son los artículos de sus revistas especializadas, en los que se exponen investigaciones con uso de matemática avanzada, de niveles más altos que los que se consideran habitualmente en los planes de estudio de un ingeniero, un físico o un licenciado en matemática pura. Pero la matemática está también muy relacionada con la psicología, el derecho, la lingüística, la sociología y otras ciencias humanas. Y esta relación no es solo porque se usa la matemática ya construida para examinar y resolver problemas en estos campos, sino que se han construido conceptos y teorías matemáticas a partir de problemas propios de las ciencias humanas y se han recibido aportes de economistas, psicólogos y otros investigadores de las ciencias humanas. Tenemos así el cálculo de probabilidades, cuyo origen «oficial» se ubica en la segunda mitad del siglo XVII, en las cartas entre Blaise Pascal y Pierre Fermat, a partir de una pregunta sobre cómo se haría el reparto justo en un juego inconcluso de dos personas lanzando monedas. Es un problema de decisión, que tiene que ver con el azar y está tan presente en el juego como en la determinación del valor justo de una prima de seguros. Ahora tenemos no solo una teoría sólida de las probabilidades, sino avances muy valiosos por su interrelación con la estadística, que a su vez ha recibido aportes del psicólogo británico Charles Spearman (1836-1945), creador del análisis factorial, a partir de reflexiones en sus investigaciones psicológicas, que después fue ampliado y mejorado por el estadístico R. A. Fisher y el psicólogo L. L. Thurstone. Es claro que hay muchos otros ejemplos de vinculación entre las ciencias humanas y las matemáticas y que esta continuará, como lo manifiesta Marc Barbut, profesor de la École des Hautes Études en Sciences Sociales, Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales, París: «[…] esta aventura de las relaciones pluriseculares entre Matemáticas y Ciencias Humanas está lejos de acabar. Aseguraría incluso que tiene ante sí un hermoso porvenir a largo plazo; los hombres siempre tienden a avanzar en su comprensión del mundo, físico o social, en el que están inmersos, y también, por tanto, en su estructuración, y esta estructura acaba siempre por expresarse en lenguaje matemático».

Hay pues razones profundas para considerar por lo menos un curso de matemáticas en los planes de estudio de las ciencias humanas; y su diseño, tanto en contenidos como en la forma de impartirlo, tiene que ser muy cuidadoso. He impartido clases en Estudios Generales Letras durante muchos semestres —especialmente para los de la especialidad de economía— y conozco casos concretos de ex alumnos brillantes de otras especialidades, que recuerdan con amargura sus últimas experiencias en la universidad estudiando un curso de matemáticas. Por eso, desde que conversamos sobre este proyecto con el doctor Fidel Tubino, decano de Estudios Generales Letras, no dudé en involucrarme con entusiasmo y sostener largas reuniones con los colegas y ex alumnos de matemáticas, especialmente, con la profesora Cecilia Gaita. Hice una propuesta que estaba casi en el otro extremo de lo que se venía haciendo, pero me pareció importante que se partiera de una «utopía» y en sucesivas reuniones con colegas —recuerdo claramente a Carlos Vera, Augusta Osorio, Elizabeth Advíncula, Miguel Gonzaga, Elton Barrantes y José Henostroza— fuimos afinando las ideas, concretando una propuesta viable y paralelamente discutiendo, discrepando alturadamente con quienes tenían otra propuesta y manifestando el convencimiento de la bondad de la nuestra. Finalmente, decidimos los contenidos del curso y pasamos a dar forma concreta a la manera de desarrollarlos. Un excelente grupo de jóvenes profesores de matemáticas dedicó generosamente su tiempo a preparar diversos capítulos en grupos pequeños y a discutir lo trabajado en reuniones que teníamos todos los grupos. Soy testigo de excepción de ese trabajo con absoluta entrega, sencillez, apertura a la crítica y gran vocación docente. El trabajo avanzaba con el convencimiento compartido —que se iba reafirmando más al hacer propuestas concretas— de que los estudiantes aprenden mejor si ellos participan activamente en las clases; si descubren que la matemática está presente en contextos de la vida diaria, y muchos de ellos relacionados con la profesión que desean adquirir; y si experimentan situaciones en las que se evidencia su capacidad de resolver problemas y entender conceptos matemáticos. Una siguiente etapa muy importante fue llevar a la práctica todo lo trabajado y esta se inició en el semestre 2007-2, con la coordinación entusiasta y la visión didáctica muy clara de la profesora Cecilia Gaita y con el apoyo franco de las autoridades de Estudios Generales Letras. Este libro recoge pues los aportes de las reflexiones y de las experiencias y estoy seguro de que es una contribución a la didáctica de la matemática en general, que se ubica en el marco de teorías y propuestas contemporáneas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Baste mencionar las numerosas publicaciones en la línea de la educación matemática realista, en particular las del Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, de la Universidad de Utrecht (Holanda).

La resolución de problemas es fundamental en la formación matemática, pero no reduciéndola a ser ejemplos prácticos de aplicación de una teoría ni a un conjunto de técnicas para adquirir rapidez en la obtención de resultados. Lo importante es resolver problemas como una forma de hacer matemática; es decir, analizando, relacionando lógicamente, conjeturando, demostrando (o rechazando) conjeturas, buscando diversas posibilidades, examinando casos particulares, pensando en generalizaciones… El presente libro brinda estas oportunidades con numerosas situaciones problemáticas en contextos cotidianos, y vinculadas con las ciencias humanas, que deben ser adecuadamente tratadas en las clases, con actividades individuales y grupales. Los profesores del curso tienen un gran apoyo en este texto, pero todavía mucho por hacer. Es fundamental que contagien a sus alumnos su pasión por la matemática, que con entusiasmo contribuyan a que ellos descubran la belleza de esta disciplina, y que con ella cultiven el amor a la verdad.

Termino expresando mi felicitación a todos los que hicieron posible esta publicación y manifestando mi deseo de que sea un punto de referencia para avanzar en publicaciones similares en nuestro país, que se nutran de la reflexión, la investigación y la crítica constructiva.

*Uldarico Malaspina Jurado*
Profesor principal, Sección Matemáticas
Pontificia Universidad Católica del Perú

# Introducción

El principio de equidad en educación propugna un acceso democrático de los estudiantes a las ideas matemáticas que les permitan comprender temas que son relevantes para ellos y que promuevan su capacidad de acción. Esto, sin olvidar la otra finalidad de la matemática, que es el desarrollo del pensamiento lógico formal, último nivel del desarrollo cognitivo. Ambos supuestos contrastan con lo que ocurre en la formación escolar: la matemática es una disciplina respetada por todos, comprendida por algunos y querida por muy pocos. Esta situación hace que; por un lado, quien sea «bueno» en ella, adquiera un estatus superior y se sienta atraído por seguir una carrera en donde se la volverá a encontrar; por otro lado, quien no consigue comprenderla, tratará de evitarla en todo momento.

El escenario descrito se extiende también a los estudios superiores, especialmente, a carreras que no tendrán la matemática como eje central. Así, muchos de los estudiantes de especialidades como derecho, periodismo, psicología, literatura, entre otras, habrán elegido su carrera justamente porque quieren evitar un nuevo encuentro con la matemática. Y a pesar de que la mayoría de los planes de estudios de las carreras mencionadas contemplan algún curso de matemáticas con una finalidad formativa, la actitud negativa hacia esta disciplina se mantiene. Probablemente, esto se deba a que la orientación que se da al curso sea similar a la que se le da en las carreras de ciencias, ingeniería o ciencias económicas y que, en el mejor de los casos, difiera solo en la profundidad de los temas tratados, pero no en la forma de abordarlos.

Ante esta realidad, este texto propone que —partiendo de situaciones cotidianas y contextos más próximos a los de las carreras mencionadas— se puede cambiar la actitud de los estudiantes hacia la matemática y hacia su capacidad matemática. Ello permitiría cubrir el vacío en la formación matemática básica antes descrito.

El libro se ha diseñado bajo las siguientes premisas: se aprende matemáticas cuando se hace matemáticas y el quehacer matemático es el producto de las interacciones de los estudiantes con el saber, a través de la resolución de problemas. Siendo coherentes con esta postura, se organizó el texto teniendo como eje central las situaciones problema. La estructura de cada capítulo es la siguiente: a) se explica por qué dicho tema ha sido incluido en el texto; b) se describen los objetivos que se persiguen en el capítulo; c) se presentan situaciones problemas que serán el contexto apropiado para generar el conocimiento matemático esperado en esa sección. Se recomienda que este momento sea un espacio de trabajo para el alumno quien, individualmente o en grupo, y con sus conocimientos previos, intentará dar solución al problema planteado; d) se realiza la definición formal de los conceptos, poniendo especial énfasis a su tratamiento en diversos tipos de registros —algebraico, gráfico, verbal y numérico— condición necesaria para comprender y aprender en matemáticas. Esta etapa surge para atender las necesidades generadas por las situación problema; e) se plantean más situaciones de refuerzo.

La selección de los temas que se abordan en el texto se realizó teniendo en cuenta las ideas principales propuestas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en el proyecto PISA, y se les asignó los siguientes nombres: Números y operaciones, Cambio y relaciones, Análisis de datos e Incertidumbre. Estas áreas resultan transversales a todas las disciplinas y permiten el desarrollo de habilidades como la comunicación matemática, el cálculo, el pensamiento inductivo y deductivo, y el pensamiento analítico en general.

Es importante mencionar que este texto es el resultado del trabajo realizado por un equipo de matemáticos que, preocupados porque las matemáticas sean vistas como una herramienta, decidieron involucrarse en la tarea de identificar contextos en los que las matemáticas resultaran una herramienta para resolver problemas en contextos extramatemáticos. Agradecemos a los profesores Miguel Gonzaga, Carlos Vera y Augusta Osorio por los aportes realizados en este trabajo, al profesor José Flores por los comentarios y sugerencias que nos hizo llegar y un reconocimiento especial al profesor Uldarico Malaspina, quien con su entusiasmo y experiencia nos acompañó en esta aventura desde el inicio.

El esfuerzo realizado por el equipo de profesores que participó en el diseño de las actividades propuestas en el texto pudo haber quedado reducido solo a experiencias de clase interesantes y originales que se hubieran perdido en el tiempo de no haberse contado con el apoyo de las autoridades de la Facultad de Estudios Generales Letras. Ellas, a través de su decano, director de estudios y secretaria académica, brindaron todas las facilidades para que este ambicioso proyecto se concretara, de modo que las experiencias trabajadas se puedan compartir con otros colegas y en otros escenarios.

*Cecilia Gaita Iparraguirre*
Profesora de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica del Perú

# Capítulo 1
# Números y operaciones

CALCULAR O MEDIR son operaciones que realizamos a diario, en nuestra casa, en la universidad o en el lugar donde nos encontremos. Calculamos cuánto tiempo nos tomará llegar a tiempo a algún examen de la universidad; elaboramos un presupuesto con nuestros gastos probables en la semana o el mes para medir nuestros gastos y no quedarnos sin dinero a mitad de camino; comprobamos si la recarga de nuestro celular es efectivamente la que la promoción que vimos prometía, o si el descuento en la compra de varias prendas de vestir que estaban en remate cumple también con lo que la publicidad que leímos ofrecía.

Pero no solo en estas necesidades cotidianas requerimos de ciertos instrumentos para calcular y medir: a lo largo de nuestra propia carrera o en nuestro desempeño profesional, nos veremos forzados a manejar algún tipo de herramienta matemática que sirva para solucionar una necesidad práctica determinada. Ya sea para elaborar un plano o una maqueta donde podamos diseñar la puesta en escena de una obra, o para elaborar un presupuesto al momento de planificar una campaña publicitaria, requerimos de ciertos conocimientos matemáticos, algunos de los cuales presentaremos en este capítulo. Así, en este primer capítulo aprenderemos a interpretar escalas (tema 1), a elaborar y analizar porcentajes y variaciones porcentuales (temas 2 y 3), así como a calcular de manera sencilla tanto el interés simple como el interés compuesto (tema 4).

Para ello, tal como se ha señalado en la introducción, cada tema comenzará con una situación o más situaciones que deben analizarse y —si es posible— resolverse, en la medida de nuestras posibilidades. En seguida, se presentarán los conceptos más importantes del tema, acompañados de ejemplos que ayuden a su comprensión. Por último, los problemas resueltos nos ayudarán a afianzar nuestro conocimiento del tema, mientras que los problemas propuestos podrán servir para evaluar nuestra comprensión de los conceptos estudiados.

## 1.1. Escalas

Si tuviésemos que representar gráficamente el Estadio Nacional, en sus dimensiones reales, posiblemente nuestra demanda de papel haría aún más grave el problema de la deforestación; salvo, claro está, que decidiéramos recurrir al papel reciclado. Pero aun en este caso, sería sumamente difícil y poco práctico manipular tal cantidad de papel, por no mencionar cómo se complicaría nuestra presentación del dibujo o plano del estadio ante un salón de clases, un grupo de inversionistas interesados en remodelarlo o cualquier otro público. De igual modo, tratar de representar en su dimensión real la estructura de un átomo, del elemento que más nos guste es prácticamente irrealizable, debido a la pequeñez de las distancias que debemos representar. En estos dos casos, es evidente la necesidad de presentar lo real, las dimensiones de estos objetos, de manera que sean fácilmente visibles y comprensibles.

Pero también podría suceder que necesitemos tener una idea exacta de cuál será el tamaño o el volumen de un objeto determinado. Pensemos en el lanzamiento de un nuevo celular. Será necesario, al planificar su producción, tener un conocimiento exacto de cuáles serán sus dimensiones para ver si puede competir con el de otras empresas en tamaño, peso, atractivo, etcétera. Al representar gráficamente el diseño del celular, será más útil tener ante nosotros el diseño del celular en sus dimensiones reales para evaluar sus posibles virtudes y defectos.

A continuación nos enfrentaremos a situaciones en las que debemos encontrar una solución a las preguntas planteadas. A partir de ellas debemos preguntarnos: ¿qué es una escala?, ¿para qué sirven las escalas?, ¿cómo ha ayudado la noción de escala a dar solución a las situaciones presentadas?

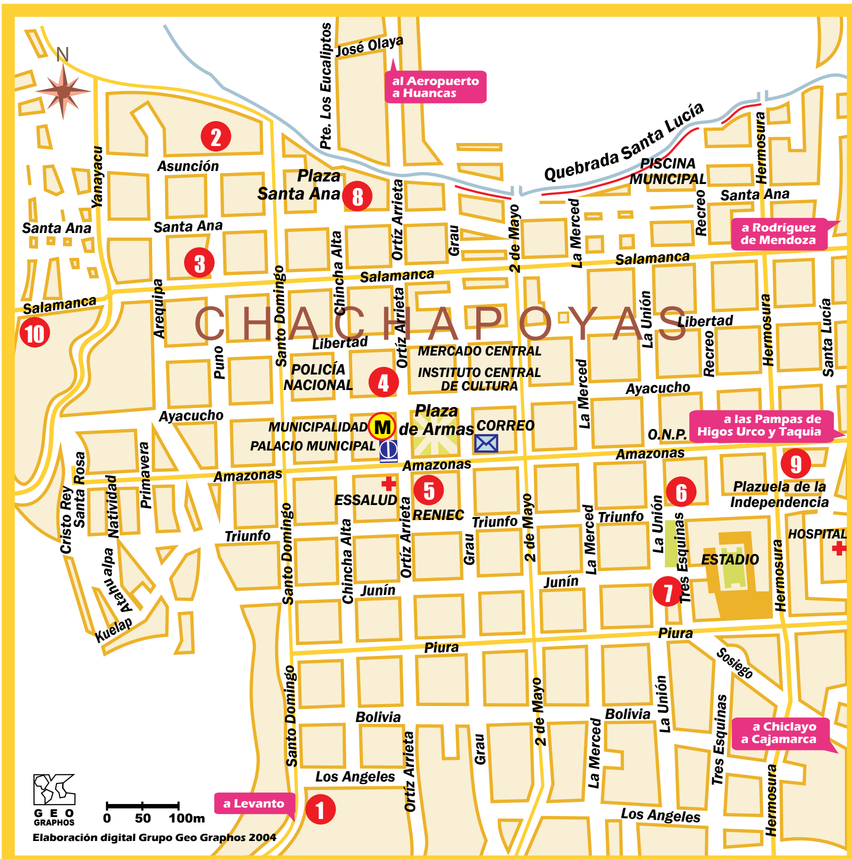
### Situación 1

En la página siguiente, observe el plano del centro de la ciudad de Chachapoyas, ubicada a 2 000 msnm, capital del departamento de Amazonas, situado en el nororiente peruano. Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la escala del plano?
b) Considerando que la distancia entre dos lugares turísticos se medirá tomando como referencia los centros de los círculos correspondientes, ¿cuál es la mínima distancia entre la capilla Virgen Asunta y la iglesia de la Buena Muerte?

c) Determine la escala del plano pequeño, si este último ha resultado ser una reducción del plano anterior.

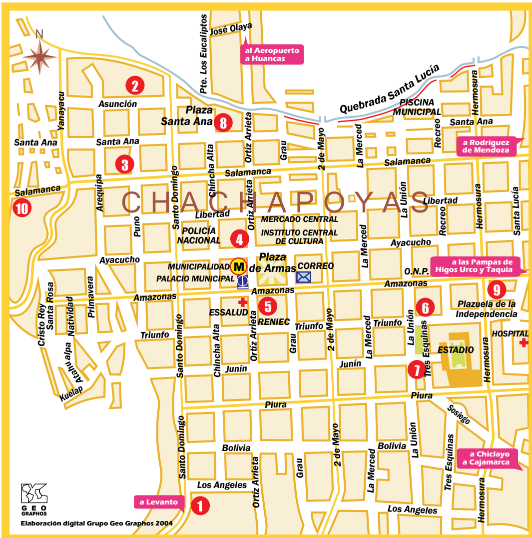
## Plano de Chachapoyas




1. Capilla Santo Domingo
2. Capilla Virgen Asunta
3. Capilla Virgen de la Natividad
4. Casa de Toribio Rodríguez de Mendoza
5. Catedral
6. Iglesia de Belén
7. Iglesia de la Buena Muerte
8. Iglesia Santa Ana
9. Iglesia Señor de Burgos
10. Pozo de Yanayacu
11. Kuélap

**Fuente:** PROMPERU. «Plano de Chachapoyas». Mapas y planos, 2008. <http://www.peru.info/planos/Chachapoyas.jpg>

## Plano de Chachapoyas




**Fuente:** PROMPERU. «Plano de Chachapoyas». Mapas y planos, 2008. <http://www.peru.info/planos/Chachapoyas.jpg>

### Situación 2

Milagros es una alumna de intercambio estudiantil que ha sido enviada a París para estudiar Sociología.


Luego de practicar algo de tenis en el estadio Roland Garrós, Milagros debe llegar a una importante reunión en el Palais des Congrès, en un lapso de media hora. Si Milagros puede pedalear en su bicicleta a una rapidez de 5 km por hora y el mapa que usa para orientarse (mostrado en la figura) tiene una escala de 1:60 000, ¿podrá llegar a tiempo a su cita?

## Solución propuesta

Como el dato proporcionado es el mapa, primero se debe calcular qué distancia debería recorrer Milagros en el mapa. Al tomar una regla con marcas hasta los mm se obtiene que la distancia en el mapa es aproximadamente de 4,9 cm.

Pero se indica que el dibujo ha sido realizado en una escala de 1:60 000, lo que significa que 1 cm en el dibujo representa 60 000 cm en la realidad; por lo tanto, Milagros debería recorrer realmente:

$$4{,}9 \text{ cm x } 60\,000 = 294\,000 \text{ cm}$$

Expresando esta distancia en km, se obtiene 2,94 km.

Como Milagros emplea 1 hora para recorrer 5 km, tardará $\frac{2{,}94}{5} = 0{,}598$ h para hacer el recorrido del estadio Roland Garrós al Palais des Congrès y, como este número es mayor que 0,5 h, entonces no llegará a tiempo a su cita.

Las situaciones 1 y 2 permitirán introducir la noción de *escala*.

> **¿Qué es la escala?**
>
> La *escala E* de un determinado dibujo es la relación entre las dimensiones en el dibujo y las dimensiones en la realidad, empleando la misma unidad de medida.
>
> Es decir, $$E = \frac{\text{dimensión en el dibujo}}{\text{dimensión en la realidad}}$$
>
> También se suele escribir empleando la siguiente notación:
>
> dimensión en el dibujo: dimensión en la realidad

Si el numerador de esta fracción es mayor que el denominador, se trata de una escala de ampliación; será de reducción en caso de que el numerador sea menor que el denominador. La escala 1:1 corresponde a un objeto dibujado en su tamaño real (escala natural).

Por ejemplo,

- Una escala 1:20 significa que 1 unidad de longitud en el dibujo representa 20 unidades de longitud en la realidad.
  Así, una longitud de 1 cm en el dibujo representa 20 cm en la realidad; 1 km en el dibujo representa 20 km en la realidad. En este caso, el dibujo es una reducción del objeto real.
- Una escala de 50:1 significa que 50 unidades de longitud en el dibujo representa 1 unidad de longitud en la realidad.

Así, una longitud de 50 cm en el dibujo representa 1 cm en la realidad; 50 km en el dibujo representa 1 km en la realidad. En este caso, el dibujo es una ampliación del objeto real.

**¿Qué es la escala estandarizada?**

Se llaman *escalas estandarizadas* a aquellas que están escritas en la forma

$$E = \frac{1}{N}$$

Cualquier escala se puede expresar con numerador 1 empleando propiedades de fracciones. De esta forma, la escala nos dice cuántas unidades en la realidad son representadas por 1 unidad en el dibujo.

Así, por ejemplo, se verifica que la escala $\frac{4}{5}$ es equivalente a la escala $\frac{1}{1,25}$ pues

$$\frac{4}{5} = \frac{\frac{4}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{1,25}.$$

Esto significa que 1 cm en el dibujo representa 1,25 cm en la realidad.

También se verifica que $\frac{120}{30} = \frac{\left(\frac{120}{120}\right)}{\left(\frac{30}{120}\right)} = \frac{1}{0,25}$, entonces la escala 120:30 significa que 1 cm en el dibujo representa 0,25 cm en la realidad.

## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 1.1

1. Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones y justifique la respuesta:
   a) Una copia a escala 25:20 reduce el tamaño del objeto representado.
   b) Un rectángulo de dimensiones 5 cm por 7 cm no puede ser copia a escala de otro rectángulo de 20 cm por 30 cm.

2. Observe el plano turístico del centro de la ciudad del Cusco que se muestra a continuación.

### Plano de Cusco


1. Catedral
2. Iglesia de la Compañía de Jesús
3. Iglesia San Blas
4. Plazuela de San Blas
5. Iglesia y Convento de La Merced
6. Iglesia y Convento de Santo Domingo
7. Museo de Santa Catalina
8. Iglesia y Convento de San Francisco
9. Palacio Arzobispal y Piedra de los 12 ángulos
10. Casa del Inca Garcilazo de la Vega
11. Iglesia Santa Clara
12. Iglesia Santa Teresa
13. Convento Las Nazarenas
14. Museo de Arte Precolombino
15. Museo Arqueológico

**Fuente:** PROMPERU. «Plano de Cusco». Mapas y planos, 2008. <http://www.peru.info/planos/Cusco.jpg>

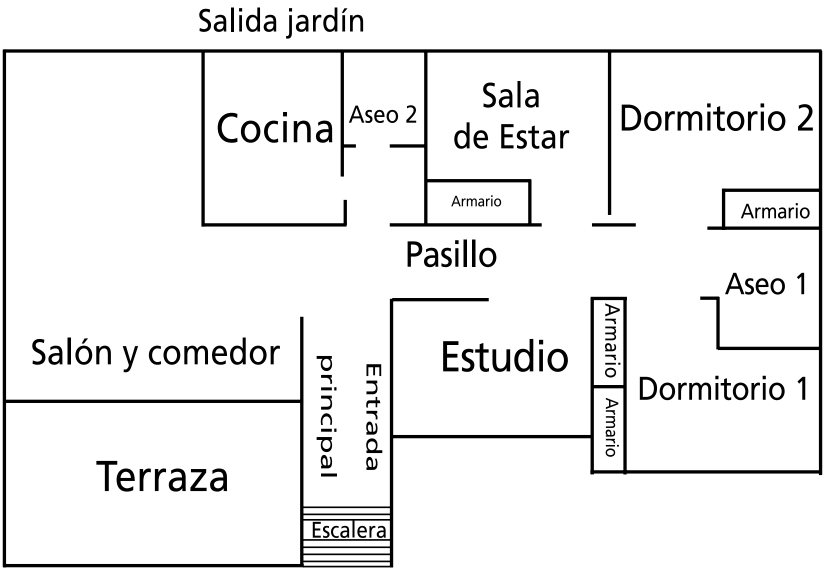
a) Halle la escala a la que ha sido dibujado.
b) Si se considera que la distancia entre dos lugares turísticos se medirá tomando como referencia los centros de los círculos de color negro correspondientes, ¿cuál será la distancia real entre el Museo Arqueológico (15) y la iglesia de Santo Domingo (6)?
c) Determine la escala del siguiente plano, el cual es una reducción del plano anterior.


Fuente: PROMPERU. «Plano de Cusco». Mapas y planos, 2008.
<http://www.peru.info/planos/Cusco.jpg>

3. Claudia está muy orgullosa de ser mayor de edad y de haber obtenido su primer DNI, el cual tiene forma rectangular (aunque con esquinas redondeadas) con medidas 8,5 cm por 5,5 cm. Claudia está tan entusiasmada que desea una copia ampliada en una hoja tamaño A4 (21 cm por 29,7 cm).
a) ¿Logrará Claudia su objetivo si emplea para la ampliación una escala de 7:2?
b) ¿Y con una escala de 3:1?

c) Halle la escala en forma estandarizada que permita obtener la copia de mayor tamaño posible que quepa en el papel de tamaño A4.

4. La familia Solís desea adquirir un nuevo departamento. Entre muchas alternativas, se les ha enviado un plano de uno de los departamentos que construirá el programa MI VIVIENDA en cierto distrito. El plano que se muestra a continuación tiene una escala 1:200.




a) ¿A cuántos centímetros en la realidad equivale 1 cm en el plano? ¿Y 10 cm en el plano, a cuántos centímetros de distancia equivalen en el departamento real?
b) Calcule el área real del departamento.
c) Si se tiene una mesa rectangular de 1 m x 2 m y cuatro sillas de 0,50 m x 0,50 m cada una, vista desde arriba. Verifique si dichos muebles pueden acomodarse en la cocina.
d) El hijo mayor de la familia Solís es ingeniero y quiere reproducir el plano del departamento a escala 1:50. ¿El tamaño de este nuevo plano será mayor o menor que el tamaño del plano mostrado?
e) ¿Podrá el ingeniero reproducir el plano a escala 1:50 en una hoja de papel tamaño A4?

5. Considerando el siguiente mapa de Alemania, responda a las preguntas propuestas a continuación. Justifique las respuestas.


**Fuente:** BLOG ALEMANIA. «Mapa de Alemania».
<http://www.blog-alemania.com/imagenes/localizacionAlemania.jpg>

a) Determine, aproximadamente, la escala empleada en esta representación. Dé la respuesta en la forma $E = \dfrac{1}{N}$, con $N$ entero.

b) Empleando el mapa, determine la distancia aproximada entre la ciudad de Berlín y la ciudad de Frankfurt, cuya ubicación se muestra en el mapa. Dé la respuesta en km.

## 1.2. Porcentajes

En el tema anterior aprendimos a interpretar escalas, y vimos que crear y utilizar una escala sirve para mostrar algo de otra manera, por ejemplo, una distancia muy grande o muy pequeña a través de una medida más fácil de manejar o representar. En cierto sentido, en este tema tenemos que estudiar otra manera de—por así decirlo—economizar la organización y presentación de la información con la que trabajamos. La herramienta que estudiaremos a continuación tiene diferentes usos. Pensemos, por ejemplo, en las campañas electorales municipales: gran cantidad de candidatos y gran cantidad de distritos en que se postulan estos candidatos. Si tuviésemos que informar al público que espera en sus casas, frente al televisor, o al radioescucha cuál es el estado de la contienda electoral, perderíamos demasiado tiempo—muy valioso tanto en la televisión como en la radio—si para cada distrito dijéramos la cantidad exacta de votos que ha recibido cada candidato. Una manera rápida y comprensible de hacer conocer a los electores el estado del proceso electoral es mostrarles la distribución de los votantes en porcentajes.

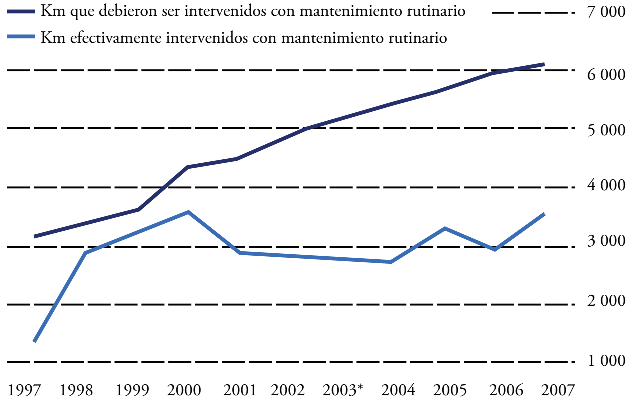
Por supuesto, al igual que con cualquier otra herramienta matemática, debemos tener cuidado al utilizarla, pues —por descuido o desatención— podemos malinterpretar la información que los porcentajes nos dan. Esto podría pasar, por ejemplo, si analizáramos el presupuesto nacional y nos concentráramos en el porcentaje de este que le corresponde al sector educación. Normalmente, se evalúa la idoneidad de la distribución viendo cuánto representa porcentualmente el monto asignado para un sector respecto del producto bruto interno (PBI). Si vemos que al sector educación le corresponde solo el 3,54% del PBI, podríamos afirmar que es un porcentaje muy bajo, y que este debería aumentar. Sin embargo, con la sola cifra 3,54% no sabemos exactamente cuánto dinero recibirá el sector educación, si será suficiente o será demasiado para cubrir sus necesidades. Es decir, no es suficiente contar con datos porcentuales si es que no tenemos una idea real de cuál es la totalidad de la que esos porcentajes son parte: no es lo mismo que—regresando al ejemplo electoral—un partido haya obtenido la mitad de los votos en Lima a que haya obtenido la mitad de los votos en Tacna, pues la población de ambas ciudades no es la misma.

Veamos, entonces, a partir de las dos siguientes situaciones, qué son los porcentajes y cómo podemos utilizarlos.

### Situación 3

El gráfico siguiente muestra el número de kilómetros que debieron intervenirse con mantenimiento rutinario y el número de kilómetros *efectivamente* intervenidos con mantenimiento rutinario, durante el período 1997-2007 en nuestro país.

a) ¿Cuántos kilómetros de carretera, aproximadamente, fueron intervenidos con mantenimiento rutinario en el 2000?
b) ¿Qué porcentaje de los kilómetros que debieron intervenirse con mantenimiento rutinario en el 2000 realmente lo fueron?
c) ¿Cuántos kilómetros de carretera, aproximadamente, no se atendieron como se esperaba en el 2000?
d) ¿Qué porcentaje de los kilómetros que debieron intervenirse con mantenimiento rutinario en el 2007 no fueron atendidos?
e) ¿En qué porcentaje se ha incrementado el número de kilómetros de carreteras no atendidas en el 2007 con respecto al 2000?




* Estimados
**Fuente:** Instituto Peruano de Economía, 2008.

La situación 3 permitirá introducir el concepto de *porcentaje*.

**¿Qué es el porcentaje?**

Dada una cantidad $C$, se llama tanto por ciento de $C$ a una o varias de las cien partes iguales en que se puede dividir $C$, es decir, uno o varios centésimos de $C$. El símbolo del tanto por ciento es %.

Así, el $r$% de $C$ designa el número dado por $r\left(\frac{C}{100}\right)$ que también puede interpretarse como $\left(\frac{r}{100}\right)C$.

Es decir, $r$% de $C$ significa que de las cien partes iguales en las que se divide $C$ se toman $r$ partes.

Para entender e interpretar mejor el significado del $r$% de $C$, se pueden considerar los siguientes casos:

- Caso 1: $r = 0$
  Es evidente que el 0% de $C$ es $0\left(\frac{C}{100}\right)$, que también puede entenderse como $\left(\frac{0}{100}\right)C$.
  En cualquier caso, el 0% de $C$ es 0.

- Caso 2: $r = 100$
  El 100% de $C$ es $100\left(\frac{C}{100}\right)$, que también puede entenderse como $\left(\frac{100}{100}\right)C$. Bajo ambas interpretaciones, el 100% de $C$ es $C$.

- Caso 3: $0 < r < 100$
  En tal situación, el $r$% de $C$ indica que de las 100 partes en que se divide $C$ se toma una cantidad $r$ menor que 100. De esta manera, el número que se obtiene $\left(\frac{r}{100}\right)C$ es menor que $C$.

- Caso 4: $r > 100$
  Este caso generaliza la noción de porcentaje. Si $r$ es mayor que 100, entonces estamos considerando una cantidad mayor a la cantidad $C$; de esta manera se obtiene $\left(\frac{r}{100}\right)C$.

  Para ilustrar estos casos, observemos los siguientes ejemplos:

a) El 20% de 15 es $\left(\frac{20}{100}\right)(15) = 3$. Notemos que es $\left(\frac{20}{100}\right)(15) = \left(\frac{1}{5}\right)15 = 3$. En general, el 20% de una cantidad equivale a un quinto de dicha cantidad.

b) El 100% de 15 es $\left(\frac{100}{100}\right)(15) = 15$.

c) El 120% de 15 es $\left(\frac{120}{100}\right)(15) = 18$.

   Puede también pensarse así:

$\left(\frac{120}{100}\right)(15) = \left(\frac{100}{100}+\frac{20}{100}\right)15 = \left(\frac{100}{100}\right)15 + \left(\frac{20}{100}\right)15 = 15 + 3 = 18$. Es decir, en general el 120% de una cantidad equivale a la cantidad más un quinto de la cantidad.

d) El 50% de $C$ es $\left(\frac{50}{100}\right)C = \frac{1}{2}C = 0{,}5C$, es decir, el 50% de $C$ es equivalente a la mitad de $C$.

e) El 25% de $C$ es $\left(\frac{25}{100}\right)C = \frac{1}{4}C = 0{,}25C$, es decir, el 25% de $C$ es equivalente a una cuarta parte de $C$.

f) El 80% de $C$ es $\left(\frac{80}{100}\right)C = \frac{4}{5}C = 0{,}8C$, es decir, el 80% de $C$ es equivalente a los cuatro quintos de $C$.

g) Otra situación donde se aplica el porcentaje es la siguiente:

Dadas las cantidades $A$ y $B$, ¿qué porcentaje es $A$ de $B$?

Si $r\%$ es el porcentaje buscado, entonces $\left(\frac{r}{100}\right)B = A$.

De donde se obtiene que $r = \left(\frac{A}{B}\right) \text{x } 100$.

Así, por ejemplo, ¿qué porcentaje es 49 de 196?

$r = \left(\frac{49}{196}\right) \text{x}\,100$. Es decir, $r = 25\%$.

Luego, 49 es el 25% de 196.

h) ¿Cuál es el costo de un producto si al agregarle el 19% de su costo se obtiene S/. 59,50?

Si $C$ el costo de dicho producto, entonces $C + 0{,}19C = 59{,}50$.
Esto equivale a $1{,}19C = 59{,}50$, de donde $C =$ S/. 50.

### Situación 4


El bocadito favorito de Carlos son las papas fritas. Las bolsas de 280 g están ahora en oferta. En la figura se muestra en qué consiste la oferta.

a) Explique cuánto pagaría en total Carlos si llevara dos de estos productos y qué quiere decir que se hizo un 20% de descuento.

b) Si la promoción del 30% es válida para tres productos o más (hasta seis, luego se pagará el precio regular), ¿cuánto pagaría Carlos si llevara ocho de estas bolsas de papitas?

c) Si se siguiera con el mismo esquema y para cuatro productos se ofreciera un descuento del 40%, ¿cuál sería el precio unitario en ese caso?

### Solución propuesta

a) La situación mostrada ilustra que el precio que deberá pagar Carlos al llevar dos de estos productos es S/. 6,32 × 2 = S/. 12,64.

El que se haya aplicado un descuento del 20% significa que sobre el precio regular que era S/. 7,90 × 2 = S/. 15,80 se le aplicó un descuento del 20%:

$$15{,}80 \times \frac{20}{100} = 3{,}16$$

Al precio regular de dos productos, S/. 15,80, se le restó el 20% de S/. 15,80, es decir, S/. 3,16, debiendo pagar finalmente:

$$\text{S/. } 15{,}80 - \text{S/. } 3{,}16 = \text{S/. } 12{,}64$$

b) Si Carlos llevara ocho de estas bolsitas, debería pagar:

$$\text{S/. } 5{,}53 \times 6 + \text{S/. } 7{,}90 \times 2 = \text{S/. } 48{,}98$$

Pregunta pendiente: ¿le convendría más comprar una oferta de 4 productos con el 30% de descuento y luego pasar por otra caja haciendo uso de la misma promoción?

c) Si se compraran cuatro productos al precio regular de S/. 7,90 cada uno, se gastaría

$$S/.\ 7{,}90 \times 4 = S/.\ 31{,}6.$$

Pero como se propone hacer un descuento del 40%,

$$31{,}60 \times \frac{40}{100} = 12{,}64$$

se debería pagar:

$$S/.\ 31{,}6 - S/.\ 12{,}64 = S/.\ 18{,}96$$

De esta manera, el precio unitario sería S/. 4,74.

## 1.3. Variación porcentual

Este tema es una continuación del tema anterior, los porcentajes. Aquí aprenderemos a interpretar y calcular el cambio en los porcentajes que representan algún tipo de población, ya sea los electores adscritos a un partido político, la cantidad de consumidores de un producto alimenticio, o el número de hinchas de un equipo de fútbol que pudieran haber migrado a algún otro partido, cambiado de hábitos alimenticios, o comenzado a alentar a otro equipo. Si quisiéramos medir cuánto ha cambiado, por ejemplo, el número de pobladores peruanos que son apristas, en un período de tiempo que nos interese de modo especial, podríamos comparar la distribución porcentual de ciudadanos peruanos que se declararon apristas en 1985, cuando comenzaba el primer gobierno del presidente García, y cuántos en 1990, cuando ya había terminado su mandato. Podrían presentarse casos diversos: por ejemplo, podríamos ver que el porcentaje sigue siendo el mismo (digamos, 30%), aunque deberíamos ver si la población que se ha tomado en cuenta para elaborar la información que nosotros consultamos ha variado o no de 1985 a 1990. Por otro lado, podríamos tener distintos porcentajes, aunque no haya cambiado la población que estudiamos (que en 1985 haya habido 75% de apristas y en 1990 tan solo 1%); o, por último, que hayan cambiado tanto los porcentajes como la población estudiada. ¿De qué manera podemos estudiar estos tres casos e interpretar y expresar correctamente cuál ha sido el cambio porcentual de simpatizantes o *compañeros* apristas?

En este caso, como en muchos otros, es importante leer e interpretar correctamente los gráficos que muestran la información expresada en porcentajes, pues muchas veces las empresas o personas particulares encargadas de elaborar los gráficos no proporcionan información fidedigna.

Las dos situaciones que presentamos a continuación nos servirán para identificar las herramientas que aprenderemos para interpretar correctamente la información porcentual y su variación.

### Situación 5

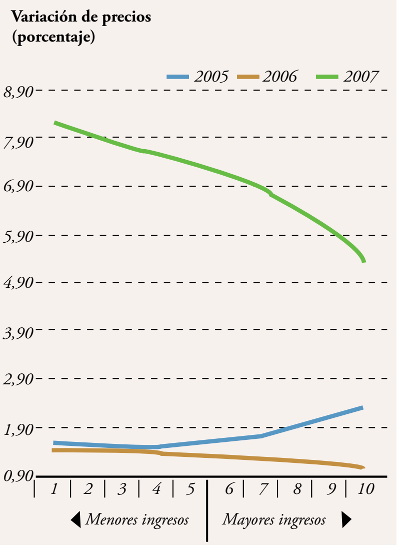
Durante el 2005 y el 2006, la inflación fue prácticamente igual para todos los niveles de ingreso. La situación cambió en el 2007, cuando los precios de los alimentos (47% de la canasta) subieron e impulsaron el aumento de la inflación, pero sobre todo de la inflación que afecta a los más pobres.

a) Considerando la curva correspondiente al 2007 (curva superior), ¿cuál fue aproximadamente la inflación para una persona de menor ingreso (nivel 1) y para una persona de mayor ingreso (nivel 10)? Explique en sus propias palabras qué quiere decir esta diferencia.

b) ¿Cómo se leería el gráfico correspondiente al 2006 (curva inferior), teniendo en cuenta los distintos niveles de ingresos?

c) ¿En cuántos puntos porcentuales varió la inflación para una persona del nivel 1 entre el 2005 y el 2006?

d) ¿Cuál fue aproximadamente la variación porcentual de la inflación para una persona del nivel 1 entre el 2005 y el 2006? ¿Cómo se interpreta el signo?

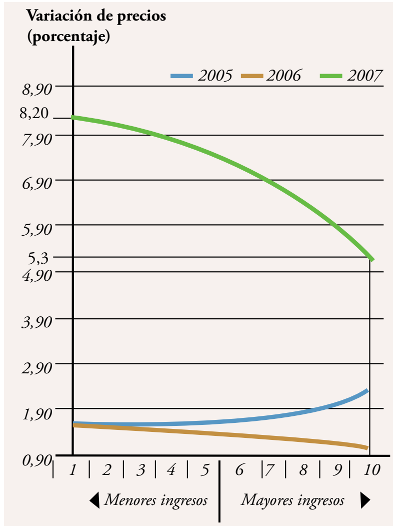



**Fuente:** Encuesta Nacional de Hogares / BCR.

### Solución propuesta

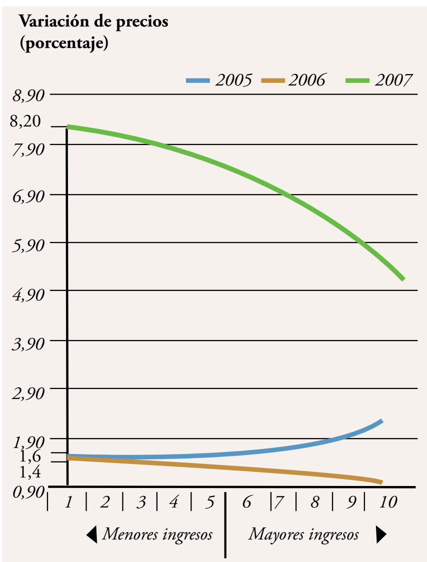
Como se observa en el gráfico mostrado, los valores numéricos en el eje vertical corresponden a la inflación (dada en porcentaje). Para resolver las preguntas planteadas en este problema será necesario hallar valores aproximados en el eje vertical del gráfico.

a) Por ejemplo, si se considera que para una persona del nivel 1 la inflación durante el 2007 ascendió a 8,20% y para una persona del nivel 10 fue de 5,3%, entonces esto significaría que las personas de menor nivel económico experimentaron una mayor alza en los productos de su canasta básica, pues 8,20% > 5,3%.




b) El gráfico correspondiente a la inflación durante el 2006 muestra, en cambio, que si bien el nivel 10 experimentó también una menor inflación que el nivel 1, la diferencia entre estos valores no fue tan marcada como en el 2007.

c) Para determinar la variación en puntos porcentuales para una persona del nivel 1 entre el 2005 y el 2006 será necesario hallar valores aproximados en el eje vertical del gráfico. Por ejemplo, si se asumen los valores mostrados en el gráfico: la inflación en el 2005 para una persona del nivel 1 fue de 1,6 % y luego de un año fue de 1,4% . Entonces hubo una disminución de 0,2 puntos porcentuales.




d) La variación porcentual se calculará asumiendo que 1,6 era el 100% y averiguando cuánto representa 1,4 – 1,6 de este valor; es decir, calculando:

$$\left(\frac{1,4 - 1,6}{1,6}\right) \times 100\ \% = -12,5\%$$

El signo negativo indica que la inflación decreció en un 12,5% respecto al año anterior.

La situación 5 ha servido para introducir el término *variación porcentual*.

**¿Qué es la variación porcentual?**

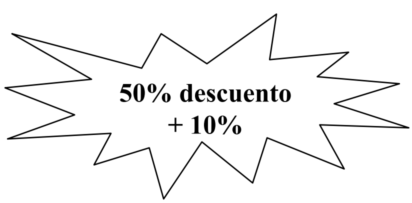
Dadas dos cantidades $V_i$ y $V_f$, si se pide determinar la variación porcentual, es decir, cuánto varió $V_f$ respecto a $V_i$, se debe realizar la siguiente operación:

$$\text{variación porcentual} = \frac{V_f - V_i}{V_i} \text{ x } 100\%$$

Si $V_f - V_i > 0$, la variación será positiva y se hablará de un incremento; mientras que si
Si $V_f - V_i < 0$, entonces la variación será negativa, y se hablará de una disminución.
Nótese que la variación porcentual no tiene unidades, se expresa en porcentaje.
Cuando la información está dada en porcentajes, esto es, $V_i$ y $V_f$ en porcentajes, y se da como respuesta la diferencia $V_f - V_i$, entonces se puede afirmar que el valor inicial varió en $V_f - V_i$ puntos porcentuales.

## Más situaciones problema para practicar
## Problemas 1.2 y 1.3

1. En esta última semana, Claudia aumentó su nota de 09 a 13 y Vanessa aumentó su nota de 15 a 19. Considerando los incrementos respecto a la nota inicial, ¿cuál de las dos tuvo una mejora más significativa en su aprendizaje durante esta última semana?
2. Una tienda ofrece dos alternativas de descuento por un modelo de pantalón:
   **Alternativa A:** el 60% de descuento
   **Alternativa B:** el 50% + el 20% de descuento sobre el nuevo precio
   ¿Cuál de las dos alternativas es la más conveniente?
3. Una oferta que ofrecen muchas conocidas tiendas consiste en un doble descuento, por ejemplo:



Esta promoción consiste en descontar primero el 50% al precio regular y luego descontar el 10% del nuevo precio.

a) Según la explicación anterior, ¿es lo mismo el 50% + 10% que el 10% + 50%?

b) Si un pantalón cuesta S/. 80, ¿cuánto hay que pagar luego de aplicar la oferta?

c) Luego de aplicar esta oferta, pagué S/. 666 por una filmadora. ¿Cuánto costaba esta originalmente?

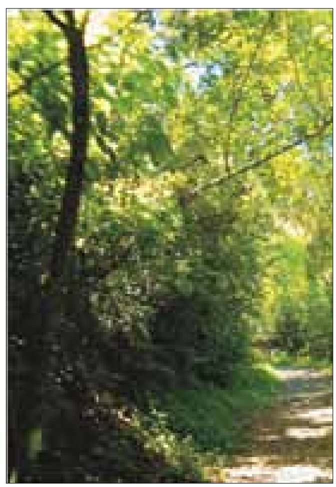
4.

| | |
|---|---|
| **SUBTOTAL** | ________ |
| **IGV (19%)** | ________ |
| **TOTAL** | **S/. 760,00** |

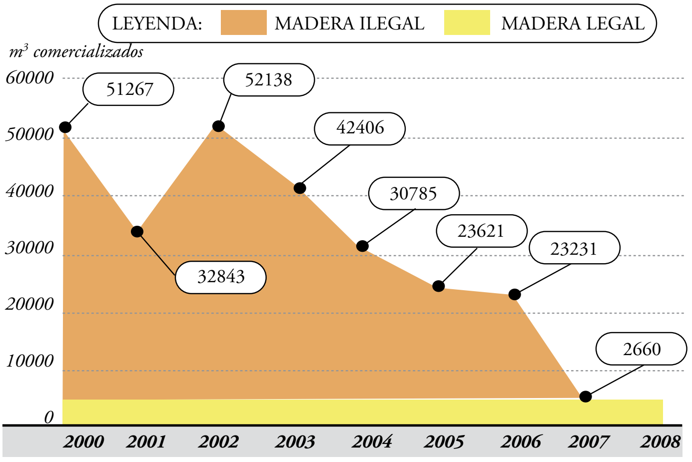
Se muestra parte de una factura. Complete los datos que faltan basándose en la información mostrada.

5. De exportar más de 50 000 m$^3$ de caoba en el 2000, se pasó a exportar 23 000 m$^3$ seis años después.

Se trata de una caída predecible pues, debido a la depredación de la especie, cada vez es más difícil hallar un árbol en pie en la selva peruana.



A partir de la información que presenta el gráfico de la página 37, responda a las siguientes preguntas.




**Fuente:** Diario *El Comercio*, n.º 86322, año 168, 23 de febrero de 2008.

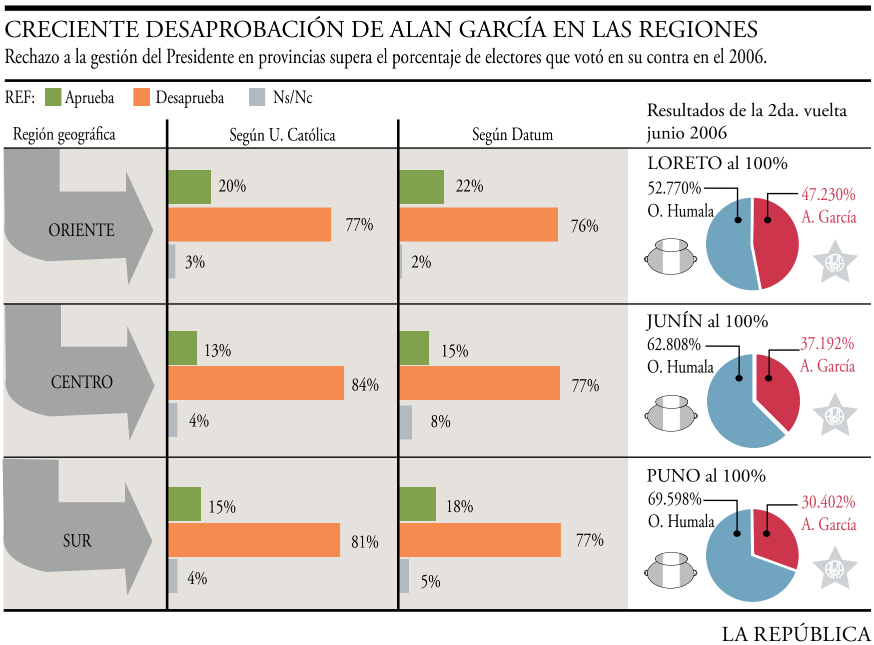
a) ¿Cuál fue la variación entre las exportaciones del 2001 y el 2002?
b) ¿En qué porcentaje aumentó la exportación entre el 2001 y el 2002?
c) ¿Cuál fue la variación entre las exportaciones del 2002 y el 2006?
d) ¿En qué porcentaje varió la exportación entre el 2002 y el 2006?
e) ¿Qué podría decir sobre las exportaciones en el 2008?

6. Ricardo es un agente de ventas y usualmente se comunica con sus clientes por medio de telefonía celular. La compañía telefónica a la que está suscrito le está ofreciendo bonos adicionales si se realizan recargas virtuales, tal como se muestra en la siguiente figura.


a) Explique cuánto dinero adicional recibiría en total Ricardo si comprara dos recargas, cada una de S/. 50.
b) ¿Qué sería más beneficioso para Ricardo, comprar dos recargas de S/. 35 y una de S/. 50, o comprar una sola recarga de S/. 120?

c) Si el bono adicional en el teléfono celular de Ricardo después de una recarga asciende a S/. 33, ¿de cuánto fue la recarga de Ricardo?

7. El siguiente gráfico muestra la variación en el nivel de aprobación de la gestión del presidente Alan García en diversas regiones del Perú algunos meses después de iniciada su gestión. También se compara el porcentaje de electores que votó en su contra en las últimas elecciones presidenciales.




**Fuente:** U. Católica, Datum y ONPE.

a) Si la encuesta que realizó la Universidad Católica en el centro del país se aplicó a un total de 200 personas, ¿cuántas manifestaron su aprobación a la gestión presidencial?

b) Si se toman como referencia los resultados de la segunda vuelta en el departamento de Loreto y se compara el porcentaje de electores que no votó por Alan García en ese departamento con el porcentaje de los que desaprueban su gestión en el oriente, ¿en cuántos puntos porcentuales se ha incrementado el rechazo al presidente García, según la encuesta de la Universidad Católica?

c) Tomando en cuenta el enunciado de la pregunta b), determine en qué porcentaje (variación porcentual) ha variado el rechazo al presidente García.
d) Si se toman como referencia los resultados de la segunda vuelta en el departamento de Puno y se compara el porcentaje de electores que votó por Alan García en ese departamento con el porcentaje de los que aprueban su gestión en el sur del país, según Datum, ¿en cuántos puntos porcentuales ha disminuido la aprobación del presidente García?
e) Tomando en cuenta el enunciado de la pregunta d), determine en qué porcentaje (variación porcentual) ha variado la aprobación del presidente García.
f) ¿En cuál de las tres regiones (oriente, centro o sur) se podría decir que la aprobación del presidente García ha disminuido menos respecto a la segunda vuelta? ¿Por qué?
g) ¿En cuál de las tres regiones (oriente, centro o sur) se podría decir que el rechazo al presidente García se ha incrementado más respecto a la segunda vuelta? ¿Por qué?

## 1.4. Interés simple y compuesto

Ya sea cuando vemos publicidad de alguna tarjeta de crédito que ofrece una tasa preferencial de interés, o cuando deseamos obtener un préstamo bancario para comprar un carro o una casa (préstamo hipotecario), nos enfrentamos con la urgencia de elegir la tarjeta o entidad bancaria que ofrezca la tasa de interés que sea más conveniente para nuestra realidad económica. Saber diferenciar una tasa de interés simple de una compuesta es también importante, si queremos saber cuánto serán las cuotas que deberemos pagar por el préstamo, aunque también nos pueda ser útil para saber cuánto debemos recibir de intereses por nuestros ahorros guardados en el banco. Por supuesto, debemos notar siempre otros gastos en los que el banco hace incurrir a los clientes, como cuotas de afiliación, portes, comisiones, costo de mantenimiento, etcétera. De cualquier modo, en ambas situaciones, tanto cuando debemos entregar un dinero (pago del préstamo) como cuando recibimos un pago (los intereses provenientes de nuestros ahorros) necesitamos calcular con precisión cuánto dinero habremos de entregar o recibir.

Trate de resolver las situaciones que presentamos a continuación, y analice cómo intervienen los conceptos de interés simple y compuesto: ¿en qué se diferencian ambas nociones?

**Situación 6**

Octavio ha decidido solicitar un préstamo al banco Mi Perú para amortizar el pago de las deudas que lo están abrumando. Para ello firma un contrato con el banco en los siguientes términos:


- El banco otorgará a Octavio S/. 10 224 en calidad de préstamo.
- El banco impone una tasa de interés simple anual de 8,18%.
- Octavio pagará al banco una cuota fija mensual por los siguientes 24 meses, de modo que pueda cumplir con cancelar el crédito solicitado, incluidos los intereses.

a) ¿Cuál es el monto total que debe pagar Octavio al final de los dos años?

b) ¿Cuál será el monto total correspondiente al interés que debe pagar Octavio al final de los dos años? ¿A qué porcentaje del monto total pagado equivale?

c) ¿Cuál es el valor de la cuota mensual que debe pagar Octavio?

d) Suponga ahora que la tasa de interés que cobra el banco es compuesta anualmente. ¿Cuál es el monto total que debe pagar Octavio al cabo de los dos años? Si Octavio prefiere pagar ese monto en cuotas mensuales iguales, ¿cuál sería el valor de la cuota mensual?

La situación 6 ha servido para introducir el tema de *interés simple* e *interés compuesto.*

**¿Qué es el interés simple?**

Es el sistema en el cual la tasa de interés $r$ se aplica en cada período al capital inicial $P_0$. Es decir, el valor $P(t)$ del capital luego de $t$ períodos está dado por:

$$P(t) = P_0(1 + rt)$$

Nótese que $r$, la tasa de interés, se ingresa en la fórmula de la siguiente manera: si se trata de una tasa de 5%, entonces se reemplaza $r$ por 0,05.

**¿Qué es el interés compuesto?**

Es el sistema en el cual la tasa de interés $r$ se aplica en cada período al capital acumulado en el período anterior. Así, si el capital inicial es $P_0$, el valor $P(t)$ del capital luego de $t$ períodos está dado por:

$$P(t) = P_0(1 + r)^t$$

## Situación 7

Don Miguel es un próspero negociante y don José es un profesional que actualmente tiene dos hijas que acaban de ingresar a la Universidad Católica, por lo que se verá obligado a solicitar un préstamo a su amigo don Miguel. A pesar de que son grandes amigos —como negocios son negocios—, el prestamista pide a don José firmar un documento donde se comprometerán a lo siguiente:

- Don Miguel prestará al inicio de este año S/. 10 000 a don José.
- Al finalizar cada año, se contabilizarán intereses correspondientes al 8% de los S/. 10 000 prestados.
- Cuando don José decida cancelar su deuda, deberá pagar a don Miguel los S/. 10 000 prestados, además de los intereses acumulados hasta esa fecha.

a) ¿Cuál será el interés generado por el capital prestado luego de un año?
b) ¿Y luego del segundo año? ¿Y de cada año en general?
c) ¿Cuánto deberá pagar en total don José luego de cinco años, si en ese momento decide cancelar toda su deuda?
d) Suponiendo que el préstamo finaliza luego de *t* años, exprese en términos de *t* cuánto habrá pagado en total don José a don Miguel por este concepto.

## Solución propuesta

a) Al finalizar el primer año, se habrá generado un interés del 8% de S/. 10 000; es decir, $\frac{8}{100} \times 10\,000 =$ S/. 800.

b) Como en las condiciones del documento se indica que cada año la tasa de interés del 8% se aplicará sobre los S/. 10 000, el interés generado luego del segundo año y luego de cualquier número de años será de S/. 800.

c) Don José deberá pagar luego de cinco años el capital que recibió prestado más los intereses; es decir,

$$10\,000 + (5 \times 800) = 14\,000 \text{ soles}$$

d) Luego de *t* años don José deberá pagar:

$$10\,000 + t \times 800 = 10\,000 + 800t \text{ soles}$$

## Situación 8


Consideremos el contexto de la situación 7, pero supongamos que el documento que firman don Miguel y don Pedro tiene las siguientes condiciones:

- Don Miguel prestará al inicio de este año S/. 10 000 a don José.
- Al finalizar cada año se contabilizarán intereses correspondientes al 8% del nuevo monto:
  monto inicial + intereses.
- Cuando don José decida cancelar su deuda, deberá pagar a don Miguel los S/. 10 000 prestados, además de los intereses acumulados hasta esa fecha.

a) ¿Cuál será el interés generado por el capital prestado luego de un año? ¿Cuánto se deberá pagar en total si se desea cancelar la deuda al finalizar el primer año?
b) ¿Y si se desea cancelar la deuda al finalizar el segundo año?
c) ¿Cuánto deberá pagar en total don José luego de cinco años, si en ese momento decide cancelar toda su deuda?
d) Suponiendo que el préstamo finalizará luego de *t* años, exprese en términos de *t* cuánto habrá pagado en total don José a don Miguel por concepto del préstamo.
e) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la deuda total ascienda a S/. 1 000 000?

## Solución propuesta

a) Al finalizar el primer año, se habrá generado un interés del 8% de S/. 10 000; es decir, $\frac{8}{100}$ x 10 000 = S/. 800.

   Y se deberá pagar 10 000 + 800 = 10 800 soles.

   O también:
   10 000 + 0,08(10 000)
   10 000 (1 + 0,08) soles ...(1)

b) Como en las condiciones del documento se indica que cada año el interés del 8% se aplicará sobre el nuevo monto: monto inicial + intereses, entonces se debe realizar la siguiente operación para determinar el interés generado al segundo año:

$$0{,}08(10\ 000 + 800) = 864 \text{ soles}$$

En total, habrá que pagar 10 000 + 800 + 864 = 11 664 soles.

Podemos escribir lo anterior de la siguiente manera:

$$10\,000 + 0{,}08(10\,000) + 0{,}08(10\,000 + 0{,}08(10\,000))$$
$$= 10\,000 + 0{,}08(10\,000) + 0{,}08(10\,000)(1 + 0{,}08)$$
$$= 10\,000[1 + 0{,}08 + 0{,}08(1 + 0{,}08)]$$
$$= 10\,000[(1 + 0{,}08)(1 + 0{,}08)]$$
$$= 10\,000(1 + 0{,}08)^2 \qquad \ldots(2)$$
$$= 11\,664 \text{ soles}$$

c) De esta manera, comparando (1) y (2) se puede concluir que después de cinco años se deberá pagar:

$$10\,000(1+0{,}08)^5 = 14\,693{,}28 \text{ soles}$$

d) Luego de *t* años don José deberá pagar

$$10\,000(1 + 0{,}08)^t \text{ soles}$$

e) Se debe cumplir que:

$$10\,000(1 + 0{,}08)^t = 1\,000\,000$$
$$(1{,}08)^t = 100$$

Se debe hacer uso de la función logaritmo, ya que ella cumple la siguiente propiedad:

$$\log a^x = x(\log a).$$

Luego,

$$t \log(1{,}08) = \log(100)$$

$$t = \frac{\log(100)}{\log(1{,}08)} = 59{,}84 \text{ años}$$

El cálculo de los valores del numerador y denominador se realizan con una calculadora y se obtiene que, aproximadamente, después de sesenta años la deuda ascenderá a 1 000 000 de soles

## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 1.4

1. Se invierte una suma de $ 2 000 a una tasa de interés compuesto anual de 0,04. ¿Cuál será el capital acumulado luego de seis años?
2. Se invirtió una suma de $ 2 000 a una tasa de interés compuesto anual de $r$. ¿Cuál fue la tasa de interés que se aplicó si luego de seis años se tenía un capital acumulado de $ 2 711?
3. Hildara pide un préstamo de $ 12 000 que debe cancelar dentro de tres meses, con un interés simple mensual de 8%.
   a) ¿Qué cantidad deberá pagar Hildara al finalizar los tres meses?
   b) Si Hildara firma un contrato que en una de sus cláusulas establece que, en caso de mora, se cobrará el 1% de interés simple diario sobre la cantidad que debía devolver por el tiempo que exceda al plazo fijado, y paga el total del préstamo un día después de los tres meses, ¿cuál sería el monto de la mora? ¿Cuánto pagaría en total?
   c) Si la tasa de interés de 8% simple mensual se modifica por una tasa de interés compuesto mensual, responda nuevamente a la parte a).
4. Se pide un préstamo de $ 2 000 con una tasa de interés simple anual de 6%.
   a) Si el préstamo es por cuatro años, ¿cuánto se tendrá que pagar en total?
   b) ¿Cuántos años como máximo se puede mantener el préstamo para que la deuda total no exceda los $ 3 000?
5. Actualmente en Lima hay un *boom* inmobiliario. Cientos de casas se destruyen para construir, en su lugar, edificios. Pero ¿qué tan accesibles son estos departamentos o condominios? El mercado inmobiliario se mueve por dos variables: la estabilidad económica y las tasas de interés hipotecario. En el Perú, los intereses de préstamos hipotecarios han bajado de 14% hace solo tres años, a 8 – 8,5% hoy en día; por lo que cada vez más personas tienen acceso a este tipo de crédito.

   Por ejemplo, la familia Ramírez se acercó a una caja municipal con la intención de solicitar un crédito hipotecario de \$ 32 000 para la compra de un departamento y se lo ofrecieron bajo las siguientes condiciones:

- Pago en cuotas mensuales iguales durante cinco años.
- Tasa de interés simple de 8,5% anual.

a) ¿Cuál será el interés que deberá abonar la familia Ramírez en total durante los cinco años?
b) ¿Cuál será el monto total que deberá pagar la familia Ramírez en los cinco años?
c) ¿Cuál es la cuota mensual que deberá pagar la familia Ramírez?
d) Si la familia Ramírez pagó \$ 36 480, ¿qué tiempo transcurrió?
e) Suponiendo que el préstamo finalizará luego de $t$ años, exprese en términos de $t$ cuánto deberá haber pagado la familia Ramírez a la Caja Municipal del Callao.

6. La señora Julia abre una cuenta de ahorros en una entidad bancaria haciendo un depósito de \$ 2 000. Esta cuenta produce una tasa de interés compuesto anual de 7%.
   a) ¿Cuál será el monto acumulado en la cuenta de la señora Julia al finalizar el primer año?
   b) ¿Cuál será el monto acumulado al finalizar el tercer año?
   c) En general, ¿cuál será el monto acumulado en la cuenta de la señora Julia luego de $t$ años?
   d) Estime en cuánto tiempo el monto acumulado será el triple del depósito original.
7. Un banco ofrece un interés compuesto del 8% anual. Se depositan en dicho banco \$ 12 000.
   a) ¿Cuánto se habrá acumulado en la cuenta luego de cuatro años?
   b) ¿Y luego de cinco años?
   c) ¿En cuántos dólares habrá aumentado el monto acumulado entre el cuarto y quinto año?
   d) ¿Cuál es la variación porcentual del monto acumulado entre el cuarto y quinto año?
   e) Con ayuda de una calculadora, determine entre qué años el monto acumulado será el doble del monto inicial.

# Capítulo 2
# Cambio y relaciones

El ser humano ha intentado desde siempre comprender el fenómeno del cambio: ¿cómo así una cosa determinada, una semilla, por ejemplo, llega a convertirse en un frondoso árbol lleno de vida? También podríamos preguntarnos cómo explicar el movimiento de un cuerpo en el espacio, o cómo ha evolucionado en los últimos años la preferencia del público frente a un producto cuya campaña publicitaria deseamos planificar. Podríamos multiplicar los ejemplos, pero lo que seguiría siendo común a ellos es el firme propósito de explicar y, de igual manera, *medir* cómo se lleva a cabo el proceso de cambio, qué principio gobierna que algo sufra algún tipo de modificación (ya sea un cambio de lugar, color, peso, etcétera). Para poder medir establecemos relaciones entre dos o más fenómenos, y de acuerdo con nuestras necesidades atribuimos a esta relación algún tipo de correlato o «representante» matemático (una fórmula, escrita en una notación especial, ya no solamente en el lenguaje coloquial que nos acompaña a diario). En este capítulo, estudiaremos cierto tipo de relaciones a las que se les llama «funciones». Qué es una función es algo que, por el momento, no definiremos. La definición técnica se encuentra en el cuerpo de este capítulo. Asimismo, para comprender qué es una función, se explicarán más adelante las nociones de «dominio», «rango», entre otras. Tras estas definiciones preliminares analizaremos algunos tipos de funciones elementales bastante utilizadas en diferentes disciplinas como: función constante, lineal, cuadrática, exponencial, etcétera. Por último, se estudiarán las gráficas de las funciones antes mencionadas, con el fin de que el alumno —a partir de las representaciones gráficas de las funciones— infiera información sobre las variables que está estudiando.

## 2.1. Noción de función. Dominio y rango

Hemos mencionado en la introducción a este capítulo que las funciones son un tipo particular o especial de relaciones. ¿Qué las distingue? Aristóteles, en un libro titulado *Ética a Nicómaco*, sostiene que en las competiciones o juegos deportivos no ganan los más bellos o los mejor preparados, sino los que compiten. A primera vista, parecería que el viejo filósofo griego no ha dicho nada interesante o nada que no sepamos. Analicemos lo dicho por Aristóteles, y veamos si de algo sirve para explicar el tema que aquí nos interesa. Pensemos en un juego cualquiera, como una carrera de 100 metros planos. ¿Cómo se aplica lo dicho por Aristóteles a este contexto? En primer lugar, no todos podríamos ser aceptados como corredores en una carrera de 100 metros planos en las Olimpiadas: hay ciertos requisitos que debemos cumplir para incorporarnos a los juegos y, particularmente, para incorporarnos al grupo de atletas que pueden competir. Esto establece una separación entre la totalidad de pobladores de un país, y aquellos que son aptos para competir. Solo a estos últimos les asignaremos, tras la competencia, un lugar en la tabla de calificación. Puede ser que dos o más atletas empaten en obtener el primer o el segundo lugar y no habrá ningún problema en aceptar el empate en un lugar como válido. Lo que es del todo descabellado es pensar que un mismo atleta, en la misma competencia, pueda obtener el tercer y el décimo lugar a la vez. En resumen: del universo de personas no todas se encuentran habilitadas para participar del juego; solo un grupo de personas podrán competir, y es a ellas a quienes distribuiremos, de acuerdo con lo que establece el reglamento, los lugares en la clasificación del juego. ¿De qué nos sirve este ejemplo para entender qué es una función? Aquello que define una función es que siempre asigna a un elemento del conjunto de partida (el «dominio» de la función, el grupo de atletas que van a competir) una sola imagen (el «rango» de la función, el lugar que ocupa el deportista en el cuadro de calificaciones tras la competencia). Colocamos el ejemplo que menciona Aristóteles para señalar otro rasgo de la función: que el conjunto de partida (en este caso, los atletas que compiten) muchas veces no coincide con la totalidad de individuos (los ciudadanos de un país determinado) a los que podría atribuírsele una imagen, un valor en el rango de la función. ¿Qué sucedería con la relación entre padres e hijos? ¿Podría representarse como una función?

A continuación se presentan situaciones problemas que usted debe tratar de resolver. Luego veremos las definiciones formales de función, dominio y rango.

**Situación 1**

En cada uno de los siguientes casos,

**Caso 1:** los alumnos matriculados en un horario determinado de un curso de matemáticas y sus respectivas cuentas de correo electrónico.

**Caso 2:** las regiones del Perú y el número de sus habitantes.

a) Analice si la relación entre las variables indicadas corresponde a una función. Explique en qué consiste dicha relación.

b) En caso de tratarse de una función,
   - señale cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente;
   - dé como ejemplo un elemento del dominio y su respectiva imagen en el rango.

### Situación 2

Los seres humanos nos comunicamos emitiendo y captando múltiples mensajes. Todo acto comunicativo es el intercambio de información o mensajes a través de un medio entre un emisor y un receptor, quienes comparten un código, de manera que el mensaje es codificado por el emisor y decodificado por el receptor. A veces para comunicarnos nos valemos de ciertas señales que tienen por finalidad producir una acción de manera directa e inmediata sobre el receptor del mensaje.

Por ejemplo, la señal mostrada significa silencio.

| **Señal** | **Significado** |
| --- | --- |
|  | Silencio<br>............................................ |

Así, cuando en las calles vemos una señal, ella nos indica que debemos prestar atención a un hecho en un momento determinado o modificar una actividad prevista. Las señales deben respetarse ya que son de gran ayuda. A continuación presentamos dos columnas. En la primera columna, mostramos algunas señales frecuentemente vistas en lugares públicos que nos indican qué debemos hacer o no hacer en ciertas acciones. Coloque el significado de cada una de ellas en la segunda columna.

| | |
| --- | --- |
|  | ............................................ |

..............................................

..............................................

..............................................

..............................................

Si cada señal es el valor de una variable y lo que significa es el valor de otra variable, responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál sería la variable independiente y cuál la variable dependiente?

Considerando las señales anteriores, responda a las siguientes preguntas:

b) ¿Cuál es el conjunto de valores que toma la variable independiente y cuál el que toma la variable dependiente?
c) ¿Una misma señal puede tener más de un significado? ¿Sería conveniente que una misma señal tenga dos significados distintos?

## Solución propuesta

a) En realidad, la variable independiente podría ser la representación gráfica de las señales (o la señal propiamente dicha) y la variable dependiente el significado de cada señal. Pero también se podría considerar lo inverso. Para lo que sigue asumiremos que la representación gráfica es la variable independiente.
b) El conjunto de valores que toma la variable independiente está dado por todos los gráficos de la parte a) y en los del ejemplo. El conjunto de valores que toma la variable dependiente está dado por todos los significados de la parte a) y los del ejemplo.
c) No sería conveniente que una misma señal tenga más de un significado, ya que podrían ocasionarse confusiones.

Las situaciones 1 y 2 han servido para introducir el concepto de *función*.

**¿Qué es una función?**

Una función es una regla de correspondencia que asigna a cada valor de un conjunto un único valor en otro conjunto. El conjunto de valores de entrada recibe el nombre de *dominio* de la función y el conjunto de valores de salida recibe el nombre de *rango* o *imagen* de la función.

**Nota:** observe que, en la situación 2, la función es la regla que asigna a cada símbolo un significado. Esta función no se puede expresar mediante una fórmula matemática $y = f(x)$; sin embargo, es una función porque esta asignación es única.

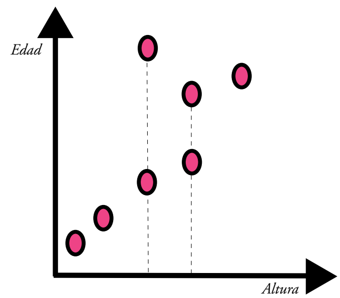
## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 2.1

1. En cada uno de los siguientes casos, analice si la relación entre las variables indicadas corresponde a una función. En caso de serlo, señale cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente.
   a) La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.
   b) Los alumnos de un curso de Matemáticas y sus fechas de nacimiento.
2. Analice si las siguientes variables podrían estar relacionadas por una función y en los casos en los que la respuesta sea afirmativa, trace las gráficas que relacionen las variables indicadas. De ser necesario, busque información que corresponda a la realidad.
   a) La estatura promedio de un niño de 0 a 6 años y su edad.
   b) La masa corporal de una persona y su índice de grasa.
   c) La edad y la cantidad de calorías que requiere una mujer.
   d) Número de minutos que se habla por teléfono y costo de la llamada.
   e) La longitud del largo de un rectángulo cuyo ancho es 8 cm con el perímetro correspondiente.
   f) La longitud del lado de un cuadrado con su área.
   g) La longitud del ancho de un rectángulo de 20 cm de perímetro con su área.
3. En una universidad hay un sistema de pagos para las pensiones de los alumnos, con escalas diferenciadas. Las escalas de pago consideradas son 1, 2, 3, 4 y 5 (que van de menor a mayor pago). Considere el conjunto A de los alumnos y considere también la correspondencia que asigna a cada elemento de A, su escala de pago. Responda a lo siguiente:
   a) Indique alguna circunstancia bajo la cual esta correspondencia no sería una función.
   b) Indique qué condiciones deberían cumplirse para que esta correspondencia sí sea una función.
4. Para cada uno de los siguientes contextos, defina una función e indique cuáles son las variables independientes y dependientes.

   a) Hasta hace unos años acceder a una vivienda propia era un sueño que muy pocos peruanos podían realizar. Afortunadamente, desde hace un tiempo, con el impulso de distintos programas, más peruanos han podido hacer su sueño realidad.

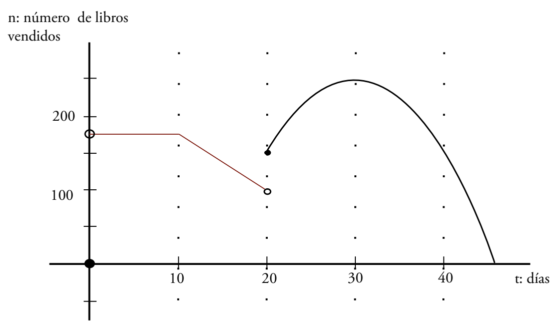
b) La mayoría de estudiantes de la Universidad del Futuro hace uso de los servicios que ofrecen las diversas cafeterías del campus. Sin embargo, parece ser que el número de estas es insuficiente, ya que en todas ellas se observan largas colas a la hora de almuerzo, las que desaniman a cualquiera. Sería interesante hacer un estudio sobre el tiempo que emplea un estudiante para almorzar en la Universidad del Futuro.

5. En la figura se muestra a la familia Marca Vilca. Amadeo es el abuelo; Luisa y Carlo son los padres y tienen cuatro hijos: Marita, quien estudia Geografía y Medio Ambiente en la universidad; Milco que cursa el 4.º de secundaria; Aureo acaba de ingresar al nido y Luis que es el bebé de la familia. Al costado de la foto se muestra una representación que relaciona las edades y la altura de cada miembro de la familia.




a) Identifique cada punto con cada miembro de la familia.
b) ¿Se puede considerar la gráfica mostrada como una función?
c) ¿Cómo mostraría usted el gráfico para que sea una función?

6. La gráfica representa la cantidad de libros vendidos en la Feria del Libro realizada durante sesenta días.

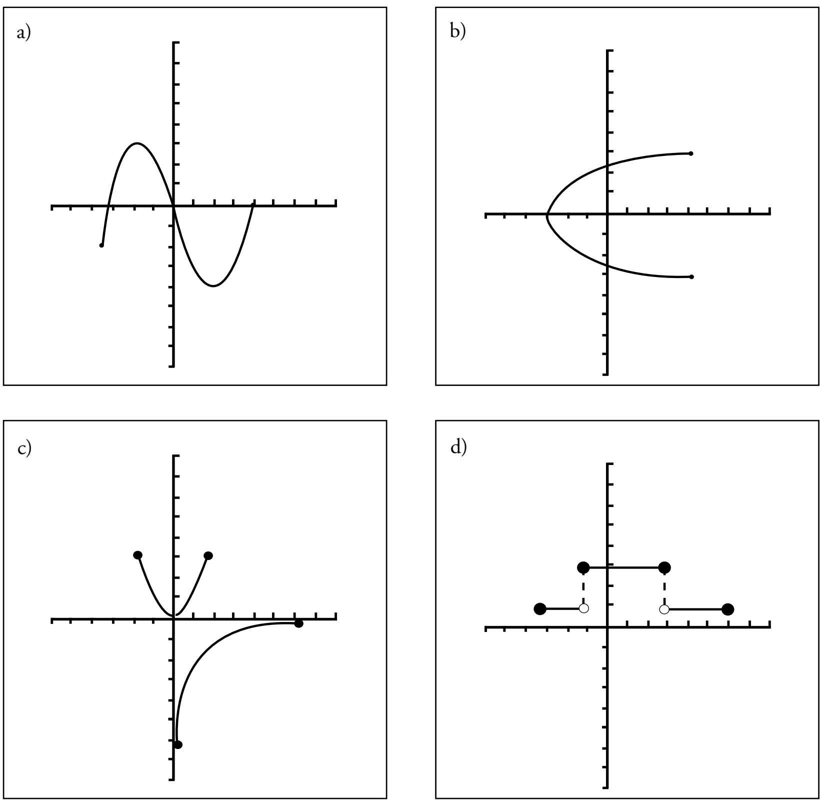


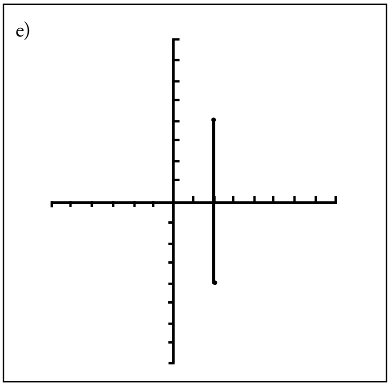
a) ¿Cuántos libros se vendieron durante los diez primeros días?
b) ¿Podría ser la gráfica mostrada una función? Justifique su respuesta.
c) ¿Qué sucedió con la venta de libros entre los días 10-20 y los días 30-45? ¿Por qué?
d) ¿En qué día se vendió la mayor cantidad de libros y cuántos fueron?

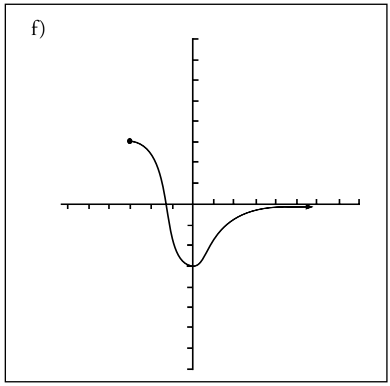
**Nota:** aunque realmente la gráfica debería ser un conjunto discreto de puntos, esta se presenta de manera continua.

7. Señale cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función. Para aquellas que lo sean, indique en el eje horizontal y en el vertical cuál corresponde a la variable independiente y cuál a la dependiente. Señale, además, los valores que toman su dominio y rango.

   **Nota:** cada división horizontal y vertical representa una unidad de medida.



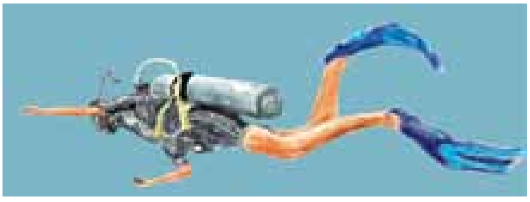



## 2.2. Función constante y función lineal

Como adelantáramos, veremos a continuación algunos tipos importantes de función, aprenderemos a determinar sus dominios, rangos y estudiaremos la manera de graficarlas. En el cálculo mensual del pago de recibos de teléfonos fijos o celulares, encontramos siempre un monto fijo de minutos que están incluidos en la «renta básica». Pasados los minutos que incluye el plan en el que estamos, comienzan a contabilizarse los segundos o minutos extra que deberemos pagar en el recibo. Si tuviésemos una línea con tarifa plana para llamadas de teléfono fijo a teléfono fijo de una misma empresa, pagaríamos siempre lo mismo. Estos son casos en los que podemos hacer uso de las funciones constante y lineal para explicar la relación entre minutos o segundos consumidos y el monto en soles que se debe pagar a fin de mes. Veamos algunas situaciones problema al respecto.

### Situación 3

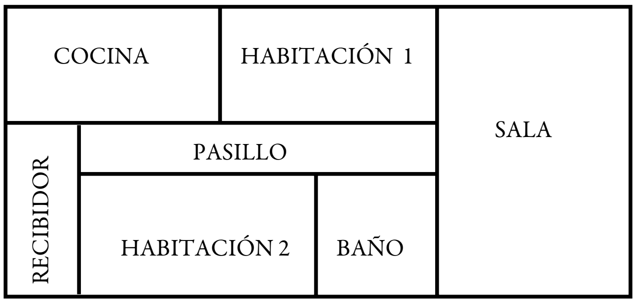


A medida que un buzo desciende en el océano, la presión aumenta linealmente con la profundidad. En la superficie, la presión es de 15 libras/pulgada$^2$, mientras que a 33 pulgadas debajo de la superficie, es de 33 libras/pulgada$^2$. Halle la expresión matemática que muestre la relación entre la presión ($p$) y el nivel de profundidad ($h$).

Considere un sistema de coordenadas con origen en las superficie y con eje vertical para representar la presion.

**Situación 4**

El costo de un departamento está en función de la cantidad de metros cuadrados que tenga. Susy acaba de comprar un minidepartamento y ha pagado \$ 1 500 por el metro cuadrado. Se sabe que el área de dicho departamento oscila entre 100 y 120 metros cuadrados. A continuación se muestra el croquis del departamento de Susy.




Si se sabe que:

- El largo del recibidor es el triple que el ancho.
- La cocina y las dos habitaciones tienen de ancho el doble que el ancho del recibidor, y de largo, el triple que el ancho del recibidor.
- El pasillo tiene de ancho la mitad que el ancho de la cocina, y el largo del pasillo es cinco veces el ancho del recibidor.
- La sala tiene igual ancho que el largo de la cocina y de largo cinco veces el ancho del recibidor.
- El baño es un cuadrado de lado igual al ancho de la cocina.

a) Halle una expresión matemática para el perímetro del departamento de Susy en función del ancho del recibidor.

b) Halle una expresión matemática para el área del departamento de Susy.

c) La expresión obtenida en a), ¿puede corresponder a una función? En caso de ser una función, determine su dominio.

d) ¿Cuál sería la variable independiente y cuál la variable dependiente de la función definida en a)?

e) Grafique en el plano cartesiano la función perímetro del departamento de Susy en función del ancho del recibidor, e identifique el dominio y el rango.

f) Si el ancho del recibidor del departamento de Susy mide 1,5 metros, ¿cuál es el perímetro del departamento de Susy? ¿Cuál es el área? ¿Cuánto pagó Susy por ese departamento?

**Solución propuesta**

a) Asumiendo que $x$ es el ancho del recibidor, podemos establecer de acuerdo con las condiciones dadas una expresión matemática correspondiente al perímetro del departamento dada por: $P(x) = 28x$.

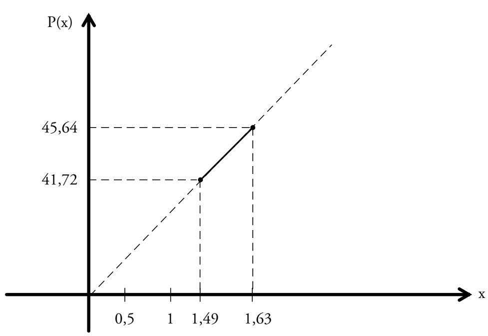
b) Bajo las mismas condiciones dadas, el área del departamento se puede representar como: $A(x) = 45x^2$.

c) La expresión obtenida sí corresponde a una función, pues a cada valor del ancho del recibidor le corresponde un único perímetro. El dominio de la función está dado por los valores reales de $x$ que cumplan: $x \geq 0$ y $100 \leq 45x^2 \leq 120$. Resolviendo el sistema encontramos: $x \in [1{,}49 ; 1{,}63]$, donde $x$ está dada en metros.

d) La variable independiente es el ancho del recibidor y la variable dependiente es el perímetro del departamento.

e) Considerando el dominio $x \in [1{,}49 ; 1{,}63]$, se obtiene la siguiente gráfica donde el eje horizontal representa el ancho del recibidor y el eje vertical el perímetro del departamento de Susy.

   Notemos que la gráfica corresponde a un segmento, ya que $x$ solo toma valores entre 1,49 m y 1,63 m.




f) Si el ancho del recibidor mide 1,5 m, entonces el perímetro del departamento es $P(1{,}5) = 28(1{,}5) = 42$ m y el área es $A(1{,}5) = 45(1{,}5)^2 = 101{,}25$ m$^2$. Susy pagó por el departamento $ 151 875.

Existen algunas funciones muy usadas en la vida real. En la situación anterior, se trabajó con una función lineal para el perímetro y una función cuadrática para el área. Ahora nos dedicaremos a estudiarlas en profundidad.

**¿Qué es una función lineal afín?**

Una función lineal afín es una función de variable real y de valor real definida por:

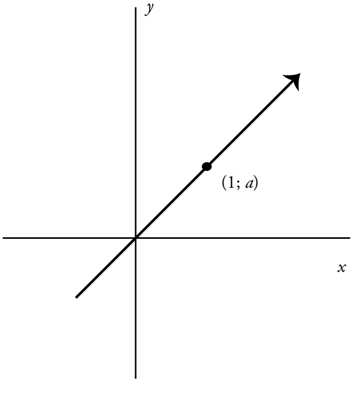
$$\begin{aligned} f: R &\rightarrow R \\ x &\mapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

donde $a$ y $b$ son números reales.
En adelante estas funciones se denominarán solamente "lineal".

**Nota:** el coeficiente $a$ se denomina pendiente de la gráfica de $f$. Es una medida de la inclinación de la recta (asociada a la gráfica de esta función) respecto al eje $x$.

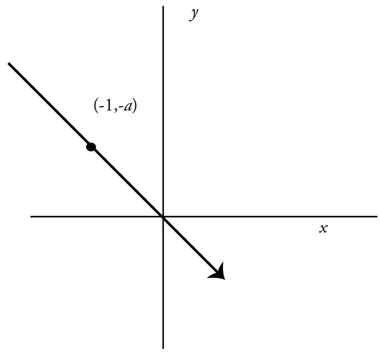
**¿Cómo graficar una función lineal con $b$ = 0?**

Las gráficas de estas funciones pasan por el origen.
Si $a > 0$:
la función es creciente. Un punto de paso lo constituye el origen. Para encontrar otro punto de paso, basta con dar un valor diferente de cero a la variable independiente $x$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces, $f(x) = a$. Por tanto, el otro punto de paso será $(1; a)$.




Si $a < 0$:

la función es decreciente. Un punto de paso lo constituye el origen. Para encontrar otro punto de paso basta con darle un valor diferente de cero a la variable independiente $x$. Por ejemplo, si $x = -1$, entonces $f(x) = -a$ . Por tanto, el otro punto de paso será (-1; $-a$). Nótese que en este caso $-a$ es positivo.




Existe un caso particular para la función lineal $f(x) = ax + b$, aquel en el que a = 0. En este caso, la función lineal se denomina *función constante*.

**¿Qué es una función constante?**

Una función constante es una función de variable real y de valor real definida por:

$$\begin{aligned} f: R &\to R \\ x &\mapsto f(x) = k \end{aligned}$$

donde $k$ es un número real.

Una función constante se caracteriza porque siempre genera el mismo valor para la variable dependiente, sea cual sea el valor de la variable independiente.

# Más situaciones problema para practicar

## Problemas 2.2

1. Represente los siguientes pares ordenados ($x$; $y$) en el plano cartesiano e indique la relación que existe entre las variables $x$ e $y$. Escriba una regla de correspondencia para $y$ en función de $x$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |

2. Determine la regla de correspondencia de la función lineal que pasa por los puntos (2;-1) y (5;1/2).

3. Determine cuál o cuáles de las siguientes reglas de correspondencia corresponden a funciones lineales.

   a) $f(x) = -x + 3$

   b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$

   c) $f(x) = -\sqrt{3}\,x + 2$

   d) $f(x) = \dfrac{3}{8}(7 - 2\pi x)$

   e) $f(x) = 5x - 4(x-3)(2-x)$

   f) $f(x) = (x-6)(x+6)$

4. Grafique las siguientes funciones lineales y halle su dominio y su rango.

   a) $f(x) = x + 4$

   b) $f(x) = -x + 2$

   c) $f(x) = \dfrac{5-x}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{-2x + 6}{5}$

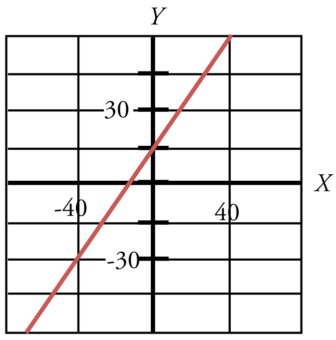
e) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{2}$

f) $f(x) = 2 - \pi x$

g) $f(x) = 1 + \sqrt{2}x$

h) $f(x) = \sqrt{5} + x$

5. Halle la regla de correspondencia de la función cuya gráfica se muestra a continuación, sabiendo que cada rectángulo tiene 40 unidades de largo por 15 unidades de ancho:




6. Si la utilidad, en nuevos soles, de vender $x$ artículos está dada por:

$$U(x) = 20x + 500, \text{ con } x \in [0; 2\,000]$$

a) Grafique la función utilidad.
b) Halle la utilidad al vender 200 artículos.
c) Halle la utilidad al vender 500 artículos.
d) Calcule la cantidad de artículos que se deben vender para obtener una utilidad de S/. 3 400.
e) ¿Cuál es la utilidad máxima que puede obtenerse?

7. Susana va en busca de trabajo al emporio comercial Amarra y se le presentan dos opciones de trabajo con los siguientes salarios:

**Opción A:** un salario fijo mensual de S/. 400 más el 2% del total de ventas que realice durante el mes.

**Opción B:** un salario fijo mensual de S/. 500 más el 1,5% del total de ventas que realice durante el mes.

a) Determine el salario mensual que recibiría Susana en cada caso, en función del total de ventas realizadas.
b) ¿Cuál será el salario de Susana si en el mes realiza S/. 2 000 en ventas, según la opción A?
c) ¿Cuál será el salario de Susana si en el mes realiza S/. 2 000 en ventas, según la opción B?
d) Trace en un mismo plano cartesiano las gráficas que representen las diferentes opciones de salario para Susana.
e) De las gráficas anteriores, ¿cuál cree que sea la opción de trabajo que más le conviene a Susana?
f) ¿De qué factor o factores cree que dependa la elección de la mejor opción?

8. Donatila decide invitar a sus amigas al concierto de su artista favorito y para ello tiene dos opciones:
   A: afiliarse a una tarjeta cuyo costo de afiliación es de $ 30 y luego comprar cada entrada a $ 16. Así ella no pagaría el costo de la entrada.
   B: pagar cada entrada a $ 20.

   a) Si $n$ es el número de invitados de Donatila, escriba el precio que pagará Donatila en cada caso, en función de $n$, si asisten al concierto ella y sus $n$ amigas.
   b) Si Donatila se presenta al concierto con cinco amigas, ¿qué opción le conviene, A o B?

## 2.3. Función lineal por tramos

### Situación 5

En un determinado país, un trabajador independiente debe presentar anualmente su declaración jurada de impuesto a la renta. En ella debe reportar sus ingresos y dependiendo del monto total anual de este valor, deberá abonar el impuesto a la renta. Para determinar el monto que debe pagar es necesario tener en cuenta la siguiente norma:

- Para ingresos que no excedan los S/. 156 600, el impuesto a la renta será el 15% de dichos ingresos.
- Para ingresos mayores a S/. 156 600 se pagará el 15% de 156 600 más el 30% del exceso de S/. 156 600.

   a) Determine el valor de R cuando:
      - I = S/. 100 000
      - I = S/. 200 000
   b) Halle una expresión matemática que muestre la relación entre los ingresos (I) de un trabajador independiente y el impuesto a la renta (R) que deberá cancelar al finalizar el año.
   c) Grafique la función definida en b).

**Situación 6**

La siguiente lista de precios muestra la tarifa ofrecida por la empresa de telefonía celular Clara durante un mes, según tres planes:

| **Planes tarifarios increíbles** | **Cargo fijo mensual en S/.** | **Minutos libres** | | **Costo de los minutos adicionales activando tarjetas prepago en S/.** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **Clara a Clara nacional** | **Clara a fijo local** | **Clara a Clara nacional** | **Clara a fijo local** |
| Plan increíble 55 | 55 | 64 | 44 | 0,86 | 1,25 |
| Plan increíble 70 | 70 | 100 | 78 | 0,70 | 0,90 |
| Plan increíble 100 | 100 | 250 | 200 | 0,40 | 0,50 |

Considerando esta información:

a) Halle la expresión matemática que relaciona la cantidad de minutos en llamadas con el correspondiente pago, según el Plan increíble 100, cuando la comunicación es de un Clara a otro Clara nacional.

b) Esboce la gráfica del plan tarifario hallado en a).

c) Determine cuántos minutos se hablaron si el gasto por llamadas, según el Plan increíble 100 definido en a), fue de S/. 420.

**Solución propuesta**

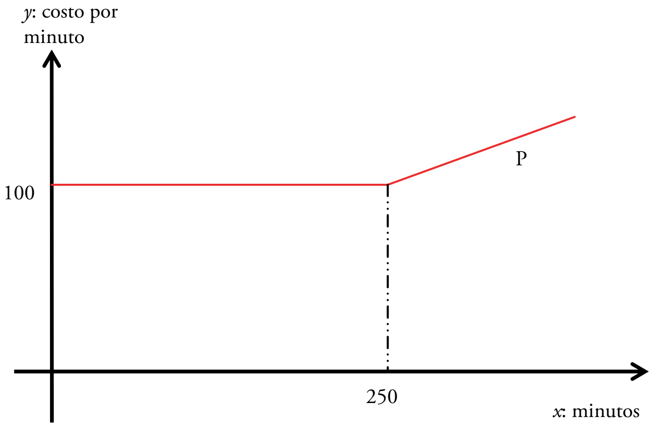
Si denotamos por $x$ la cantidad de minutos hablados, se tendrían las siguientes expresiones matemáticas que relacionan el pago con la cantidad de minutos hablados según el Plan increíble 100, cuando la comunicación es de una Clara a una Clara nacional:

a)

$$P_1(x) = \begin{cases} 100, & x \leq 250 \\ 100 + 0{,}40\,(x - 250), & x > 250 \end{cases}$$

$$P_1(x) = \begin{cases} 100, & x \leq 250 \\ 0{,}40x, & x > 250 \end{cases}$$

b)




c) $0,40x = 420 \Rightarrow x = 1\ 050$

Esto indica que se hablaron 1 050 minutos.

## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 2.3

1. La siguiente lista de precios muestra la tarifa ofrecida por una empresa de telefonía celular durante un mes, según dos planes:

| Nuevos planes control | Cargo fijo | Segundos libres llamando a: | Costo de los segundos adicionales activando tarjetas prepago |
|---|---|---|---|
| | US $ | Fijos locales del Perú | Fijos locales (en US $) |
| Péru 16 | 16 | 4 200 | 0,004 |
| América 20 | 20 | 6 300 | 0,003 |

Según esta información, responda a las siguientes preguntas:

a) Halle la expresión matemática que relacione la cantidad de segundos en llamadas con el correspondiente pago según el plan Perú 16 cuando la comunicación es a fijos locales del Perú. Luego haga lo mismo con el plan América 20.

b) Esboce las gráfica de los dos planes tarifarios construidos en a).

c) Si después de un mes el gasto por llamadas asciende a $ 22,703, según el plan América 20, ¿cuántos segundos se habló?

2. La aerolínea Blue Air permite a sus pasajeros transportar gratuitamente hasta 25 kg de equipaje y por cada kg adicional cobrará 8 euros. Para evitar sobrecargas en el avión, se restringe el número de kg que un pasajero puede llevar y se señala que como máximo puede tener dos maletas, cada una con 32 kg.

a) Encuentre una expresión matemática que permita relacionar los kg de equipaje con el monto total que se debe pagar por el exceso de equipaje que transporta un pasajero.

b) Grafique la regla de correspondencia determinada en a).

c) Si la compañía Sky Europe permite a sus pasajeros transportar gratuitamente hasta 20 kg de equipaje y por cada kg adicional cobra 6 euros, hasta un máximo de dos maletas cada una con 32 kg, ¿cuál de estas dos aerolíneas le conviene elegir a un viajero cuyo equipaje excede los 30 kg?

**Nota:** los kg de exceso de equipaje no se redondean a valores enteros, en ninguno de los casos; así, por ejemplo, si el pasajero lleva 0,1 kg de exceso de equipaje, pagará 0,8 euros en la aerolínea Blue Air.

## 2.4. Función cuadrática

Cuando deseamos emprender un negocio, todos lo hacemos esperando tener ganancias, no solo recuperar el dinero invertido, sino recibir algo extra, la utilidad de nuestro negocio. Para calcular la utilidad de nuestro negocio debemos encontrar la diferencia entre los ingresos y los costos en los que hemos incurrido. En muchos casos, podemos representar la utilidad de una empresa o de un negocio a través de alguna función, sea esta constante, lineal o —para los fines de este subcapítulo— una función cuadrática. Por ejemplo, pensemos que el costo de producción de un pantalón depende de la cantidad de metros cuadrados de tela que empleamos para su confección. Imaginemos que el metro lineal de tela tiene un valor conocido, S/. 10 por ejemplo. Calculamos la cantidad de metros cuadrados que necesitamos para confeccionar el pantalón. A este costo puede agregársele una serie de costos fijos, como el pago de los sueldos de los empleados o del alquiler del taller donde elaboramos los pantalones. Tomando en cuenta esta información podemos calcular tanto el costo de un pantalón, colocando como variable la cantidad de tela empleada, como la utilidad de vender los pantalones a un determinado precio, etcétera. La misma lógica se utiliza para calcular el valor y la utilidad o ganancia de construir un edificio para el programa Mi Vivienda. Aquí nos interesará, además de los costos fijos, las dimensiones del departamento que se construirá. El precio del departamento dependerá de su área. Si un departamento tiene forma rectangular, multiplicando el largo y el ancho de dicho rectángulo obtenemos el valor del inmueble. Si una constructora debiera, por ejemplo, dividir un terreno de dimensiones conocidas en cuatro partes, de modo tal que al momento de vender los terrenos la utilidad sea máxima, ¿cómo convendría dividir dicho terreno?

A continuación, veremos algunos ejemplos con el fin de familiarizarnos con este tipo de función.

### Situación 7

Luego de analizar las ventas de bebidas energizantes en un determinado supermercado, se encuentra que si se venden $x$ latas en un día, la utilidad (en dólares) estará dada por:

$$P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$$

a) Complete cuadrados para expresar $P(x)$ en la forma
$$P(x) = a(x-h)^2 + k.$$
b) Grafique la función $P(x)$.
c) Determine cuántas latas debe vender para que la utilidad sea máxima.

## Situación 8

Aurelio y Graciela son amigos desde la infancia. Aurelio piensa construir un establo con un piso circular y un cerco de madera que lo rodee. Graciela va a visitar a Aurelio a su casa de campo y aprovecha para ayudarlo a decidir sobre la propuesta que mejor le conviene para construir su establo.

Aurelio tiene dos propuestas de constructoras para levantar su establo, las cuales le ofrecen los mismos materiales y acabados. La primera cobra $ 30 por metro cuadrado por la construcción de piso, $ 25 por metro lineal del cerco, más una tasa fija de $ 250 por gastos administrativos. La segunda constructora cobra $ 28 por metro cuadrado por el piso, $ 30 por metro lineal del cerco, más una tasa fija de $ 650 por gastos administrativos.

Graciela quiere determinar cuál de las dos constructoras le conviene a Aurelio para levantar su establo de vacas de la forma más económica posible, siguiendo los siguientes pasos.

1. Completando la tabla que se muestra a continuación, con los datos del enunciado.

| | Costo por m$^2$ de piso (dólares) | Costo por m del cerco circular (dólares) | Costo fijo por gastos administrativos (dólares) |
|---|---|---|---|
| **Primera constructora** | | | |
| **Segunda constructora** | | | |

2. Realizando algunos cálculos para comparar los costos totales que proponen las dos constructoras para realizar el establo, teniendo en cuenta que $r$ es el radio del establo, en metros. Utilice la calculadora y aproxime a los milésimos.

| **Longitud del radio de la pista circular (metros)** | **Área que se pavimentará** | **Longitud del borde circular** | **Costo total de la primera compañía** | **Costo total de la segunda compañía** |
|---|---|---|---|---|
| $r$ | $\pi r^2$ | $2\pi r$ | $30\pi r^2 + 25(2\pi r) + 250$ | $28\pi r^2 + 30(2\pi r) + 650$ |
| 6 | | | | |
| 8 | | | | |
| 10 | | | | |
| 12 | | | | |
| 14 | | | | |
| 16 | | | | |
| 18 | | | | |
| 20 | | | | |

3. Graficando, en un mismo plano cartesiano, los costos totales de ambas constructoras.
4. Respondiendo, a partir de la gráfica, a las siguientes preguntas:
   - ¿Existirá algún valor de $r$ para el cual resulta lo mismo contratar a cualquiera de las dos constructoras? Explique.
   - ¿Cuál de las dos propuestas le conviene a Aurelio? ¿Por qué?

## Solución propuesta

Recordando que:

a) El área de un círculo de radio $r$ es igual a: $\pi r^2$.

b) La longitud de una circunferencia de radio $r$ es igual a: $2\pi r$.

1. Con los datos del enunciado, se completa la siguiente tabla:

| | **Costo por m² de piso (dólares)** | **Costo por m del cerco circular (dólares)** | **Costo fijo por gastos administrativos (dólares)** |
|---|---|---|---|
| **Primera constructora** | 30 | 25 | 250 |
| **Segunda constructora** | 28 | 30 | 650 |

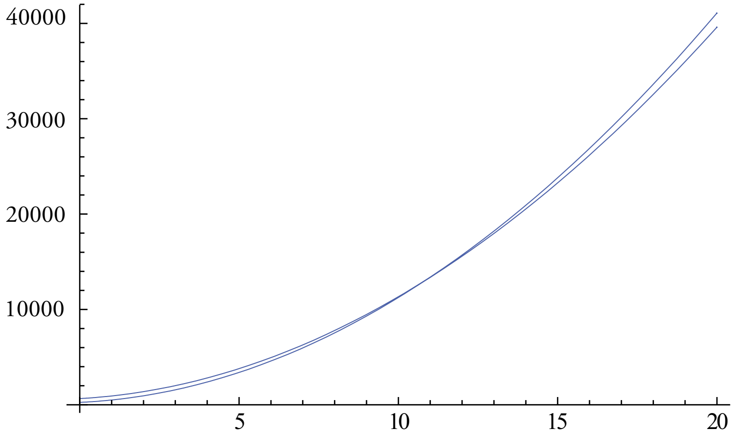
2. Usando las fórmulas para calcular el área y longitud de una circunferencia, se completa la siguiente tabla:

$$C_1(r) = 30\pi r^2 + 25(2\pi r) + 250$$
$$\text{y}$$
$$C_2(r) = 28\pi r^2 + 30(2\pi r) + 650$$

**Tabla de costos para construir el establo**

| **Longitud del radio (metros)** | **Costo total (dólares)** | |
|---|---|---|
| | **Primera compañía** | **Segunda compañía** |
| **6** | 4 585,394 | 4 947,695 |
| **8** | 7 538,489 | 7 787,692 |
| **10** | 11 245,565 | 11 331,406 |
| **12** | 15 706,623 | 15 578,836 |
| **14** | 20 921,662 | 20 529,982 |
| **16** | 26 890,683 | 26 184,844 |
| **18** | 33 613,686 | 32 543,422 |
| **20** | 41 090,670 | 39 605,716 |

3. A continuación se esbozan las gráficas de los costos de ambas propuestas:



4. ¿Existirá algún valor de $r$ para el cual resultará lo mismo contratar a cualquiera de las dos constructoras?
   De acuerdo con la gráfica y con la tabla de valores se puede afirmar que sí existe dicho valor. Este se encuentra entre el valor 10 y 12. Y se puede obtener con exactitud igualando los dos costos y resolviendo una ecuación cuadrática. Se denominará a este valor $c_0$.

   ¿Cuál de las dos propuestas le conviene a Aurelio? ¿Por qué?
   Si el radio del piso del establo es menor que el valor $c_0$, le conviene la propuesta de la primera compañía y si el radio es mayor que $c_0$, le conviene la propuesta de la segunda compañía.

Las expresiones algebraicas correspondientes a los costos totales de la primera y segunda compañía,

$$C_1(r) = 30\pi r^2 + 25(2\pi r) + 250$$

y

$$C_2(r) = 28\pi r^2 + 30(2\pi r) + 650$$

corresponden a funciones cuadráticas.

La situación estudiada permite mostrar la existencia de funciones no lineales como, por ejemplo, la *función cuadrática*.

**¿Qué es una función cuadrática?**

Una función cuadrática es una correspondencia de variable real y de valor real definida por:

$$f : R \to R$$

$$x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a$ , $b$ y $c$ son números reales, con $a \neq 0$.

La función cuadrática, al igual que la función constante y lineal, corresponde al conjunto de funciones polinómicas.

## ¿Cómo graficar una función cuadrática?

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, la cual se puede «abrir» hacia arriba o hacia abajo; esto dependerá del signo de la constante $a$. Así, si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo. Una vez identificada la dirección de la abertura, interesará identificar las coordenadas del vértice de la parábola para proceder a graficarla.

Sea $V = (h, k)$ el vértice de la parábola asociada a la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para identificar el vértice $V = (h, k)$ se seguirá el siguiente procedimiento:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

Como se puede observar, se ha completado cuadrados para expresar $f$ en la forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

donde: $h = -\dfrac{b}{2a}$, $k = f(h) = c - \dfrac{b^2}{4a}$ .

Nótese que debemos tomar en cuenta los dos casos siguientes:

- si $a > 0$, la función toma valor mínimo cuando $x = h$.
- si $a < 0$, la función toma valor máximo cuando $x = h$.

Para mejorar el gráfico de la función cuadrática es conveniente hallar las intersecciones de la gráfica de la función con los ejes coordenados, en caso de que las hubiere.

Para ello se debe calcular $(0; f(0))$, $(x_1; 0)$, y $(x_2; 0)$, donde $x_1$ y $x_2$ son las soluciones reales de la ecuación $a(x - h)^2 + k = 0$.

Por ejemplo:
Grafique la función cuadrática $f(x) = x^2 + 6x + 5$, y señale las coordenadas de su vértice, de los puntos de corte con los ejes de coordenadas, y su dominio y rango.

**Solución propuesta**

En primer lugar, se identifican los coeficientes $a = 1$; $b = 6$; $c = 5$. De acuerdo con esto, como a > 0, la parábola se abre hacia arriba.

A continuación se identifica el vértice. Para ello es necesario completar cuadrados reescribiendo la función:

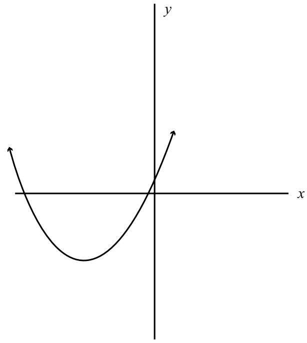
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 5 \\ &= (x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2) - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 5 \\ &= (x+3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x+3)^2 - 4 \end{aligned}$$

Por tanto, el vértice es $V = (h; k) = (-3; -4)$.

Se calculan los puntos de intersección con los ejes coordenados:

- Si la gráfica de $f$ corta el eje $y$, entonces ese punto de intersección debe tener abscisa igual a cero:
  $x = 0, f(0) = 5$. Luego, el punto de intersección con el eje $x$ es (0; 5).
- Si la gráfica de $f$ corta el eje $x$, entonces ese punto de intersección debe tener ordenada igual a cero:
  $y = 0,\ f(x) = 0$.
  Esto ocurrirá cuando $(x + 3)^2 - 4 = 0$
  $(x + 3)^2 = 4$
  $x + 3 = 2$ ó $x + 3 = -2$
  $x = -1$ ó $x = -5$

Luego, los puntos de intersección con el eje *y* son (–1;0) y (–5;0).



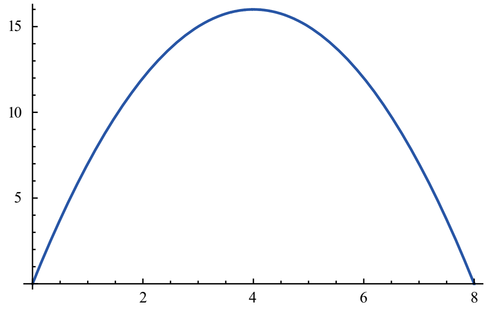

Finalmente, se calcula el dominio Dom($f$) = $R$ y el rango Ran($f$) = [–4; +∞[.

**Nota:** En algunos problemas, según el contexto, el dominio de la función debería ser solo los números enteros o los enteros positivos. Sin embargo, se considerará como dominio el conjunto de números reales o de reales positivos para efectos gráficos.

## Más situaciones problema para practicar

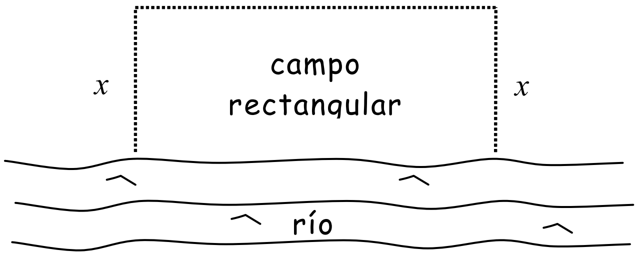
### Problemas 2.4

1. Represente gráficamente las siguientes funciones y halle su dominio y rango.
   a) $f(x) = (x + 2)^2 - 5$
   b) $f(x) = x^2 + 4$
   c) $f(x) = -x^2 - 3$
   d) $y = -2x^2$
   e) $y = 7x^2$
   f) $y = 3x^2 - 8$
2. Escriba las siguientes funciones en la forma $f(x) = a(x\text{-}h)^2 + k$ y halle su dominio, su rango y los puntos de intersección con los ejes coordenados.
   a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$
   b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
   c) $f(x) = -3x^2 + 6x$
3. Escriba la siguiente función $f(x) = 4x^2 - 8x - 1$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ completando cuadrados y grafíquela señalando dominio, rango y los puntos de intersección con los ejes coordenados.
4. Dado un rectángulo de perímetro 16, exprese el área de dicho rectángulo en función de uno de sus lados, e indique los valores que puede tomar dicha variable.
5. Desde un cañón se lanza un proyectil que sigue una trayectoria parabólica, según el gráfico que se muestra a continuación.
   El eje $x$ representa los kilómetros lineales recorridos y el eje $y$, la altura.




   a) Si la altura alcanzada es de 5 m, ¿es cierto que el proyectil ha recorrido menos de 2 km lineales?
   b) Según el gráfico mostrado, ¿es cierto que a cada valor de la altura le corresponde un único elemento del dominio?

6. Un granjero cercará un campo rectangular, como se muestra en la figura, pero no será necesario cercar a lo largo del río. Si se sabe que el perímetro que se cercará es de 3 400 m, exprese el área del campo en función del ancho $x$ de este.




¿La expresión obtenida para el área del campo rectangular corresponde a una función lineal o cuadrática? Indique cuál es el dominio de la función obtenida.

7. La utilidad $U$ de una empresa, en miles de dólares, está dada por la siguiente expresión: $U(x) = -(x-5)^2 + 4$, donde $x$ representa el número de cientos de unidades producidas y vendidas.
   a) Halle la utilidad que obtendrá la empresa si vende 600 unidades. Explique qué significa el resultado obtenido.
   b) Halle la utilidad que obtendrá la empresa si vende 450 unidades. Explique qué significa el resultado obtenido.
   c) Grafique la función $U$.
   d) Halle el número de unidades que se deben producir y vender para obtener la máxima utilidad posible, y halle la máxima utilidad posible.
8. Una empresa que se dedica a la producción de cierto artículo tiene un costo fijo mensual de S/. 300 y un costo variable por unidad producida de S/. 10. Además, se sabe que su ingreso está dado por la siguiente expresión: $I(x) = -0,1x^2 + 100x$, donde $x$ es el número de artículos que produce y vende la empresa mensualmente.
   a) Determine la utilidad mensual de la empresa en función de $x$.
   b) Halle la utilidad que obtendrá la empresa si produce y vende 200 artículos.
   c) Halle el número de artículos que debe producir y vender la empresa para obtener la máxima utilidad, y calcule la máxima utilidad.
9. Don Miguel recibe la siguiente información de su servicentro acerca del rendimiento de la gasolina de un auto: el número $T$ de kilómetros que puede viajar un automóvil con un galón de gasolina depende de la velocidad $x$ en kilómetros por hora, donde ambas magnitudes se relacionan mediante la siguiente expresión matemática: $T(x) = -2x^2 + 80x - 760$ para $16 \leq x \leq 24$.

a) Exprese $T$ en la forma $T(x) = a(x - h)^2 + k$; es decir, halle $a$, $h$ y $k$.
b) Grafique la función definida en a).
c) ¿Cuál es la velocidad que proporciona el número máximo de kilómetros por galón?
d) ¿Cuál es el máximo número de kilómetros por galón que puede rendir la gasolina para este auto?

10. José y Pedro son dueños de una empresa de alquiler de autos. La utilidad en soles que ellos tienen por alquilar un auto durante un tiempo $t$ (en horas) está dada por: $U(t) = -t^2 + 8t$.

a) Si ellos alquilan un auto durante 2 horas, ¿cuánto obtendrán de utilidad?
b) Si ellos alquilan un auto durante 6 horas, ¿cuánto obtendrán de utilidad?
c) Esboce la gráfica de $U$, e indique su vértice y las coordenadas de los puntos de corte con los ejes coordenados.
d) Halle el tiempo que deberán alquilar un auto para obtener la mayor utilidad posible y el valor de la máxima utilidad.

11. La agencia de viajes *Volar.com* es una de las de mayor éxito en América Latina. Desde una PC, en esta dirección se puede conseguie las mejores ofertas de vuelos. Esta agencia mensualmente vende 5000 pasajes a una tarifa promedio de \$400 por persona, en vuelos de Lima a Nueva York.

Luego de un estudio, se encontró que por cada 4 dólares de aumento al precio del pasaje, se dejaban de vender mensualmente 5 pasajes.

a) Halle la expresión matemática que relaciona precio de pasajes $p$ y el número de pasajes vendidos $n$.
b) Halle el ingreso que recibe la agencia si el precio que se cobra por pasaje es $p$.
c) ¿Que precio debe asignarse a un pasaje para obtener el mayor ingreso posible?

12. El dueño de la panadería El Trigalito se encuentra preocupado por el último aumento de la harina de trigo y desea averiguar cómo ha afectado este acontecimiento la venta del pan. Luego de un estudio, encontró lo siguiente:

- Cuando el precio de cada pan era de S/. 0,20, se vendía en total 10 000 panes al día.
- Por cada S/. 0,005 de aumento, se dejaban de vender 10 panes diariamente.

a) Con la información anterior, complete la siguiente tabla.

| **Precio por pan** <br> ***x*** | **Número de panes vendidos diariamente** <br> ***y*** |
|---|---|
| 0,20 | 10 000 |
| 0,20 + (1)0,005 | 10 000 – (1)(10) |
| 0,20 + 2(0,005) | |
| 0,20 + 3(0,005) | |
| 0,20 + 4(0,005) | |
| 0,20 + $m$(0,005) | |

b) Considerando x = 0,20 + m(0,005), exprese $m$ en términos de $x$.
c) Halle la expresión matemática que relaciona $x$ e $y$.
d) Halle el ingreso que recibe la panadería en una mañana si el precio que se cobra por cada pan es $x$.
e) Grafique la función encontrada en d) y señale algunos de sus elementos más importantes.
f) ¿Qué precio debe asignarse a un pan para obtener el mayor ingreso posible?

13. Durante varios días se observó el comportamiento del precio de 1 kg de pollo y el número de kg que se vendían de esta ave, llegándose a las siguientes conclusiones:

- Cuando el precio del kg de pollo era S/. 5, se vendían 50 000 kg de esta ave.
- Por cada S/. 0,10 que este precio se incrementaba, se vendían 500 kg menos.

a) Halle una expresión matemática que relacione las variables $p$ y $n$, donde $p$ es el precio de 1 kg de pollo y n es el número de kg de pollos vendidos.
b) Halle una expresión matemática para la función que relaciona el precio de 1 kg de pollo con el ingreso obtenido por las ventas.

## 2.5. Función exponencial

Un uso bastante común de la función exponencial es la medición del ritmo de crecimiento de poblaciones. El tipo de poblaciones cuyo crecimiento desea cuantificarse va desde bacterias hasta ciudades. También se utiliza este tipo de función para medir la velocidad de propagación de algún tipo de virus o enfermedad o virus informático, como también la depreciación del costo de un vehículo a través del tiempo. Veamos algunos ejemplos.

### Situación 9

Carlos compró hace siete años un terreno cerca de la playa. Su esposa estuvo satisfecha con dicha inversión, pues en esa zona el valor de las parcelas cada año es 1,2 veces el valor del año anterior. Si actualmente Carlos puede vender dicho terreno en \$ 10 000, responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto le costó el terreno a Carlos?
b) ¿Por cuánto lo podría vender el próximo año? ¿Y dentro de cinco años?
c) Si lo hubiera vendido hace un año, ¿cuánto dinero le hubieran dado por el terreno?
d) Determine la expresión matemática que permita obtener el precio de venta del terreno luego de *t* años de haberlo comprado.
e) ¿Dentro de cuántos años podrá vender el terreno al triple de su valor de compra?

### Situación 10

Actualmente, la banca está encontrando en internet un aliado muy importante. Los clientes utilizan la *web* para efectuar operaciones bancarias sin asistir a las oficinas físicas, pueden ver sus registros actuales, determinar si un cheque en particular ya ha sido liquidado, solicitar un crédito nuevo, pagar recibos y hacer cualquier consulta al banco. Además, los costos para el banco son cada vez más bajos, lo que permite a los bancos en línea reducir los costos a sus clientes y darles tasas de interés más altas por su dinero.

Para enero de 2010, se estima que en el Perú existirán 20 000 clientes que harán uso de este servicio y que el crecimiento mensual será de 2% para los años siguientes.

a) Teniendo en cuenta esta predicción, ¿cuántos clientes de banca por internet existirán en febrero de 2010?
b) ¿Cuántos clientes de banca por internet existirán en marzo de 2010?
c) ¿Cuántos clientes de banca por internet existirán después de transcurridos *t* meses a partir de enero de 2010?
d) Bosqueje una gráfica que relacione el mes (a partir de enero de 2010) con el número de clientes de banca por internet. Considere para ello la expresión hallada en c).
e) Determine, aproximadamente, en qué mes y año se alcanzarán los 20 millones de clientes de banca por internet en nuestro país.

**Solución propuesta**

a) En la situación 10, sea $t$ el tiempo en meses transcurrido desde enero de 2010. Es decir, considerando $t = 0$ en enero de 2010, se tendrá:

$C(0) = 20\,000$

$$C(1) = 20\,000 + \frac{2}{100}(20\,000) = 20\,000\left(1 + \frac{2}{100}\right) = 20\,400$$

Se estima que existirán 20 400 clientes que harán uso de este servicio.

b) Para determinar el número de clientes en marzo, se calcula:

$$C(2) = 20\,400 + \frac{2}{100}(20\,400)$$

$$= 20\,400\left(1 + \frac{2}{100}\right)$$

$$= 20\,000\left(1 + \frac{2}{100}\right)\left(1 + \frac{2}{100}\right)$$

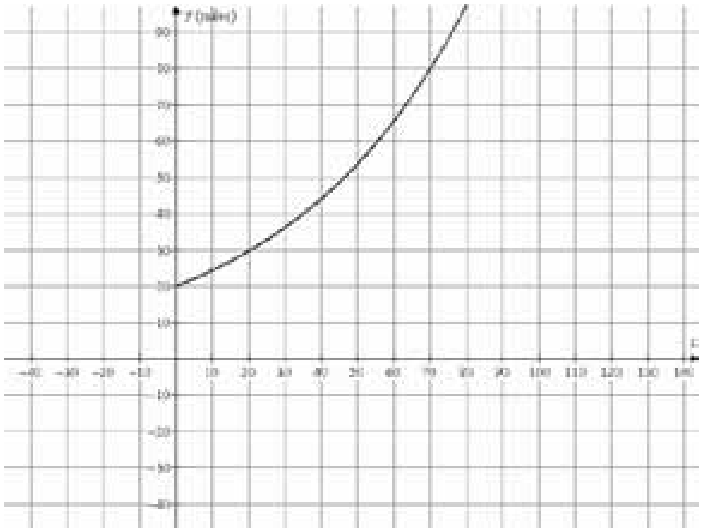
$$= 20\,000\left(1 + \frac{2}{100}\right)^2$$

$= 20\,808$

c) El número de cliente después de $t$ meses a partir del 2010 será:

$$C(t) = 20\,000\left(1 + \frac{2}{100}\right)^t,\ t \geq \text{ ó }\ C(t) = 20\,000\,(1{,}02)^t,\ t \geq 0$$

d) Se bosquejará una gráfica que relacione el número de meses transcuridos a partir de enero de 2010, con el número de clientes de banca por internet. Considere para ello la expresión hallada en c).



e) Para determinar, aproximadamente, en qué mes y año se alcanzarán los 20 millones de clientes de banca por internet en el país, se plantea la siguiente igualdad:

$$20\ 000\ 000 = 20\ 000\ (1{,}02)^t$$

$$1\ 000 = (1{,}02)^t$$

$$1\text{n}\ (1\ 000) = 1\text{n}\big((1{,}02)^t\big)$$

Por propiedad de logaritmos:

$$\ln\ (1\ 000) = t\ \ln\ (1{,}02)$$

$$t = \frac{\ln\ (1\ 000)}{\ln\ (1{,}02)}$$

$$t = 348{,}83$$

Aproximadamente, deberán transcurrir 349 meses, ó 29 años y 1 mes; es decir, en febrero de 2039 se alcanzarán los 20 millones de clientes de banca por internet en el país.

Al igual que las funciones lineales y cuadráticas que sirven para construir modelos matemáticos para resolver problemas, existe también una función que desempeña una labor importante no solo en Matemáticas, sino también en Finanzas, Economía, Biología y otras áreas de estudio. Esta función incluye una constante elevada a un exponente variable, $f(x) = ka^x$. Tales funciones reciben el nombre de *funciones exponenciales*.

**¿Qué es una función exponencial?**

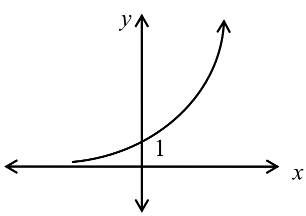
Una función exponencial es una correspondencia de variable real y de valor real definida por:

$$\begin{aligned} f &: R \to R \\ x &\mapsto f(x) = Ka^x \end{aligned}$$

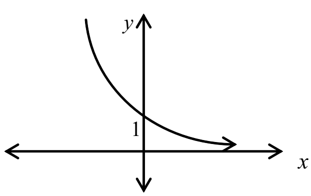
donde $a > 0$, $a \neq 1$; dom($f$) = $R$ y $K$ es una constante positiva.

Si se considera $K = 1$, se pueden presentar los siguientes casos, de acuerdo con el valor que tome la constante $a$.

**Caso 1**:
Si $a > 1$, la función $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente.
Su gráfica será de la forma:




**Caso 2:**
Si $0 < a < 1$, la función $f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente.
Su gráfica será de la forma:




En ambos casos, según las gráficas, se nota que el dominio de $f$ es $R$.

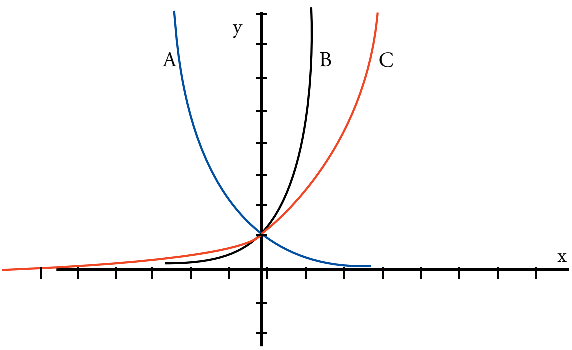
## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 2.5

1. Grafique y halle el dominio y el rango de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 3^x$
   b) $f(x) = 3^{-x}$
   c) $f(x) = 3^x + 1$
   d) $f(x) = 3^x - 1$
   e) $f(x) = 3^{-x} + 1$
   f) $f(x) = 3^{-x} - 1$
   g) $f(x) = 3^{-x+1}$

   Sugerencia: complete la siguiente tabla para graficar cada función.

| $x$ | - 4 | - 3 | - 2 | - 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

2. Dadas las curvas A, B y C, que no cortan el eje horizontal, señale:




   a) ¿Cuál es la gráfica de $y = 4^x$?
   b) ¿Cuál es la gráfica de $y = 0{,}5^x$?

3. Encuentre una posible fórmula de la forma $f(x) = Ca^x$ para las funciones representadas por las tablas dadas:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4, 30 | 6, 02 | 8, 43 | 11, 80 |

y

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | 5, 50 | 4, 40 | 3, 52 | 2, 82 |

4. Un cierto fármaco, cuya actividad antipirética, analgésica y antiinflamatoria es muy reconocida, es indicado para el alivio de la fiebre y el dolor, en las molestias dolorosas que se presentan durante los procesos gripales, resfríos, dolor de garganta, cefalea y dolor dental. Cuando se le administró cierta dosis a un paciente, se observó que el número de miligramos que permanecían en el torrente sanguíneo disminuía 25% respecto a la dosis observada una hora antes.

   Si se considera que la dosis inicial administrada al paciente fue de $D_0$ miligramos,

   a) ¿Cuántos miligramos de dicho fármaco permanecerán en el torrente sanguíneo del paciente después de la primera hora?
   b) ¿Cuántos miligramos del fármaco permanecerán en el torrente sanguíneo del paciente después de la segunda hora?
   c) ¿Cuántos miligramos del fármaco permanecerán en el torrente sanguíneo del paciente después de *t* horas?
   d) Represente gráficamente la expresión encontrada en la pregunta anterior, considerando $D_0 = 10$ mg.
   e) ¿Es cierto que, llegado un momento, el fármaco desaparecerá totalmente del torrente sanguíneo? ¿Por qué?
   f) ¿Cuántas horas han transcurrido desde la administración de la dosis inicial $D_0$, si en el torrente sanguíneo permanecen aún 0,5 $D_0$ mg de dicho fármaco?

5. A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de 1% anual. Al inicio la población era de 100 000 habitantes.
   a) ¿Cuál será la población después de tres años?
   b) ¿Cuántos años tienen que pasar para que la población sea de 92 274 habitantes?

6. Las ciudades A y B en la actualidad tienen poblaciones de 70 000 y 60 000 habitantes, respectivamente. La ciudad A crece a razón de 4% anual y la B crece a razón de 5% anual.
   a) Determine la diferencia entre las poblaciones luego de cinco años.
   b) ¿Después de cuánto tiempo las poblaciones serán iguales?

   Dé las respuestas aproximándolas al valor entero más cercano.

7. La población proyectada de una ciudad está dada por $P(t) = 125\ 000(1{,}11)^{t/20}$, donde $t$ es el número de años después de 1995.
   a) ¿Cuál será la población en el 2015?
   b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que la población sea el doble de la población obtenida en el 2003?
8. Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico se modela mediante la ecuación: $R = 6e^{kx}$, donde $x$ es la concentración variable de alcohol en la sangre y $k$ es un valor constante.
   a) Suponga usted que una concentración de alcohol en la sangre de 0,04 produce un riesgo de 10% (R = 10) de sufrir un accidente. Determine la constante $k$ de la ecuación.
   b) Utilice el valor de $k$ e indique cuál es el riesgo si la concentración es de 0,017.
   c) Con el mismo valor de $k$, encuentre la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo de 100%.
   d) Si la ley establece que el riesgo de las personas que sufren un accidente es mayor o igual al 20%, ¿con qué concentración de alcohol en la sangre debe ser arrestado y multado un conductor?
9. Suponga que le ofrecen un empleo que dura un mes y por el cual se le pagará muy bien. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago sería más rentable para usted?
   a) Un millón de soles a fin de mes.
   b) 2 céntimos el primer día del mes, 4 céntimos el segundo día, 8 céntimos el tercer día, y, en general, $2^n$ céntimos en el enésimo día.
10. La recuperación normal de una herida se puede modelar mediante una función exponencial. Si $A_0$ representa el área original de la herida y $A$ es igual al área de la herida después de $n$ días, entonces tenemos la fórmula:

$$A = A_0 e^{-0{,}35n}$$

Describa el área de una herida en el enésimo día después de una lesión, si no hay infecciones que retarden la recuperación.

Suponga que una herida tiene un área inicial de 1 cm$^2$.

   a) En un proceso de recuperación, ¿cuántos días deben transcurrir antes de que la herida tenga la mitad de su tamaño original?
   b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que tenga 10% de su tamaño original?

11. Un supermercado de nuestra ciudad ha determinado que el volumen de ventas puede modelarse mediante la ecuación:

$$S(x) = Ae^{kx},\ 0 \leq x \leq 5,$$

donde $x$ es el número de semanas después de promover cierta venta y A es una constante real positiva.

El volumen de ventas al final de la primera y la tercera semana fue de $ 78 515 y $ 60 055, respectivamente.

Responda a las siguientes preguntas. Utilice una calculadora.

a) Halle la constante de decaimiento $k$.
b) Determine la constante de proporcionalidad $A$.
c) Utilice los valores de $A$ y $k$ obtenidos para encontrar el volumen de ventas en las siguientes semanas:

| **Semana** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Volumen (S/.)** | | | | | |

d) Halle el volumen de ventas en la cuarta semana.
e) Represente la función $S$ a través de una gráfica e interprete dicha gráfica.
f) ¿Después de cuántos días el supermercado tendrá un volumen de ventas de $ 50 000?

12. Patricia, gerente administradora de M&D, empresa familiar dedicada a la venta de artículos para damas, ha encomendado a su hermana Mariela que investigue acerca de cómo se han ido incrementando sus ganancias en el departamento de prendas de vestir en los últimos años. Mariela, al revisar los registros de ganancias, observa que las ganancias crecieron de $ 15 000 en 1985 a $ 30 000 en el 2005. Con los conocimientos adquiridos luego de haber llevado el curso de Matemáticas en una prestigiosa universidad,

Mariela ha decidido encontrar expresiones matemáticas que representen dichas ganancias en el tiempo, tarea que realiza con mucho éxito.

Si $x$ es el número de años transcurridos a partir de 1985, resuelva lo siguiente:

a) Suponiendo que la ganancia ha crecido linealmente, determine una expresión matemática que represente dicho pago en términos de $x$.

b) Suponiendo que la ganancia ha crecido exponencialmente, determine una expresión matemática (de la forma ) que represente dicho pago.

c) Use la expresión encontrada en la parte a) para completar la columna (I) y la expresión encontrada en b) para completar la columna (II) de la siguiente tabla.

| $x$ | (I) Crecimiento lineal de las ventas | (II) Crecimiento exponencial de las ventas |
|---|---|---|
| 0 | 15 000 | 15 000 |
| 5 | | |
| 10 | | |
| 15 | | |
| 20 | 30 000 | 30 000 |
| 25 | | |
| 30 | | |

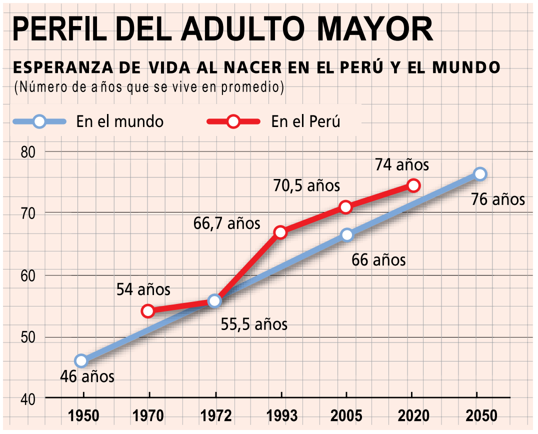
d) En un mismo sistema de coordenadas, bosqueje las funciones representadas en las columnas (I) y (II) de la tabla anterior.

## 2.6. Análisis de gráficas

Tal como estudiamos las escalas en el capítulo 1, debemos ahora aprender a analizar los gráficos de distintos tipos de funciones. Los gráficos son, muchas veces, una manera sencilla y económica de representar gran cantidad de información. Qué tan fácil sea para nosotros interpretar las gráficas dependerá de cuánto nos entrenemos en esta labor. Por último, qué tan bien entrenados estemos nos ayudará a detectar en las gráficas errores que —por descuido o por una manipulación deliberada de los datos— deforman la información en la que se basan las gráficas. Esto es de particular importancia si pensamos en el uso que se da a las gráficas; por ejemplo, en el medio publicitario (recordemos los informes de rentabilidad de las AFP, los bancos, la reducción del porcentaje de calorías por el consumo habitual de algún producto, etcétera). A dicho entrenamiento está dedicado este subcapítulo.

### Situación 11

A continuación se muestra información relacionada con el perfil del adulto mayor en el Perú y en el mundo.




**Fuentes:** Instituto Nacional de Estadística e Informática y Ministerio de la Mujer y el Desarrollo. *Plan Nacional para las Personas Adultas Mayores 2006-2010*. Lima: INEI y MIMDES.
Encuesta Nacional de Hogares (2003-2004)

Comente el gráfico:

a) Señalando qué variables se relacionan.
b) Explicando primero el comportamiento de dichas variable en el Perú y luego en el mundo.
c) Elaborando dos conclusiones que resulten de comparar los dos gráficos.
d) Mostrando que la gráfica de la esperanza de vida en el mundo no es una recta.
e) Explicando por qué la gráfica de la esperanza de vida en el mundo parece una recta.

**Solución propuesta**

a) El gráfico relaciona la esperanza de vida al nacer en el Perú y el mundo a lo largo del tiempo. Por lo tanto, las variables relacionadas son esperanza de vida y tiempo.

b) Entre 1950 y 2050, la esperanza de vida en el Perú es siempre mayor que la esperanza de vida en el mundo, excepto en 1972. En 1970, la esperanza de vida en el Perú fue de 54 años en promedio, y a partir de ese año ha ido incrementándose con un crecimiento no constante. En 1950, la esperanza de vida en el mundo fue de 46 años en promedio y aparentemente ha ido incrementándose en forma constante con el transcurso de los años.

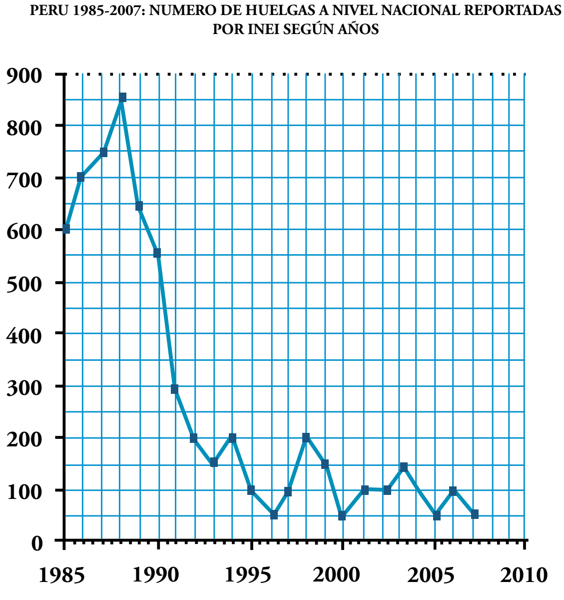
c) La esperanza de vida en el Perú siempre es mayor que la esperanza de vida en el mundo excepto en 1972 en el que fue la misma (55,5 años).

d) No es una recta, porque al calcular las pendientes para distintos intervalos de tiempo estas son diferentes. Así, por ejemplo, de 1950 a 1972 la pendiente es 0,43; mientras que de 1972 a 2005 la pendiente es 0,32.

e) Porque los intervalos de tiempo en el eje X tienen diferente longitud en años.

## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 2.6

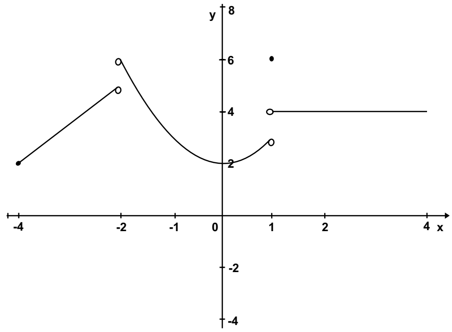
1. El siguiente gráfico muestra el número de huelgas a nivel nacional reportadas por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) entre 1985 y el 2007.




A partir de los datos mostrados en el cuadro, responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué variables se relacionan?
b) ¿Es posible determinar el dominio y rango de la función representada en el gráfico? ¿Son estas variables discretas o continuas?
c) Según la gráfica, ¿en qué año se realizó el mayor número de huelgas?
d) ¿Cómo se podría obtener el número total de huelgas entre 1995 y el 2007?

2. La siguiente gráfica representa a la función $f$:

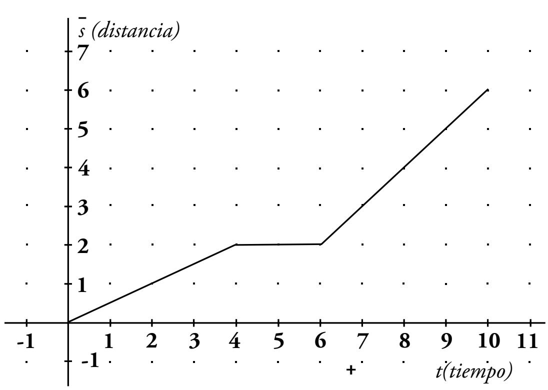



a) Determine el dominio y el rango de $f$.
b) Encuentre los intervalos donde $f$ es creciente, decreciente o constante.
c) Encuentre el valor máximo y el valor mínimo de $f$.
d) Evalúe la expresión:

$$E = \frac{f(-4) + 3f(0)}{f(5 - f(2))}$$

e) ¿Es posible encontrar los valores de $f(-1)$ y $f(3)$?

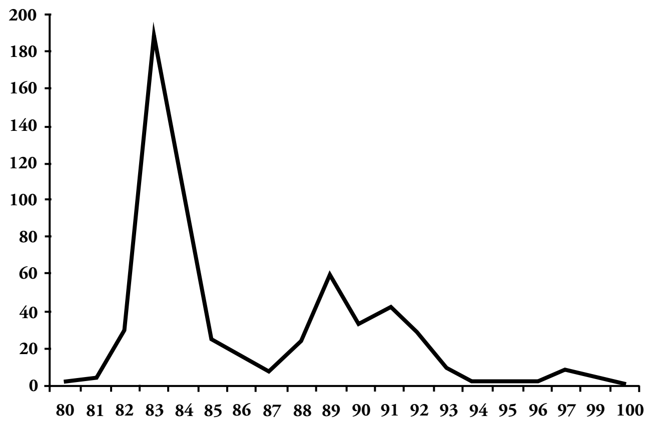
3. En el gráfico siguiente se muestra la distancia que recorre un estudiante en su camino de 10 minutos a la escuela,




donde el tiempo $t$ está dado en minutos y la distancia $s$ en millas.

a) Dé una descripción verbal de las características del recorrido del estudiante hacia la escuela.
b) Encuentre la regla de correspondencia asociada a la gráfica de la función.

4. El siguiente gráfico muestra el número de desapariciones forzadas atribuidas a las fuerzas policiales reportadas a la Comisión de la Verdad y Reconciliación (CVR) en las zonas de emergencia en Perú entre 1980 y el 2000.




A partir de los datos mostrados en el cuadro, responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué variables se relacionan?
b) ¿Es posible determinar el dominio y rango de la función? ¿Son estas variables discretas o continuas?
c) ¿Es posible determinar la regla de correspondencia para el gráfico que se presenta?
d) Según la gráfica, ¿entre qué años la zona de emergencia tuvo el mayor número de desapariciones forzadas?
e) ¿Podría inferirse, a partir de la gráfica, que el año en que más abusos cometieron las fuerzas policiales fue también el año en que más recrudeció el terrorismo?
f) ¿Cómo se podría obtener el número total de desapariciones forzadas entre 1980 y el 2000?

# Capítulo 3
# Análisis de datos

Desde la Antigüedad, el ser humano ha requerido mantener un registro de diferentes tipos de datos: ya sea la cantidad de trigo o maíz producido, el vino almacenado, los tributos recaudados, etcétera. Las diferentes organizaciones y sociedades humanas se han servido de una serie de recursos para poder hacer fácil el registro de toda esta información, su comparación y manejo. Así, según una hipótesis bastante plausible, los incas —quienes habitaron y gobernaron sobre gran parte de lo que hoy son los países de Perú, Ecuador, Bolivia, Chile, Argentina y Venezuela— utilizaron los *quipus* como una herramienta sumamente sofisticada para registrar la información importante para la manutención del Tahuantinsuyu. Hoy en día, también los Estados modernos requieren tener un conocimiento preciso de cómo ha evolucionado la producción de ciertas materias primas, el ritmo de crecimiento o decrecimiento de su tasa de natalidad/mortalidad, etcétera. Por ello es fundamental el estudio de la Estadística, la cual en sus diferentes ramas sirve para organizar de manera sencilla gran cantidad de información para compararla y para que, eventualmente, tomando en cuenta la información recopilada y organizada, se puedan tomar decisiones adecuadas a la realidad del país.

En este capítulo estudiaremos algunos conceptos elementales de la Estadística: qué se entiende por variable estadística, qué tipos de variables estadísticas existen, qué tipos de gráficos pueden ser útiles para representar datos estadísticos y, por último, de qué manera podemos obtener medidas representativas de la población que estudiamos y cómo podemos dividirla (o cómo podemos agrupar cierto número de datos) de acuerdo con nuestras necesidades.

## 3.1. Variable estadística. Definición. Clasificación

Cuando necesitamos describir a una persona podemos apelar a una serie de características de diverso tipo, que van desde características físicas (altura, peso, color de ojos, color de cabello, etcétera) hasta preferencias musicales o deportivas (escucha solo rock, salsa, mambo; es hincha de Universitario de Deportes, Alianza Lima, Deportivo Municipal, etcétera), pasando por la profesión (psicólogo, abogado, sociólogo, etcétera) o la localidad de residencia (Lima, Los Olivos, Pueblo Libre, Callao, etcétera). La elección de una de estas características dependerá de las necesidades que debamos satisfacer en el estudio que realicemos. Por ejemplo, imaginemos que para la campaña presidencial del 2011 deseamos conocer qué personas apoyarán al Partido de Abogados Unidos. Al realizar una encuesta, tal vez nos interese saber no solo quiénes apoyan al partido, sino complementar esta información con la ocupación a la que se dedican, el nivel de ingresos que tienen en su trabajo, etcétera, con el fin de planificar el resto de la campaña. Podríamos, por ejemplo, tener un cuadro donde se indique —en las personas mayores de 50 años— cuántas de ellas apoyan a este partido, o cuántas personas entre 18 y 25 años que sean estudiantes universitarios aún no conocen el plan de gobierno del partido. En cualquier caso, cada una de las características que hemos señalado puede constituir una perspectiva de análisis de una población. A discriminar el distinto modo de trabajo con estos tipos de datos está dedicado este subcapítulo. En seguida, encontraremos situaciones problema que nos permitirán fácilmente reconocer cuándo es válido hablar de «variables estadísticas», así como diferenciar sus distintas clases.

### Situación 1

Federico es un estudiante que cursa el octavo ciclo de Antropología y un grupo de investigadores lo ha invitado para hacer un censo en una comunidad asháninka ubicada en el departamento de Loreto. Federico está encargado de estudiar las variables que se muestran en la tabla.

- En la segunda columna, escriba una de las posibles respuestas que puede dar un comunero asháninka.
- En la tercera columna, indique de qué tipo son las variables estudiadas por Federico.

| Variable estudiada | Posible respuesta | Tipo de variable |
|---|---|---|
| El tiempo que se demora en llegar de su comunidad a la ciudad de Iquitos | | |
| El grado de instrucción que posee | | |
| El número de hijos que tiene | | |
| Su edad | | |
| Su religión | | |
| Su ingreso semanal | | |
| Su estado civil | | |
| Su estatura | | |

### Situación 2

Los alumnos de la especialidad de Publicidad necesitan averiguar ciertos datos acerca de los alumnos matriculados en un curso de Matemáticas con la intención de diseñar la campaña publicitaria para un nuevo producto. Dado que son muchos alumnos, escogen una muestra de 50 personas. Los datos que se recabarán de cada alumno son los siguientes:

- Género
- Especialidad en la que está matriculado
- Escala de pago
- Nivel de agrado por las matemáticas (de 1 a 4, de menor a mayor nivel de agrado)
- Orden de mérito en el examen de ingreso
- Número de cursos en que está matriculado
- Número de veces que ha llevado el curso de Matemáticas
- Nivel socioeconómico
- Edad (en años cumplidos)

a) Dé las posibles respuestas de dos alumnos a cada una de las preguntas.
b) ¿Tiene sentido calcular la media aritmética (suma de respuestas entre el número de respuestas) para cada una de los datos que se recolectarán? ¿Por qué?

## Solución propuesta

a) Algunas posibles respuestas son las siguientes:
   - Masculino, femenino
   - Derecho y Psicología
   - 1 y 5
   - 2 y 3
   - Primer puesto y tercer puesto
   - 4 y 6
   - 1 y 3
   - Bajo y alto
   - 17 y 19

b) Calcular la media aritmética solo tiene sentido para el número de cursos en que está matriculado, número de veces que ha llevado el curso de Matemáticas y edad en años cumplidos.

Las situaciones 1 y 2 han servido para introducir el tema de *variables estadísticas*. A continuación se presentan algunas definiciones elementales.

**Definiciones elementales**

**Estadística:** es una ciencia que se ocupa de la recolección, organización, presentación y del análisis de datos. La Estadística descriptiva se ocupa de describir lo que ocurre en una muestra de datos, mientras que la Estadística inferencial se ocupa de, a partir de los resultados obtenidos de una muestra relativamente pequeña, hacer inferencias o generalizaciones con un margen de error.

**Población:** es un conjunto cuyos elementos tienen características que se pueden observar o medir. Es el conjunto formado por los sujetos que van a ser materia de estudio, los cuales pueden ser personas, animales, objetos, instituciones, etcétera.

**Muestra:** es una parte de la población que se selecciona para hacer un estudio. Lo ideal es que se elija de modo que sea representativa para que aporte información confiable sobre la población en su conjunto, sin necesidad de estudiar a todos los individuos de esta.

**Variables estadísticas:** una variable estadística es una propiedad o característica de los elementos que componen una determinada población. Dicha característica debe ser factible de medirse u observarse. Así, por ejemplo, en la población formada por los alumnos de una determinada clase, se pueden estudiar variables como la estatura, el número de hermanos, el número de cursos que llevan en un semestre académico, el sexo, etcétera. Al observarse o medirse una variable en un determinado sujeto de la población, se obtiene un dato estadístico.

**Tipos de variables**

Una forma de clasificar las variables es la siguiente:

1. **Variables cuantitativas**

   Son aquellas que se pueden medir de manera que produzcan datos numéricos. Los datos son numéricos cuando se pueden realizar operaciones aritméticas con los valores de dichos datos y estas operaciones tienen significado.

   Son ejemplos de variables cuantitativas la edad, los ingresos mensuales, el costo de un producto, la nota final en el curso de Matemáticas, etcétera.

   Las variables cuantitativas se clasifican a su vez en: cuantitativas continuas y cuantitativas discretas.

   **1.1. Variables cuantitativas continuas**

   Son aquellas cuyos valores posibles constituyen un intervalo.

Ejemplos: la temperatura, la velocidad de un auto, la capacidad de un recipiente, el peso, etcétera.

**1.2. Variables cuantitativas discretas**

Son aquellas cuyos valores posibles se pueden enumerar.

Ejemplos: el número de hijos de una familia, que pueden ser 0, 1, 2, etcétera, pero no un valor intermedio; el número de créditos que puede llevar un alumno de la universidad, que pueden ser 0; 1; 1,5; 2; 2,5; etcétera, pero no un valor intermedio, por ejemplo, 2,66 créditos.

**2. Variables cualitativas**

Son aquellas que solo se pueden medir en datos que expresan distintas cualidades, las cuales no pueden traducirse numéricamente. Los diferentes valores que toma una variable cualitativa se denominan cualidades o atributos; la medición consiste en clasificar a cada sujeto de la población en dichos atributos. Son ejemplos de variables cualitativas: el género, el lugar de residencia, el nivel socioeconómico, etcétera.

Las variables cualitativas pueden a su vez tener un nivel de medición nominal u ordinal.

**2.1. Variables cualitativas ordinales**

Cuando los valores que toma la variable se pueden ordenar siguiendo alguna escala establecida, de manera que dicho orden expresa un grado de posesión de la característica medida en la variable.

Ejemplos:

El nivel de dominio de un idioma hablado que puede clasificarse en elemental, medio, avanzado, excelente; el grado de instrucción de una persona que puede clasificarse en: inicial, primaria, secundaria, superior; etcétera.

**2.2. Variables cualitativas nominales**

Son aquellas en las que no se puede establecer un orden para los atributos. Únicamente clasifican en categorías a los sujetos de la población. Ejemplos: el color de cabello en las personas. el género, el curso preferido, etcétera.

## Situación 3

Para cada una de las siguientes variables, señale si se trata de una variable cualitativa nominal, cualitativa ordinal, cuantitativa discreta o cuantitativa continua.

a) Religión profesada
b) Marca de gaseosa favorita
c) Estatura
d) Nivel de aceptación del gobierno actual (de 0 a 5, de menor a mayor aceptación)
e) Nivel socioeconómico
f) Restaurante favorito
g) Gasto diario (en soles) por concepto de alimentación
h) Número de hermanos

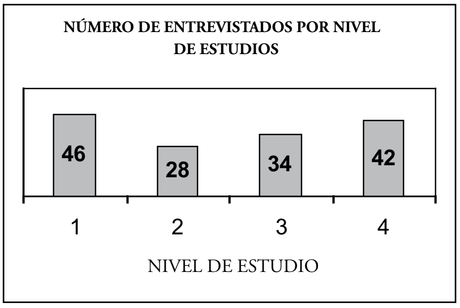
## Solución propuesta

a) Cualitativa nominal
b) Cualitativa nominal
c) Cuantitativa continua
d) Cualitativa ordinal
e) Cualitativa ordinal
f) Cualitativa nominal
g) Cuantitativa continua (por convención)
h) Cuantitativa discreta

# Más situaciones problema para practicar

## Problemas 3.1

1. Para cada una de las siguientes variables, señale si se trata de una variable cualitativa nominal, cualitativa ordinal, cuantitativa discreta o cuantitativa continua.
   a) Sueldo de un empleado
   b) Marca de chocolate favorito
   c) Estado civil de una persona
   d) Grado de instrucción de una persona
   e) Religión practicada por una persona
   f) Grado de acuerdo o desacuerdo con la política de gobierno
   g) Edad de una persona
   h) Preferencia política
   i) Cantidad de acciones vendidas diariamente en la Bolsa de Valores
2. Para cada una de las siguientes variables, indique si se trata de una variable cualitativa o cuantitativa, y si es del tipo ordinal, nominal, discreta o continua. Señale una posible población de estudio para cada caso.
   a) Distrito de residencia
   b) Tiempo que emplea en desplazarse de su casa a su centro de estudios
   c) Emisora radial favorita
   d) Número de veces al mes que come en un restaurante de comida rápida
   e) Cantidad de teléfonos celulares que ha tenido hasta hoy
   f) Rendimiento en el curso de Matemáticas (muy bueno, bueno, regular, malo).
3. En el siguiente gráfico, se muestran los resultados de una encuesta realizada a un grupo de habitantes del distrito de San Miguel.




   a) Determine la variable estadística involucrada y señale de qué tipo es.

b) Determine cuál fue la muestra y señale una posible población sobre la cual se hizo el estudio.

4. En la siguiente tabla, se muestra información acerca del número de vehículos de transporte público que toman en un día un grupo de estudiantes de la Universidad del Futuro para desplazarse de su casa a la universidad.

| Número de vehículos de transporte público que toma al día | Número de estudiantes |
|---|---|
| 0 vehículos | 34 |
| 1 vehículos | 67 |
| 2 vehículos | 161 |
| 3 vehículos | 45 |
| 4 vehículos | 68 |
| **Total** | **375** |

a) Determine la variable estadística involucrada y señale de qué tipo es.
b) Determine cuál fue la muestra y señale una posible población sobre la cual se hizo el estudio.

## 3.2. Tablas de distribución de frecuencias para una variable

Ahora que hemos visto con qué tipos de variables podemos encontrarnos, debemos estudiar de qué manera podemos tabular los datos con los que trabajaremos con el fin de organizar la información de manera sistemática y significativa. En gran medida, el tipo de tabla y las características particulares de estas dependerán de nuestra pericia como usuarios de la Estadística para tabular los datos y distribuirlos de tal modo que el resultado sea útil y comprensible.

### Situación 4

María Fernanda entrevistó a un grupo de 50 personas acerca del tipo de programa de televisión que prefiere ver. Ella utilizó los siguientes códigos para registrar su información:

| | | |
|---|---|---|
| A: Aventura | C: Comedia | D: Deporte |
| E: Ecología | H: Historia | M: Música |
| N: Noticias | S: Suspenso | T: Telenovelas |

Los datos que María Fernanda registró son los siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | C | A | N | D | T | E | D | T | T |
| A | H | D | H | T | M | N | S | D | H |
| E | S | M | A | C | C | C | D | D | E |
| M | T | E | D | E | S | S | H | N | A |
| A | C | S | M | A | A | M | S | C | N |

Represente los datos en una tabla de frecuencias.

### Situación 5

A 20 alumnas se les preguntó cuál de los siguientes colores preferían usar en el verano: azul, rojo o blanco. Los datos que se obtuvieron se presentan a continuación en dos tablas diferentes.

**Tabla 1**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rojo | Blanco | Blanco | Azul | Blanco |
| Azul | Azul | Azul | Azul | Rojo |
| Blanco | Blanco | Blanco | Blanco | Azul |
| Azul | Rojo | Azul | Azul | Blanco |

**Tabla 2**

| **Color de polo** | **Cantidad de alumnas** |
|---|---|
| Rojo | 3 |
| Blanco | 8 |
| Azul | 9 |
| **Total** | **20** |

¿Cómo se podría garantizar que ambas tablas representan la misma información? ¿De cuál de las dos maneras conviene presentar los datos, como en la tabla 1 o como en la tabla 2? Justifique su respuesta.

### Solución propuesta

Ambas tablas representan la misma información, pues luego de contar las respuestas dadas para cada color se puede construir la segunda. La segunda tabla resulta más conveniente si lo que se desea es observar la cantidad de alumnas que prefieren determinado color de polo para el verano. Es decir, la segunda tabla es más ventajosa porque presenta la información mejor organizada; esto es útil cuando se dispone de muchos datos.

### Situación 6

Los siguientes datos se refieren al nivel socioeconómico (A: alto, M: medio y B: bajo) de 40 familias de un distrito de Lima.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | A | A | M | B | A | A | B | M | B |
| B | M | B | B | B | M | M | B | M | B |
| M | M | B | B | M | M | M | M | B | A |
| A | B | M | A | A | B | B | A | B | M |

Represente dichos datos siguiendo el esquema de la segunda tabla de la situación anterior.

### Solución propuesta

Luego de contar los datos correspondientes a cada valor de la variable considerada se obtiene la siguiente tabla:

| **Nivel socioeconómico** | **Cantidad de familias** |
|---|---|
| Bajo | 17 |
| Medio | 14 |
| Alto | 9 |
| **Total** | **40** |

Las situaciones 4, 5 y 6 han servido para mostrar que los datos se pueden organizar según una distribución que indique el número de veces que se presenta cada dato.

Luego de medir las variables deseadas en los sujetos de la población estudiada obtenemos datos. Es necesario organizar estos datos de manera que puedan usarse eficientemente en una investigación. La organización de los datos comprende la presentación numérica y la presentación gráfica. Para la primera se emplearán tablas de frecuencias; para la segunda se mostrarán los gráficos estadísticos más usados.

**Tablas de distribución de frecuencias de una variable**

Las distribuciones de frecuencias son cuadros numéricos en los que se representa una variable estadística. Una distribución de frecuencias en su forma completa tiene la siguiente estructura:

| **Clases ($c_i$)** | **Frecuencias absolutas ($f_i$)** | **Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$)** | **Frecuencias acumuladas ($F_i$)** | **Frecuencias relativas acumuladas ($H_i$)** |
|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | $f_1$ | $h_1$ | $F_1$ | $H_1$ |
| $c_2$ | $f_2$ | $h_2$ | $F_2$ | $H_2$ |
| …. | …. | …. | …. | …. |
| $c_k$ | $f_k$ | $h_k$ | $F_k$ | $H_k$ |

Los elementos mínimos indispensables en una distribución de frecuencias son las clases y las frecuencias absolutas.

- La primera columna, las clases, corresponde a los valores de los atributos, de los números o de los intervalos de valores en los que se clasifican los datos.
  - En el caso de las variables cualitativas, las clases son categorías.
  - Si la variable es cualitativa ordinal, las categorías deben estar ordenadas en forma creciente o decreciente según el grado de posesión de la característica que expresan.
  - En el caso de las variables cuantitativas discretas, las clases son los valores numéricos distintos que se presentan en los datos.
  - Cuando la variable cuantitativa es continua se emplean intervalos o clases de la forma [a; b[; esto es una convención.
  - Se emplean algunas reglas empíricas para la determinación del número $k$ de intervalos cuando se tienen $n$ datos. Por ejemplo, se puede elegir $k$ como el menor entero tal que $2^k \geq n$ o emplear la regla de Sturges para que el valor de $k$ sea el menor valor entero mayor o igual que $1 + 3{,}33 \log(n)$.
  - Cuando se trata de una variable discreta que toma muchos valores, estos también se suelen agrupar en intervalos.
- La *frecuencia absoluta* de una clase (*fi*) es el número de datos observados en dicha clase. La suma de todas las frecuencias absolutas debe ser igual al número de datos registrados. Así, se verificará que $f_1 + f_2 + \ldots + f_k = n$ (número total de datos).
- La *frecuencia relativa* de una clase ($h_i$) es igual al cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos; es decir, $h_i = f_i / n$. Así, se verificará que $h_1 + h_2 + \ldots + h_k = 1$.

- La *frecuencia acumulada* ($F_i$) de una clase se obtiene sumando la frecuencia absoluta de dicha clase con las frecuencias absolutas de todas las clases anteriores.
- La *frecuencia relativa acumulada* de una clase ($H_i$) se obtiene sumando la frecuencia relativa de dicha clase con las frecuencias relativas de todas las clases anteriores.

Es preferible trabajar con intervalos o clases con la misma amplitud.
Nosotros utilizaremos, según el tipo de datos, las siguientes tablas:

**Tabla de distribución de frecuencias para datos sin agrupar**

| **Valores de la variable ($x_i$)** | **Frecuencias absolutas ($f_i$)** | **Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$)** | **Frecuencias acumuladas ($F_i$)** | **Frecuencias relativas acumuladas ($H_i$)** |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f_1$ | $h_1$ | $F_1$ | $H_1$ |
| $x_2$ | $f_2$ | $h_2$ | $F_2$ | $H_2$ |
| …. | …. | …. | …. | …. |
| $x_k$ | $f_k$ | $h_k$ | $F_k$ | $H_k$ |
| | **Número total de datos (n)** | **1** | | |

donde: $x_i$ es uno de los valores que toma la variable en estudio.

**Tabla de distribución de frecuencias para datos agrupados**

| **Intervalos $[x_i - x_{i+1}[$** | **Marca de clase ($x_i'$)** | **Frecuencias absolutas ($f_i$)** | **Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$)** | **Frecuencias acumuladas ($F_i$)** | **Frecuencias relativas acumuladas ($H_i$)** |
|---|---|---|---|---|---|
| $[x_1 - x_2[$ | $x_{1'}$ | $f_1$ | $h_1$ | $F_1$ | $H_1$ |
| $[x_2 - x_3[$ | $x_{2'}$ | $f_2$ | $h_2$ | $F_2$ | $H_2$ |
| …. | …. | …. | …. | …. | …. |
| $[x_k - x_{k+1}]$ | $x_{k'}$ | $f_k$ | $h_k$ | $F_k$ | $H_k$ |
| | | **Número total de datos (n)** | **1** | | |

donde:
la marca de clase de un intervalo es el valor medio de los extremos del intervalo. Así, en el intervalo $[x_i; x_{i+1}[$, la marca de clase $x_i'$ es igual a: $x_i' = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

## Situación 7

Se lanzaron 2 dados 80 veces y se anotó la suma de los valores obtenidos en la cara superior de ambos dados, obteniéndose los siguientes resultados:

| Suma obtenida al lanzar los dos dados | Número de veces que esto ocurrió |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 4 |
| 5 | 10 |
| 6 | 2 |
| 7 | 18 |

| Suma obtenida al lanzar los dos dados | Número de veces que esto ocurrió |
|---|---|
| 8 | 12 |
| 9 | 4 |
| 10 | 8 |
| 11 | 4 |
| 12 | 6 |

a) Construya la tabla de distribución de frecuencias asociada a estos datos.
b) ¿Cuántas veces la suma obtenida fue 6?
c) ¿Cuántas veces la suma obtenida fue menor o igual a 9?
d) ¿Cuántas veces la suma obtenida fue mayor que 5?
e) ¿Qué porcentaje de las observaciones fue 12?
f) ¿Qué porcentaje de las observaciones fue menor o igual a 10?
g) ¿Qué porcentaje de las observaciones fue mayor que 6?

## Solución propuesta

a)

| Valores de la variable ($x_i$) | Frecuencias absolutas ($f_i$) | Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$) | Frecuencias acumuladas ($F_i$) | Frecuencias relativas acumuladas ($H_i$) |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 0,050 | 4 | 0,05 |
| 3 | 8 | 0,100 | 12 | 0,15 |
| 4 | 4 | 0,050 | 16 | 0,20 |
| 5 | 10 | 0,125 | 26 | 0,325 |
| 6 | 2 | 0,025 | 28 | 0,35 |
| 7 | 18 | 0,225 | 46 | 0,575 |
| 8 | 12 | 0,150 | 58 | 0,725 |
| 9 | 4 | 0,050 | 62 | 0,775 |
| 10 | 8 | 0,100 | 70 | 0,875 |
| 11 | 4 | 0,050 | 74 | 0,925 |
| 12 | 6 | 0,075 | 80 | 1 |
| | 80 | 1 | | |

b) 2
c) 62
d) 54
e) 7,5%
f) 87,5%
g) 65%

### Situación 8

A continuación se presenta la cantidad de kilómetros recorridos en una carrera de autos por 45 participantes:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 63 | 90 | 36 | 49 | 56 | 64 | 59 | 35 | 78 |
| 43 | 53 | 70 | 57 | 62 | 43 | 68 | 62 | 26 |
| 64 | 72 | 52 | 51 | 62 | 60 | 71 | 61 | 55 |
| 59 | 60 | 67 | 57 | 67 | 61 | 67 | 51 | 81 |
| 53 | 64 | 76 | 44 | 73 | 56 | 62 | 63 | 60 |

a) Construya la tabla de distribución de frecuencias asociada a estos datos con 8 intervalos de igual amplitud.
b) ¿Cuántos de estos datos son mayores o iguales que 50 y menores que 58?
c) ¿Cuántos de estos datos son menores que 74?
d) ¿Cuántos de estos datos son mayores o iguales que 74?
e) ¿Qué porcentaje de las observaciones es mayor o igual que 42, pero menor que 58?
f) ¿Qué porcentaje de las observaciones es menor que 82?
g) ¿Qué porcentaje de las observaciones es mayor o igual que 82?

### Solución propuesta

a)

| **Intervalos** $[x_i; x_{i+1}[$ | **Marca de clase** ($x_i$') | **Frecuencias absolutas** ($f_i$) | **Frecuencias relativas** ($h_i = f_i/n$) | **Frecuencias acumuladas** ($F_i$) | **Frecuencias relativas acumuladas** ($H_i$) |
|---|---|---|---|---|---|
| [ 26 - 34 [ | 30 | 1 | 0,02 | 1 | 0,02 |
| [ 34 - 42 [ | 38 | 2 | 0,04 | 3 | 0,06 |
| [ 42 - 50 [ | 46 | 4 | 0,09 | 7 | 0,15 |
| [ 50 - 58 [ | 54 | 10 | 0,22 | 17 | 0,38 |
| [ 58 - 66 [ | 62 | 16 | 0,36 | 33 | 0,73 |
| [ 66 - 74 [ | 70 | 8 | 0,18 | 41 | 0,91 |
| [ 74 - 82 [ | 78 | 3 | 0,07 | 44 | 0,98 |
| [ 82 - 90 ] | 86 | 1 | 0,02 | 45 | 1 |
| | | 45 | 1 | | |

b) 1
   0

c) 41

d) 4

e) 31%

f) 98%

g) 2%

## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 3.2

1. Los siguientes datos muestran los puntajes de un test psicológico aplicado a 40 niños de un centro de educación inicial.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 17 | 27 | 20 | 28 | 10 | 34 | 25 | 4 | 24 |
| 15 | 39 | 18 | 30 | 41 | 26 | 12 | 46 | 18 | 23 |
| 36 | 19 | 29 | 37 | 33 | 27 | 27 | 24 | 26 | 31 |
| 25 | 28 | 33 | 28 | 22 | 33 | 31 | 29 | 35 | 21 |

a) Señale cuál fue la variable estudiada y clasifíquela adecuadamente.
b) ¿Se podrían representar los datos empleando una tabla como la tabla 2 de la situación 5? ¿Sería ventajoso?
c) Recordando que [a; b[ denota los números mayores o iguales que a pero menores que b, clasifique los datos en los intervalos de valores indicados y complete el cuadro.

| **Intervalos de puntajes** | **Cantidad de niños** |
|---|---|
| [4 - 11[ | 2 |
| [11 - 18[ | |
| [18 - 25[ | |
| [25 - 32[ | |
| [32 - 39[ | |
| [39 - 46] | |
| **Total** | |

d) Construya la tabla de distribución de frecuencias asociada a los datos utilizando los intervalos dados en la parte c).
e) ¿Cuántos niños han obtenido un puntaje menor que 25?
f) ¿Cuántos niños han obtenido un puntaje mayor o igual que 11, pero menor que 18?
g) ¿Qué porcentaje de niños ha obtenido un puntaje menor que 32?
h) ¿Qué porcentaje de niños ha obtenido un puntaje mayor o igual a 32?

2. Considere los siguientes puntajes obtenidos por 40 alumnos en una prueba (sobre 100 puntos) aplicada en una escuela privada:

**Tabla 1**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 82 | 47 | 75 | 64 | 57 | 82 | 63 | 93 |
| 76 | 68 | 84 | 54 | 88 | 77 | 79 | 80 |
| 94 | 94 | 80 | 94 | 66 | 81 | 67 | 92 |
| 75 | 73 | 66 | 87 | 76 | 45 | 40 | 56 |
| 57 | 74 | 50 | 78 | 71 | 84 | 59 | 76 |

**Tabla 2**

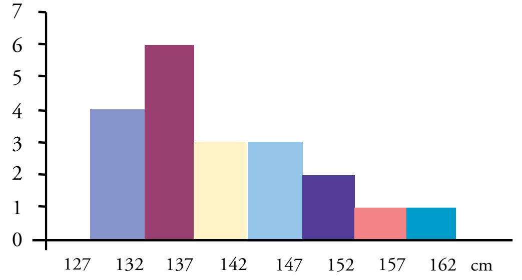
| Puntaje | Número de estudiantes |
|---|---|
| [40 - 49[ | |
| [49 - 58[ | |
| [58 - 67[ | |
| [67 - 76[ | |
| [76 - 85[ | |
| [85 - 94] | |

a) Determine la variable estadística involucrada y señale de qué tipo es.
b) Determine cuál fue la muestra y señale una posible población sobre la cual se hizo el estudio.
c) ¿Conviene presentar la información detallada como en la tabla 1 o resumida como en la tabla 2? ¿Por qué?
d) Construya la tabla de distribución de frecuencias, considerando 6 intervalos de igual amplitud.

Empleando la tabla construida en d), responda a las siguientes preguntas:

e) ¿Cuántos alumnos han obtenido un puntaje menor que 76?
f) ¿Cuántos niños han obtenido un puntaje mayor o igual que 49, pero menor que 58?
g) ¿Qué porcentaje de niños ha obtenido un puntaje menor que 85?
h) ¿Qué porcentaje de niños ha obtenido un puntaje mayor o igual que 85?

3. El gráfico que se muestra a continuación representa las estaturas (en centímetros) de los niños que cursan estudios en la primaria de un colegio. Los números en el eje horizontal corresponden a los extremos de las bases de los rectángulos mostrados.




a) Construya una tabla de distribución de frecuencias señalando los intervalos considerados, sus respectivas marcas de clase y calculando frecuencias absolutas y relativas.
b) ¿Qué porcentaje de los niños mide 142 cm o más?

## 3.3. Representación gráfica: circular, de barras y de puntos

Como hemos señalado ya antes, el principal mérito de las representaciones gráficas es presentarnos de manera simplificada y de un golpe de vista gran cantidad de información que, de otra manera, sería difícil de manejar e interpretar. Esto tiene particular relevancia cuando necesitamos exponer frente a un público los resultados de una investigación que hemos realizado, una análisis de la situación de nuestra empresa en el mercado, la evolución histórica del precio de algún bien insumo, etcétera.

### Situación 9

Los siguientes datos muestran el número de discos compactos que tienen 40 estudiantes del curso de Matemáticas:

| **Número de discos compactos** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 6 | 17 | 3 | 23 | 2 | 12 | 19 |
| 14 | 13 | 12 | 19 | 20 | 11 | 10 | 13 | 7 | 6 |
| 8 | 13 | 16 | 4 | 6 | 7 | 1 | 9 | 3 | 7 |
| 10 | 15 | 17 | 20 | 12 | 1 | 8 | 9 | 7 | 11 |

Elabore un gráfico adecuado para representar la situación mostrada.

### Situación 10

A un grupo de alumnos del primer ciclo de Psicología se les preguntó cuál era su curso preferido hasta el momento. La información se muestra en la siguiente tabla:

| Curso preferido | Número de alumnos |
|---|---|
| Matemáticas | 20 |
| Redacción | 15 |
| Historia | 10 |
| Otros | 5 |
| **Total** | **50** |

A continuación, se presentan dos gráficos pero solo uno de ellos corresponde a la información dada en la tabla anterior:

**Gráfico 1**

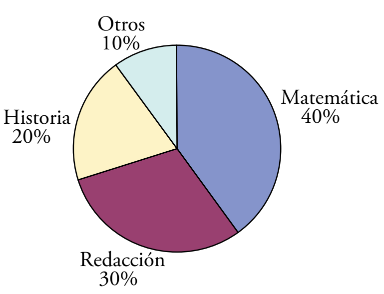
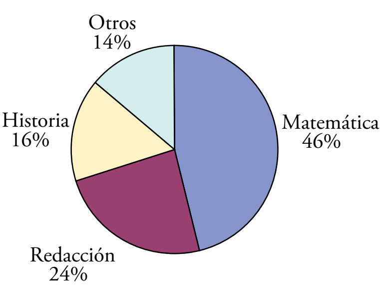



**Gráfico 2**




¿Cuál de los dos gráficos corresponde a la información dada en la tabla? Justifique la respuesta.

## Solución propuesta

El gráfico 1 corresponde a la información presentada en la tabla, dado que se verifican los porcentajes para cada curso.

Las situaciones 9 y 10 han servido para introducir el tema de *gráficos estadísticos*. Existen muchas maneras de representar gráficamente la información «Actualmente», existen programas informáticos que elaboran los gráficos con rapidez y permiten una gran variedad en colores, texturas, formas.

Ante esta variedad de representaciones, cabe preguntarse cuál es el tipo de gráfico más adecuado para representar determinados datos. La respuesta dependerá de dos factores:

- Los tipos de variables que queremos representar en el gráfico.
- Lo que queremos mostrar a través del gráfico.

**Gráficos estadísticos**

La finalidad primordial de un gráfico es presentar cierta información estadística de manera visual, pero también de manera veraz. Para ello los gráficos deben tener títulos, rótulos, unidades y todo elemento que permita una correcta interpretación de la información.

Dentro de los gráficos más usados para representar distribuciones de frecuencias, se encuentran el gráfico de barras (o columnas), el gráfico de sectores circulares y el diagrama de puntos.

**Gráficos de barras**

En un gráfico de barras se representa cada clase a través de una barra vertical (u horizontal) cuya altura (o largo) es proporcional a la frecuencia absoluta de dicha clase. Los gráficos de barras sirven para representar tanto variables cualitativas como cuantitativas. En el caso de variables cualitativas o de variables cuantitativas discretas, las barras deben tener una separación entre ellas. En el caso de variables cuantitativas continuas, las barras van juntas para transmitir la idea de continuidad entre los intervalos. Los gráficos de barras juntas reciben el nombre de histogramas.

## Situación 11

A continuación, se muestra información sobre el nivel socioeconómico (bajo, medio y alto) de un grupo de 40 niños de un colegio de Lima.

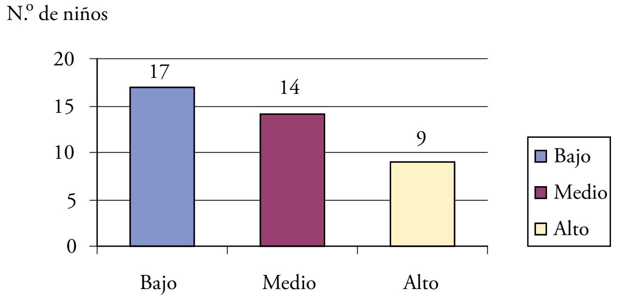
| **Nivel socioeconómico** | **Cantidad de niños** |
|---|---|
| Bajo | 17 |
| Medio | 14 |
| Alto | 9 |
| **Total** | **40** |

a) Señale cuál es la variable de estudio y de qué tipo es.
b) Represente gráficamente la información mostrada en la tabla.

## Solución propuesta

a) La variable de estudio es el nivel socioeconómico que considera las clases: bajo, medio y alto. Esta variable es cualitativa ordinal.
b) La información mostrada se puede representar con un grafico de barras, tal como se muestra a continuación:

**NIVEL SOCIOECONÓMICO DE 40 NIÑOS**




## Situación 12

El cuadro mostrado presenta información sobre el sueldo semanal (en nuevos soles) de 200 profesores que trabajan en grupos de estudio.

| Sueldo semanal (en nuevos soles) | Cantidad de profesores |
|---|---|
| [150 - 180[ | 20 |
| [180 - 210[ | 40 |
| [210 - 240[ | 50 |
| [240 - 270[ | 70 |
| [270 - 300] | 20 |
| **Total** | **200** |

a) Señale cuál es la variable de estudio y de qué tipo es.
b) Represente gráficamente la información mostrada en la tabla.

### Solución propuesta

a) La variable de estudio es el sueldo semanal y es una variable cuantitativa continua.
b) La información mostrada se puede representar con un gráfico de barras, tal como se muestra a continuación.

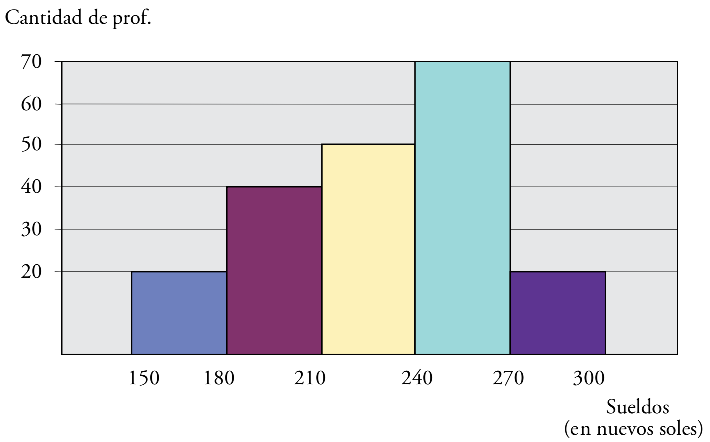


**Gráfico circular o de sectores circulares**

En una gráfica circular, cada clase se representa mediante un sector circular. Dado que la circunferencia completa corresponde a un ángulo central de 360º, la medida en grados del ángulo central correspondiente a una clase con frecuencia relativa $h_k$ es $h_k(360^o)$.
Esto es, los ángulos centrales se relacionan con los porcentajes en la medida que 360º equivale a 100%.
El gráfico circular se emplea para representar variables cualitativas.

## Situación 13

Construya un gráfico circular con la información presentada sobre el nivel socioeconómico de los 40 niños de un colegio de Lima.

| **Nivel socioeconómico** | **Cantidad de niños** |
|---|---|
| Bajo | 17 |
| Medio | 14 |
| Alto | 9 |
| **Total** | **40** |

## Solución propuesta

Se calculan las frecuencias relativas y los respectivos porcentajes para determinar los ángulos de los sectores circulares correspondientes.

| **Nivel socioeconómico** | **$f_i$** | **$h_i$** | **Ángulos** |
|---|---|---|---|
| Bajo | 17 | 0,42 | 153º |
| Medio | 14 | 0,35 | 126º |
| Alto | 9 | 0,23 | 81º |
| **Total** | **40** | **1** | **360º** |

El gráfico circular que da información sobre el nivel socioeconómico de los niños sería el siguiente:

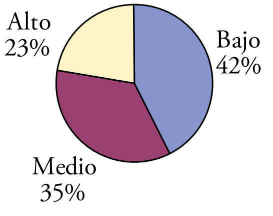


**Gráfico de puntos (o de dispersión unidimensional)**

Un gráfico de puntos consiste en un diagrama con las siguientes características:

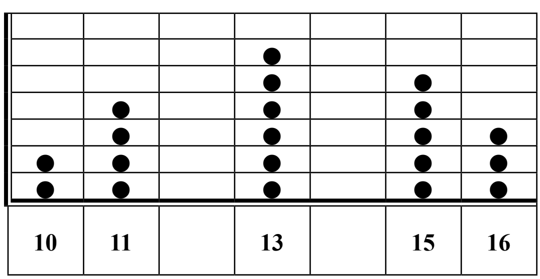
- Un eje horizontal donde se ubican las clases consideradas para la variable representada.
- Cada dato contenido en una clase se grafica mediante un punto que se coloca encima de la correspondiente clase representada en el eje horizontal.
- Los puntos se disponen verticalmente de manera que a cada clase representada en el eje horizontal le corresponden tantos puntos como lo indica la frecuencia absoluta de dicha clase.

Los gráficos de puntos sirven para mostrar los agrupamientos en un conjunto de datos.

Si se toma como ejemplo la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

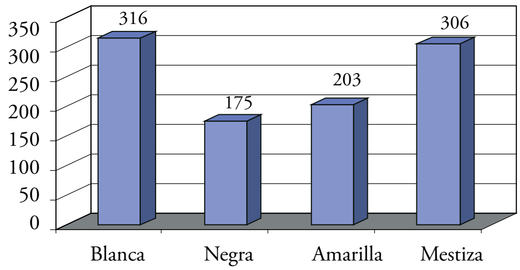
| **Clases** $x_i$ | **Frecuencia absoluta** $f_i$ |
|---|---|
| 10 | 2 |
| 11 | 4 |
| 13 | 6 |
| 15 | 5 |
| 16 | 3 |
| **Total** | **20** |

el diagrama de puntos correspondiente será:



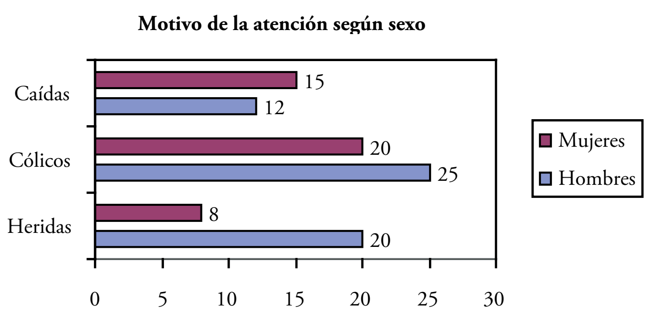
## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 3.3

1. En el siguiente gráfico, se muestra información sobre las defunciones por raza en un determinado país en el 2006.




   a) Determine cuál es la variable estudiada y de qué tipo es.
   b) Construya la tabla de distribución de frecuencias correspondiente al gráfico mostrado.
   c) ¿Sería adecuado ubicar en el gráfico las columnas sin separación entre ellas? Explique.

2. El siguiente gráfico muestra información sobre personas atendidas en la unidad de emergencia de un hospital.




   a) ¿De qué tipo son las variables representadas en el gráfico?
   b) ¿Pueden representarse las dos variables a la vez en una tabla de distribución de frecuencias de una variable?
   c) Elabore gráficos para cada una de las variables identificadas.

3.

a) En la siguiente tabla, se muestra información sobre el grado de preferencia que tiene un grupo de 50 personas respecto a la comida vegetariana.

| **Preferencia por la comida vegetariana** | |
|---|---|
| **Grado de preferencia** | **Número de personas** |
| Nada | 20 |
| Poco | 20 |
| Mucho | 10 |
| **Total** | **50** |

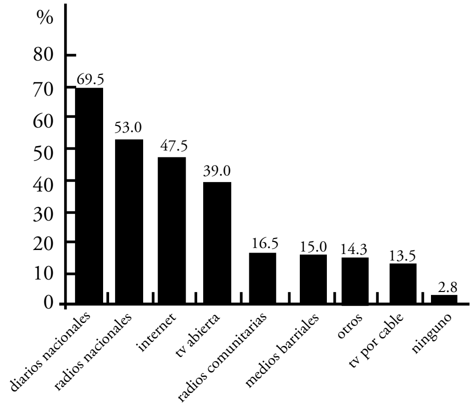
- Señale cuál es la variable involucrada y de qué tipo es.
- Construya una tabla de distribución de frecuencias.
- Elabore un gráfico adecuado para representar la información mostrada.

b) En la siguiente tabla, se muestra información sobre el costo del menú que consumen 28 empleados que laboran en Miraflores.

| **Costo del menú (en nuevos soles)** | **Cantidad de empleados** |
|---|---|
| [8 -10[ | 6 |
| [10 -12[ | 6 |
| [12 - 14[ | 8 |
| [14 - 16[ | 5 |
| [16 - 18] | 3 |
| **Total** | **28** |

- Señale cuáles son las variables involucradas y de qué tipo son.
- Construya una tabla de distribución de frecuencias.
- Elabore un gráfico adecuado para representar la información mostrada.

4. Cuatrocientos entrevistados, entre trabajadores de prensa, estudiantes de comunicación y personas no relacionadas con el periodismo, respondieron a la pregunta *¿qué medios prefiere para informarse mejor?* Los resultados se muestran en el siguiente gráfico:

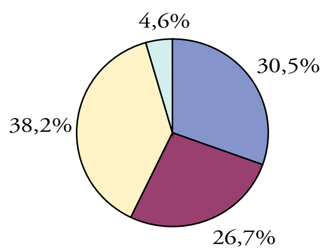



**Fuente:** Postolski, Glenn y Daniel Rodríguez. Encuesta de credibilidad periodística.

- Determine cuál es la variable representada en el gráfico y de qué tipo es.
- ¿Cómo se explica que los porcentajes no sumen 100%? ¿Se podría emplear un diagrama de sectores circulares para representar la información mostrada?

5. La tabla y la gráfica muestran el nivel de instrucción y el uso de métodos anticonceptivos en un grupo de mujeres que fueron atendidas en el Hospital 4 de Mayo durante el 2007.

| Grado de instrucción | Uso de anticonceptivos | | Total |
|---|---|---|---|
| | Usa | No usa | |
| Analfabeta | 10 | 40 | 50 |
| Primaria | 40 | 35 | 75 |
| Secundaria | 60 | 50 | 110 |
| Superior | 23 | 6 | 29 |
| **Total** | **133** | **131** | **264** |




a) Señale cuáles son las variables representadas en la tabla e indique de qué tipo son.
b) ¿A qué parte de la información presentada en la tabla se refiere el gráfico circular mostrado? Complete el gráfico con los nombres adecuados para cada región.
c) Construya un gráfico de columnas que ilustre simultáneamente sobre el uso (y no uso) de métodos anticonceptivos y sobre el grado de instrucción de las mujeres que participaron en el estudio.

## 3.4. Medidas de tendencia central

Hablar de medidas de tendencia central significa, para decirlo con pocas palabras, encontrar valores que sean representativos de una muestra. Por ejemplo, cuál es en un salón de clases la nota que más alumnos obtuvieron, si el profesor desea saber en líneas generales cómo fue el rendimiento de un grupo de alumnos en una práctica calificada. También podríamos preguntarnos cuál fue el promedio de las notas del salón, con el fin de comparar dicho resultado con el de las otras secciones del mismo curso. La manera de realizar los cálculos para hallar los valores exactos dependerá, si tomamos en cuenta los tipos de variables estudiados, de si estamos estudiando variables continuas o variables discretas.

### 3.4.1. Moda y mediana

**Situación 14**

William es un estudiante norteamericano que visita el Perú por intercambio estudiantil. Es aficionado al fútbol y quiere hacerse hincha del equipo peruano de mayor aceptación. Para ello William realizó una encuesta entre algunos amigos peruanos en la que les preguntó por el equipo de fútbol de su preferencia. Los resultados se muestran a continuación:

| Equipo de fútbol favorito | Cantidad de hinchas |
|---|---|
| Sporting Cristal | 5 |
| Cienciano | 4 |
| Universitario de Deportes | 8 |
| Alianza Lima | 6 |

a) ¿Cuál es la variable de estudio y de qué tipo es?
b) ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
c) Si William elige el equipo del que se hará hincha basándose en esta información, ¿qué equipo tendría que elegir?
d) ¿Qué nombre podría llevar en Estadística la respuesta seleccionada en c)?

**Solución propuesta**

a) La variable de estudio es el equipo favorito de fútbol y es una variable cualitativa nominal.
b) 23 personas.

c) William se volvería hincha de Universitario de Deportes porque es el equipo que tiene mayor cantidad de hinchas.
d) La respuesta escogida en c) recibe el nombre de moda.

Generalmente, al considerar un conjunto de datos, se busca un valor que lo represente en el sentido de que se parezca a muchos de los datos. Hay una gran variedad de formas de elegir este representante; en la situación 14 se eligió como representante al valor de mayor frecuencia: la *moda*.

**La moda ($M_o$)**

La moda de un conjunto de datos es el puntaje o categoría que ocurre con la mayor frecuencia, o —equivalentemente— la que se repite más veces.
Se adoptarán las siguientes convenciones:

- Si hay dos valores o categorías que se repiten igual número de veces y dicha cantidad de veces es la más alta, diremos que hay dos modas y que la distribución de datos es bimodal.
- Si ninguna categoría o valor se repite más veces que los otros; o si hay más de dos que se repiten más veces, admitiremos que no hay moda.

Así, por ejemplo, si se tienen los siguientes datos acerca de la escala de pago de 20 alumnos de Estudios Generales Letras:

3 ; 1 ; 2 ; 1 ; 5 ; 5 ; 4 ; 3 ; 4 ; 5
2 ; 4 ; 3 ; 3 ; 2 ; 5 ; 3 ; 2 ; 4 ; 5

se observa que la escala 3 y la escala 5 ocurren cinco veces cada una y esa es la mayor cantidad de veces que se repite uno de los datos. Es decir, dicho conjunto de datos tiene dos modas: escala 3 y escala 5.

## Situación 15

Camila es una delegada estudiantil que recibe el encargo de analizar conjuntos de notas de un determinado curso. Una de las tareas que debe hacer es encontrar, para cada conjunto de notas, el valor $M_e$ que divide el conjunto en dos conjuntos con la misma cantidad de elementos.

a) Un conjunto A de notas es el siguiente: 08, 10, 14, 15, 15, 17, 19. ¿Qué valor de $M_e$ obtendrá Camila?
b) Otro conjunto B de notas es el siguiente: 18, 14, 16, 15, 12, 13. ¿Puede obtener Camila el valor de $M_e$ como lo hizo en el caso anterior? ¿Qué debería hacer?
c) Un tercer conjunto C de notas se presenta en la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

| **Notas** | **Cantidad de alumnos** |
|---|---|
| 8 | 2 |
| 10 | 3 |
| 14 | 7 |
| 15 | 5 |
| 16 | 4 |
| 17 | 2 |
| 19 | 1 |
| **Total** | **24** |

¿Qué columna adicional le sugeriría completar a Camila para hallar un valor para $M_e$? ¿Cuál podría ser ese valor?
d) ¿Se puede calcular $M_e$ para los datos de la situación 14? Justifique la respuesta.

## Solución propuesta

a) Camila obtendrá el valor $M_e = 15$.
b) En este caso, Camila no puede obtener el valor de $M_e$ como en el caso anterior, pero puede proceder de la siguiente manera: ordenar las notas para obtener 12, 13, 14, 15, 16, 18. Luego, elegir un valor que divida al conjunto en dos conjuntos con el mismo número de elementos; podría ser:

$$M_e = \frac{(14 + 15)}{2} = 14{,}5$$

c) En este caso, Camila podría completar la columna con la frecuencia acumulada, tal como se muestra a continuación:

| **Valores de la variable ($x_i$)** | **Frecuencia absoluta ($f_i$)** | **Frecuencia acumulada ($F_i$)** |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 2 |
| 10 | 3 | 5 |
| 14 | 7 | 12 |
| 15 | 5 | 17 |
| 15 | 4 | 21 |
| 17 | 2 | 23 |
| 19 | 1 | 24 |
| **Total** | **24** | |

Y como el valor de $M_e$ se encuentra entre 14 y 15, podría elegir:

$$M_e = \frac{(14 + 15)}{2} = 14{,}5$$

d) Para los datos de la situación 14 no se puede calcular el valor de la mediana, porque la variable no es cuantitativa sino cualitativa nominal.

La situación 15 ha servido para introducir otra medida de tendencia central llamada *mediana*.

**La mediana ($M_e$)**

La mediana es un valor que deja por debajo de él la misma cantidad de datos que hay por encima de él.

La mediana de un conjunto de datos de una variable cuantitativa (ordenados previamente de manera creciente o decreciente) será:

- El dato que ocupa la posición central, si el número de datos es impar.
- El promedio de los dos datos centrales, si el número de datos es par.

Es importante notar que si el número de datos $n$ es impar, entonces el dato central ocupa la posición $\frac{n+1}{2}$. En cambio, si $n$ es par hay dos términos centrales que ocupan los lugares $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$.

Para el caso de variables cualitativas ordinales también se podría definir la mediana luego de ordenar previamente los datos. Pero en lo que sigue solo se calculará la mediana de variables cuantitativas.

### Situación 16

a) Halle la mediana de las siguientes notas obtenidas por un estudiante a lo largo de un curso de Matemáticas: 08; 14; 10; 18; 10; 15; 16.
b) Halle la mediana de las siguientes notas: 120; 100; 200; 250; 150; 200.

### Solución propuesta

a) Para hallar la mediana de las notas 08; 14; 10; 18; 10; 15; 16, primero es necesario ordenarlas.
Así, ordenándolas en forma creciente, se tiene: 08; 10; 10; 14; 15; 16; 18.
Dado que hay n = 7 datos, entonces el término central ocupará la posición:
$\frac{7+1}{2} = 4$.
La mediana será el dato que ocupa la cuarta posición, es decir, $M_e = 14$.
b) Para hallar la mediana de las notas: 120; 100; 200; 250; 150; 200, primero es necesario ordenarlos, obteniéndose 100; 120; 150; 200; 200; 250.
Como hay 6 datos, entonces se consideran los dos términos centrales, es decir, los que ocupan las posiciones 3.ª y 4.ª. La mediana es la semisuma del tercer y cuarto dato. Luego,

$$M_e = \frac{150 + 200}{2} = 175$$

### Situación 17

A continuación, se muestra información sobre el número de hijos por familia en una muestra de 50 familias de cierto asentamiento humano:

| **Número de hijos** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cantidad de familias** | 7 | 8 | 10 | 11 | 9 | 5 |

Halle la mediana de los datos mostrados en la tabla.

### Solución propuesta

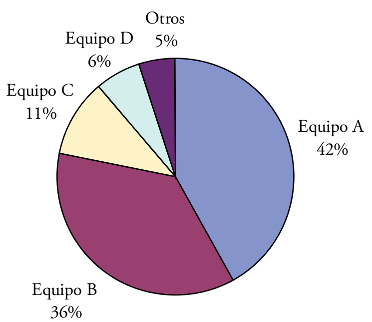
Para hallar la mediana de los datos de una variable discreta cuya información se presenta agrupada en una tabla, se pueden emplear, como antes, las frecuencias acumuladas.

| **Clases** ($x_i$) | **Frecuencia absoluta** ($f_i$) | **Frecuencia acumulada** ($F_i$) |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 7 |
| 1 | 8 | 15 |
| 2 | 10 | 25 |
| 3 | 11 | 36 |
| 4 | 9 | 45 |
| 5 | 5 | 50 |
| **Total** | **50** | |

Dado que hay 50 datos, la mediana será el promedio aritmético de los valores que ocupan los lugares 25.º y 26. º.
De las frecuencias acumuladas se obtiene que el dato 25.º es 2 hijos y el dato 26.º es 3 hijos. Luego, $M_e = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$ hijos por familia.

# Más situaciones problema para practicar
## Problemas 3.4.1

1. El ingeniero responsable de la construcción de un edificio debe planear el espacio destinado a estacionamientos para un nuevo complejo habitacional que tendrá 80 departamentos. Se pide que la propuesta se base en el dato estadístico «una medida de tendencia central del número de vehículos por departamento es 0,9».
   ¿Puede ser 0,9 la mediana de la variable estadística número de vehículos? ¿Puede ser la moda? ¿Por qué?
2. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en una encuesta realizada a un grupo de aficionados al fútbol con la finalidad de determinar la popularidad de los equipos que intervienen en el torneo de primera división.




   Si se sabe que 200 aficionados respondieron que eran hinchas de otros equipos, responda a las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuántos aficionados fueron encuestados?
   b) ¿Cuántos aficionados respondieron que eran hinchas del equipo B?
   c) Construya una distribución de frecuencias para la información presentada.
   d) ¿Es posible determinar la moda y la mediana de los datos? De ser posible, determine dichos valores e interprete su significado.
3. Sobre las carreras que están estudiando un grupo de amigos de la promoción 2005 del colegio Albert Newton se sabe lo siguiente:
   45 estudian Ingeniería industrial, 60 Ingeniería informática, 70 Derecho, 15 Psicología, 19 Economía, 27 Medicina, 18 Publicidad, 15 Arquitectura y 12 Educación.
   Teniendo en cuenta la información dada, realice las siguientes actividades:
   a) Determine la variable estadística involucrada y señale de qué tipo es.
   b) Construya una tabla de distribución de frecuencias para la información dada.

c) Construya un gráfico estadístico adecuado para representar la información dada.

4. Los siguientes datos muestran el total de horas semanales que invierten 50 alumnos en conectarse a internet:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 38 | 17 | 35 | 16 | 14 | 44 | 23 | 36 | 14 |
| 40 | 16 | 41 | 43 | 30 | 36 | 27 | 16 | 42 | 32 |
| 20 | 36 | 14 | 24 | 21 | 31 | 33 | 30 | 35 | 40 |
| 25 | 38 | 24 | 44 | 26 | 37 | 25 | 29 | 40 | 42 |
| 35 | 39 | 39 | 34 | 34 | 36 | 38 | 40 | 32 | 35 |

a) Determine la variable estadística involucrada y señale de qué tipo es.
b) Utilizando seis intervalos de la misma amplitud, elabore una tabla de distribución de frecuencias para datos agrupados que represente la información dada.
c) Construya un gráfico estadístico adecuado para representar la información dada.

### 3.4.2. Media aritmética

**Situación 18**

Jocelyn registra las notas de sus 7 primeras actividades en el curso de Matemáticas:

14; 10; 13; 18; 12; 15; 15

a) Calcule la media aritmética de las notas de las actividades de Jocelyn.
b) Si Jocelyn desea que el promedio aritmético de sus 8 primeras notas de actividades en el curso de Matemáticas sea 14, ¿qué nota deberá obtener en la próxima actividad?

**Solución propuesta**

a) La media aritmética de las 7 notas está dada por la suma de las 7 notas dividida entre el número de notas.
Es decir, la media aritmética es $\frac{14+10+13+18+12+15+15}{7}$, que equivale a $\frac{97}{7}$, aproximadamente 13,86.
b) Si se llama $x$ a la nota que desea obtener Jocelyn en la octava actividad, entonces la suma de las 8 notas dividida entre 8 debe dar 14. Es decir: $\frac{97+x}{8} = 14$. Ello será posible si $97 + x = 112$. Luego, necesitará obtener $112 - 97 = 15$ en su siguiente actividad.

La situación 18 ha servido para recordar el concepto de media aritmética.

**Media aritmética de un conjunto de datos**

La media aritmética de un conjunto de datos de una variable cuantitativa es el número que resulta de sumar todos los datos y dividir dicha suma entre el número de datos.

Así, si se tienen los datos: $x_1$; $x_2$; $x_3$; ... ; $x_n$ y se denota la media aritmética de estos datos por $\overline{x}$, entonces:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Esta fórmula se suele expresar mediante la notación sigma para sumas, así:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

La media aritmética (a diferencia de la moda y la mediana) involucra a todos los datos y, por lo tanto, es más sensible a cambiar cuando se modifican los datos. Es la medida de tendencia central que posee las mejores propiedades para trabajar situaciones en la estadística inferencial.

**¿Cómo se halla la media aritmética para datos sin agrupar?**

Si se tienen *n* datos en una distribución de frecuencias simple que consta de *k* clases.

| | |
|---|---|
| $x_1$ | $f_1$ |
| $x_1$ | $f_1$ |
| $x_2$ | $f_2$ |
| ... | ... |
| $x_k$ | $f_k$ |
| **Total** | ***n*** |

Dado que cada uno de los datos se repite tantas veces como lo indica su frecuencia absoluta y la suma de dichas frecuencias absolutas coincide con el número de datos, entonces si se tienen los datos agrupados en *k* clases, la fórmula será:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i f_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i f_i)}{\sum_{i=1}^{k} (f_i)}$$

Por ejemplo, a partir de los siguientes datos, construya una distribución de frecuencias y aproveche dicha distribución para calcular la media aritmética del número de hijos por familia.

| **Número de hijos** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cantidad de familias** | 7 | 8 | 10 | 11 | 9 | 5 |

Se construye una tercera columna en el cuadro donde se colocan los productos de cada valor $x_i$ por su frecuencia absoluta.

| $x_I$ | $f_i$ | $x_I\ f_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 7 | 0 |
| 1 | 8 | 8 |
| 2 | 10 | 20 |
| 3 | 11 | 33 |
| 4 | 9 | 36 |
| 5 | 5 | 25 |

Así, se tendrá que realizar el siguiente cálculo:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_k\ f_k)}{\sum_{k=1}^{m} (f_k)} = \frac{122}{50} = 2{,}44$$

Luego, el número promedio de hijos por cada familia en esta muestra es 2,44 hijos.

**¿Cómo se halla la media aritmética para datos agrupados?**

Cuando los datos con los que se cuenta han sido dados en intervalos, se requiere elegir un representante de cada intervalo para realizar el cálculo de la media aritmética. Adoptaremos como representante a la marca de clase de cada clase o intervalo.
Así, se empleará la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i' f_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i' f_i)}{\sum_{i=1}^{k} (fi)}$$

Es importante señalar que el resultado que se obtenga será un valor aproximado a la media aritmética que se obtendría si se consideraran los *n* datos originales, es decir, si se consideraran los datos sin agrupar.

## Situación 19

Calcule el ingreso promedio semanal de 200 profesores de academias de preparación a partir de los datos mostrados en la siguiente tabla:

| **Ingresos semanales (en soles)** | **Cantidad de profesores** |
|---|---|
| [150 - 180[ | 70 |
| [180 - 210[ | 40 |
| [210 - 240[ | 50 |
| [240 - 270[ | 70 |
| [270 - 300[ | 20 |
| **Total** | **200** |

**Solución**

Para calcular la media aritmética de los datos agregamos dos columnas más a la tabla anterior: las marcas de clase $x'_i$ y los productos $x'_i.f_i$.

| Intervalos | $f_i$ | $x_i'$ | $x_i'f_i$ |
|---|---|---|---|
| [150 - 180[ | 20 | 165 | 3 300 |
| [180 - 210[ | 40 | 195 | 7 800 |
| [210 - 240[ | 50 | 225 | 11 250 |
| [240 - 270[ | 70 | 255 | 17 850 |
| [270 - 300] | 20 | 285 | 5 700 |
| **Total** | **200** | --- | **45 900** |

De este modo se obtiene:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i' f_i\right)}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{45\,900}{200} = 229{,}5 \text{ soles}$$

Así, el ingreso semanal promedio de estos 200 profesores es S/. 229,5.

# Más situaciones problema para practicar
## Problemas 3.4.2

1. Un grupo de 20 alumnos obtuvo las siguientes calificaciones en un examen cuyo puntaje máximo era 10 puntos.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 |

   Calcule la media aritmética, la mediana y la moda.

2. Al tabular las notas de un examen se obtuvieron los siguientes resultados:

| Nota | Frecuencia |
|---|---|
| 07 | 1 |
| 08 | 1 |
| 09 | 1 |
| 10 | 1 |
| 11 | 1 |
| 12 | 6 |
| 13 | 8 |
| 14 | 16 |
| 15 | 18 |
| 16 | 20 |
| 17 | 2 |

   Calcule la media, la mediana y la moda de dichas notas.

3. El Colegio Médico de un determinado país tomó una muestra de 200 médicos para averiguar sus honorarios por consulta. A continuación se muestra la información parcial obtenida:

| Clases | $x_i'$ | $f_i$ | $h_i$ | $F_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [150 - 180[ | | 20 | | | |
| | | | | 60 | |
| | | | | 110 | |
| | | | 0,25 | | |
| - 300] | | | | | |
| **Total** | | | | | |

   a) Complete la distribución de frecuencias.
   b) Construya un gráfico de barras para representar esta información.
   c) Calcule la media aritmética de los datos.

4. De las edades en años de cuatro personas, se sabe que $\overline{x}$ = 24, Me = 23 y Mo = 22. Determine las edades de las cuatro personas.
5. Una enfermera registró la temperatura media de un paciente durante 10 días consecutivos, y obtuvo los siguientes valores:

   37,8 38,0 37,1 38,2 38,0 38,3 37,5 37,5 37,3 37,2

   a) ¿Cuál es la variable observada y de qué tipo es?
   b) ¿Cuál es la media, mediana y moda de la temperatura?
6. En la unidad de emergencias de un hospital se registró el motivo de atención de los pacientes atendidos durante una semana, y se obtuvieron los siguientes resultados:

| **Motivo de la atención** | **Cantidad de pacientes** |
|---|---|
| Caídas | 35 |
| Heridas provocadas por arma blanca | 30 |
| Atropellos | 45 |
| Cólicos estomacales | 55 |
| Picaduras de insectos | 10 |
| Intoxicaciones | 25 |
| **Total** | **200** |

   a) ¿Cuál es la variable observada y de qué tipo es?
   b) ¿Con qué gráfico se representarían mejor estos datos? Dibuje usted dicho gráfico.
   c) De las tres medidas de tendencia central media, mediana y moda, ¿cuáles tienen sentido para estos datos?
7. Un instituto especialista en realizar estadísticas realizó un estudio sobre la inversión anual, en miles de dólares, de las empresas peruanas. A continuación, se muestra la inversión correspondiente a 40 empresas.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 17 | 27 | 20,4 | 28 | 10,2 | 34 | 25,4 | 4 | 24,5 |
| 15 | 39 | 18 | 30,5 | 41,5 | 26 | 12 | 46 | 18 | 23 |
| 36 | 19,2 | 29 | 37 | 33 | 27 | 27 | 24 | 26,2 | 31 |
| 25,4 | 28 | 33,4 | 28 | 22 | 23 | 31 | 29 | 35 | 21,2 |

   a) Halle la mediana, moda y media de los datos mostrados.
   b) Elabore una tabla de distribución de frecuencias con 6 intervalos de igual amplitud.

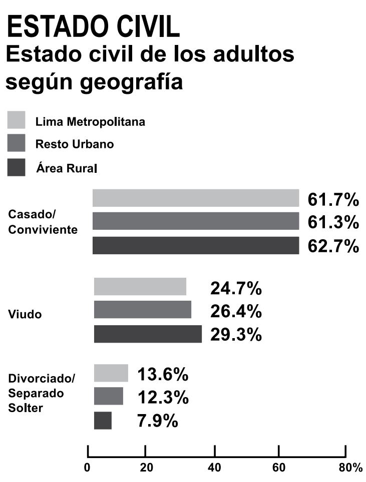
c) ¿Qué porcentaje de empresarios invierte menos de 18 000 dólares anuales?
d) ¿Qué porcentaje de empresarios invierte por lo menos 32 000 dólares anuales?
e) Construya un gráfico estadístico adecuado para representar la información dada.

8. Los siguientes datos muestran el total de horas a la semana que invierten 45 alumnos en interacción con videojuegos

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 38 | 34 | 41 | 26 | 37 | 25 | 29 | 40 |
| 35 | 39 | 39 | 34 | 34 | 36 | 38 | 40 | 32 |
| 37 | 47 | 17 | 35 | 16 | 44 | 46 | 23 | 36 |
| 40 | 43 | 41 | 43 | 30 | 36 | 27 | 16 | 46 |
| 20 | 36 | 12 | 24 | 21 | 31 | 33 | 33 | 35 |

a) Halle la media aritmética, la mediana y la moda de estos datos.
b) Elabore una distribución de frecuencias con 7 intervalos de la misma longitud para estos datos; incluya las frecuencias relativas porcentuales y las marcas de clase.
c) Construya un gráfico estadístico adecuado para representar dicha situación.

9. A continuación, se muestra información relacionada con el estado civil de los pobladores de la provincia Lima.




a) ¿Cuál ha sido la variable estudiada? ¿De qué tipo es y qué valores puede tomar?
b) ¿Se puede elaborar una distribución de frecuencias de los datos obtenidos? Explique.
c) ¿Tiene sentido calcular la media aritmética de los datos? ¿Por qué?
d) ¿De qué otra manera se pueden representar gráficamente los datos?

10. Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas.
    a) Si 6 alumnas tienen la misma nota en un examen, entonces la media, la mediana y la moda de estas 6 notas son iguales.
    b) La mediana de 6 datos que son números naturales es siempre un número natural.
    c) Es posible realizar operaciones algebraicas con variables cualitativas.
    d) Si cada uno de los valores $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, y $x_6$ de una variable estadística es disminuido en una constante c, entonces la nueva media aritmética es igual a la media aritmética de los datos originales, incrementada en la constante *c*.
    e) Si a cada valor $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, y $x_6$ de una variable estadística se le multiplica por una constante c, entonces la nueva media aritmética corresponderá a la media aritmética de los datos originales, multiplicada por *c*.

## 3.5. Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión, como su nombre lo indica, tratan de mostrar cuán dispersos pueden estar los datos respecto de la media de la población que estudiamos. La media es, en cierto sentido, uno de los indicadores que se emplean para representar a una población o a una muestra, dependiendo del caso. Un caso interesante de aplicación de una medida de dispersión es el Craest, el «coeficiente de rendimiento académico estandarizado» que utiliza la Pontificia Universidad Católica del Perú para medir el rendimiento académico de sus alumnos. ¿En qué consiste y cómo funciona este coeficiente? ¿A qué necesidad responde? Todos aquellos que han cursado estudios en algún tipo de institución educativa se deben haber preguntado qué tan justo puede ser el sistema de calificación de un profesor determinado. Suele hablarse de profesores que son más dadivosos al momento de la calificación que otros (calificados normalmente como profesores difíciles). Estos últimos, los profesores difíciles, tienen históricamente un promedio por salón más bajo que los profesores dadivosos. Ello ocasiona malestar en parte del alumnado, pues la asignación del orden de matrícula, así como del orden de mérito en una promoción de egreso, se calculan normalmente utilizando el promedio ponderado de las notas obtenidas por el alumno. Así, sería posible que un alumno, que históricamente se matriculó con profesores «difíciles» (que califican bajo a todo el salón) haya obtenido un promedio algo más bajo que un alumno que se matriculó siempre con profesores «dadivosos» (que califican alto en general): ¿cómo medir cuál de estos dos alumnos ha tenido un mejor rendimiento académico, si no han estado —por decirlo de alguna manera— sometidos a las mismas condiciones de exigencia? Para tratar de solucionar este problema se pensó en el Craest, que mide cuánto se ha distanciado el alumno de la media del salón en que llevó el curso. Entonces, lo que se mide no es ya cuánto obtuvo como promedio final el alumno en su sección, sino cuánto se distanció la nota del alumno del promedio del salón. El Craest mide el número de desviaciones estándar que el alumno se ha alejado de la media del salón. Así, lo que compararemos para ver cuál de los dos alumnos de los que hablábamos ha tenido mejor rendimiento será cuánto se distanció este de sus compañeros de clase no en términos absolutos, sino en términos relativos a la población que representa su salón de clase.

### Situación 20

El siguiente conjunto de datos corresponde al tiempo que emplean un grupo de alumnos para desplazarse desde su casa a la universidad:

| Tiempo de viaje desde su casa a la universidad (en minutos) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 48 | 44 | 36 | 48 | 60 | 37 | 27 | 17 | 28 |
| 63 | 19 | 27 | 36 | 37 | 48 | 65 | 19 | 26 | 23 |
| 47 | 56 | 42 | 27 | 17 | 29 | 47 | 40 | 27 | 35 |
| 28 | 38 | 49 | 51 | 55 | 37 | 20 | 30 | 35 | 37 |

Explique si los datos están muy dispersos respecto a la media aritmética.

## Situación 21

Se desea estudiar el precio de un medicamento (en nuevos soles) en los distritos de Pueblo Libre y Jesús María. En cada distrito se toman muestras aleatorias (al azar) de 8 farmacias.

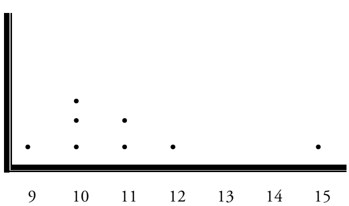
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Jesús María** | 12 | 11 | 10 | 9 | 10 | 15 | 11 | 10 |
| **Pueblo Libre** | 10 | 17 | 7 | 11 | 10 | 11 | 10 | 12 |

a) Elabore el diagrama de puntos correspondiente a los datos de cada distrito.
b) Calcule la media, la mediana y la moda de los precios en cada muestra.
c) ¿Es más barato el medicamento en alguno de estos distritos?
d) ¿Podría decirse que el comportamiento del precio del medicamento es el mismo en ambas muestras?

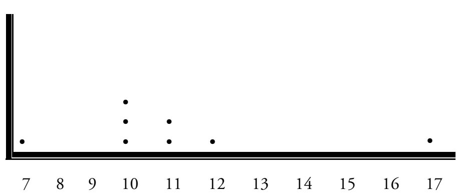
## Solución propuesta

a) Los gráficos que se presentan a continuación son los diagramas de puntos correspondientes.

Jesús María




Pueblo Libre




b) Ordenando los datos de menor a mayor, se tiene lo siguiente:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Jesús María** | 9 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 15 |
| **Pueblo Libre** | 7 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 17 |

| | Jesús María | Pueblo Libre |
|---|---|---|
| **Media** | $\overline{x} = \frac{9 + 3(10) + 2(11) + 12 + 15}{8} = \frac{88}{8}$<br>$\overline{x} = 11$ nuevos soles | $\overline{x} = \frac{7 + 3(10) + 2(11) + 12 + 17}{8} = \frac{88}{8}$<br>$\overline{x} = 11$ nuevos soles |
| **Mediana** | Dado que son 8 datos, la mediana es el promedio entre los datos 4.º y 5.º<br>$Md = \frac{10 + 11}{2} = 10{,}5$ nuevos soles | Dado que son 8 datos, la mediana es el promedio entre los datos 4.º y 5.º<br>$Md = \frac{10 + 11}{2} = 10{,}5$ nuevos soles |
| **Moda** | $Mo = 10$ nuevos soles | $Mo = 10$ nuevos soles |

c) Dado que las tres medidas de tendencia central en la muestra de Pueblo Libre coinciden con las tres medidas de tendencia central en la muestra de Jesús María, no se puede afirmar que el medicamento sea más barato en alguna de las dos muestras.
d) No es el mismo, porque en los diagramas de puntos se puede observar mayor *diferencia entre el precio más alto y el más bajo* en el distrito de Pueblo Libre.

Las situaciones 20 y 21 generan la necesidad de cuantificar los datos que se encuentren más o menos alejados de la media aritmética ya que cuando la media aritmética de dos muestras coincide, ello no implica que los datos se encuentren igualmente distribuidos. Para estos casos conviene trabajar con una *medida de dispersión* que dé cuenta de la tendencia que tienen los datos a diferenciarse entre ellos.

**Medidas de dispersión**

Las *medidas de dispersión o variabilidad* describen qué tan dispersos o tan cohesionados se encuentran los datos de una distribución.
Las medidas de dispersión más estudiadas son la *varianza* y la *desviación estándar*. Estas medidas dan información sobre la distancia a la que se encuentran los datos respecto a la media aritmética.

**Medidas de dispersión poblacionales y medidas de dispersión muestrales**

A diferencia del caso de las medidas de tendencia central, en cuanto a la varianza y desviación estándar, las fórmulas varían según se refieran a datos de una muestra o de toda la población. Esta diferencia en las fórmulas no puede dejarse de lado, especialmente en Estadística inferencial cuando, a partir de la desviación estándar muestral, se pretende estimar la desviación estándar poblacional.

**Fórmulas para la varianza y desviación estándar poblacionales**

Si tenemos un conjunto de $n$ datos: $x_1$; $x_2$; $x_3$; ...; $x_n$ correspondientes a toda una población, consideraremos lo siguiente:

1. Varianza poblacional (denotada por $\sigma^2$ o por $\sigma_n{}^2$)
   Se define la varianza poblacional como la media aritmética de los cuadrados de las diferencias de los $n$ datos con respecto a la media aritmética de dichos datos. Es decir:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

2. Desviación estándar poblacional (denotada por $\sigma$ o por $\sigma_n$)
   Se define la desviación estándar poblacional como la raíz cuadrada de la varianza poblacional. Es decir:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

**Fórmulas para la varianza y desviación estándar muestrales**

Si se tiene un conjunto de $n$ datos: $x_1$; $x_2$; $x_3$; ...; $x_n$ que constituyen una muestra, consideraremos lo siguiente:

3. Varianza muestral (denotada por $s^2$ o por $\sigma_{n-1}{}^2$)
   Se define la varianza muestral mediante la siguiente fórmula:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

4. Desviación estándar muestral (denotada por $s$ o por $\sigma_{n-1}$)
   Se define la desviación estándar poblacional como la raíz cuadrada de la varianza poblacional.

   Es decir: $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$

## Situación 22

Calcule las medidas de dispersión poblacionales y muestrales de los siguientes datos:

5; 6; 6; 8; 7; 7; 9; 5; 4; 11

## Solución propuesta

1.º Se calcula la *media:*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1} x_i}{n} = \frac{5 + 6 + 6 + 8 + 7 + 7 + 9 + 5 + 4 + 11}{10}$$

$$= \frac{5 + 6(2) + 8 + 7(2) + 9 + 5 + 4 + 11}{10}$$

$$= \frac{68}{10} = 6{,}8$$

2.º Se calcula la *varianza poblacional:*

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(5-6{,}8)^2 + (6-6{,}8)^2 + (6-6{,}8)^2 + (8-6{,}8)^2 + (7-6{,}8)^2 +}{10}$$

$$\frac{(7-6{,}8)^2 + (9-6{,}8)^2 + (5-6{,}8)^2 + (4-6{,}8)^2 + (11-6{,}8)^2}{10}$$

$$= \frac{3{,}24 + 0{,}64 + 0{,}64 + 1{,}44 + 0{,}04 + 0{,}04 + 4{,}84 + 3{,}24 + 7{,}84 + 17{,}64}{10}$$

$$= \frac{39{,}6}{10} = 3{,}96$$

3.º Se calcula la *desviación estándar poblacional:*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{39{,}6}{10}} = \sqrt{3{,}96} = 1{,}99$$

4.º Si se tratara de una muestra, se realizaría la siguiente operación para hallar la *varianza muestral:*

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{39{,}6}{10-1} = \frac{39{,}6}{9} = 4{,}4$$

5.º Se calcula la *desviación estándar muestral:*

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{39{,}6}{9}} = \sqrt{4{,}4} = 2{,}10$$

**Situación 23**

Se muestran las notas del examen parcial de MAT128 de un grupo de 20 alumnos, luego de ordenarlas:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 15 | 15 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 18 | 18 | 18 |

Calcule la desviación estándar muestral de dichas notas.

**Solución propuesta**

- Primero se calcula la media aritmética:

$$\overline{x} = \frac{7(2) + 9(3) + 12(5) + 15(3) + 16(4) + 18(3)}{20} = \frac{264}{20} = 13{,}2$$

- Para calcular la desviación estándar se debe promediar los cuadrados de las diferencias de cada uno de los 20 datos con la media aritmética que es 13,2.
  Es evidente que, por ejemplo, si la nota 9 se repite 3 veces, la diferencia al cuadrado $(9 - 13{,}2)^2$ aparecerá como sumando 3 veces en la fórmula para calcular la desviación estándar.
  Así, para abreviar el cálculo se multiplica ese factor por 3:

$$s = \sqrt{\frac{(7-13{,}2)^2(2) + (9-13{,}2)^2(3) + (12-13{,}2)^2(5) + (15-13{,}2)^2(3) + (16-13{,}2)^2(4) + (18-13{,}2)^2(3)}{20-1}}$$

  Luego, $s = 3{,}61$.

La situación 23 muestra cómo se puede generalizar la fórmula para calcular las medidas de dispersión, para datos organizados en una distribución de frecuencias de variable discreta y también de variable continua (por intervalos).

Así, por ejemplo, en la situación anterior se empleó la fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x})^2 . f_i}{n-1}}$$

**Varianza y desviación estándar para datos discretos organizados en distribución de frecuencias**

Si se tienen $n$ datos organizados en la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

| Clases<br>$x_i$ | Frecuencias<br>$f_i$ |
|---|---|
| $x_1$<br>$x_2$<br>....<br>$x_k$ | $f_1$<br>$f_2$<br>...<br>$f_k$ |
| **Total** | ***n*** |

Las fórmulas para calcular las medidas de dispersión serán las siguientes:

- Varianza poblacional $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}$

- Desviación estándar poblacional $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}}$

- Varianza muestral $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n-1}$

- Desviación estándar muestral $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n-1}}$

**Situación 24**

A los 30 alumnos de un curso se les tomó una prueba consistente en 5 ejercicios. Se muestra el número de ejercicios correctamente resueltos por los alumnos en el siguiente cuadro:

| **Número de ejercicios resueltos** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Cantidad de alumnos** | 6 | 8 | 9 | 4 | 3 |

Calcule la varianza y la desviación estándar poblacionales del número de ejercicios resueltos.

**Solución propuesta**

| $x_i$ | $f_i$ | $x_i f_i$ | $(x_i - \bar{x})^2 f_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 6 | 16,7340 |
| 2 | 8 | 16 | 3,5912 |
| 3 | 9 | 27 | 0,9801 |
| 4 | 4 | 16 | 7,0756 |
| 5 | 3 | 15 | 16,2867 |
| **Total** | **30** | **80** | **44,6976** |

- Media aritmética: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{n} = \dfrac{80}{30} = 2{,}67$ ejercicios

- Varianza poblacional: $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n} = \dfrac{44{,}6976}{30} = 1{,}49$ ejercicios$^2$

- Desviación estándar poblacional: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}} = \sqrt{\dfrac{38{,}8270}{30}} = 1{,}22$ ejercicios

**Varianza y desviación estándar para datos agrupados**

Se obtendrán valores aproximados de la varianza y la desviación estándar utilizando las marcas de clase $x_i'$ de los intervalos, en lugar de $x_i$ en las fórmulas.

- Varianza poblacional $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i' - \bar{x})^2 f_i}{n}$

- Desviación estándar poblacional $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{5} (x_i' - \bar{x})^2 f_i}{n}}$

- Varianza muestral $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i' - \bar{x})^2 f_i}{n-1}$

- Desviación estándar muestral $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i' - \bar{x})^2 f_i}{n-1}}$

### Situación 25

Se tienen los siguientes datos sobre el precio del menú ejecutivo, en una muestra de 28 restaurantes de cierto distrito:

| Precio del menú (en soles) | Número de restaurantes |
|---|---|
| [8 - 10[ | 6 |
| [10 - 12[ | 6 |
| [12 - 14[ | 8 |
| [14 - 16[ | 5 |
| [16 - 18] | 3 |
| **Total** | **28** |

Calcule la varianza y la desviación estándar de los datos.

**Solución propuesta**

| Clases | $f_i$ | $x_i'$ | $(x_i' - \bar{x})^2 . f_i$ |
|---|---|---|---|
| [8 - 10[ | 6 | 9 | 73,50 |
| [10 - 12[ | 6 | 11 | 13,50 |
| [12 - 14[ | 8 | 13 | 2,00 |
| [14 - 16[ | 5 | 15 | 31,25 |
| [16 - 18] | 3 | 17 | 60,75 |
| **Total** | **28** | | **181,00** |

- Media: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i' f_i}{n} = \dfrac{350}{28} = 12{,}5$ soles
- Varianza muestral: $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} (x_i' - \bar{x})^2 f_i}{n-1} = \dfrac{181}{27} = 6{,}70$ soles$^2$
- Desviación estándar muestral: $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{5} (x_i' - \bar{x})^2 f_i}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{181}{27}} = 2{,}59$ soles

**Nota:** Cuando dos muestras tienen diferentes medias, para determinar qué conjunto de datos se encuentra más disperso respecto a la media se deben comparar los cocientes $\frac{s}{\bar{x}}$. Así, aquella muestra con menor cociente tendrá los datos menos dispersos respecto a la media.

# Más situaciones problema para practicar
## Problemas 3.5

1. A 20 estudiantes universitarios, elegidos al azar, se les preguntó por el número de horas que dedican al estudio fuera de las horas de clase. Se obtuvo la siguiente información:

   2, 4, 5, 5, 6, 7, 9, 5, 2, 10, 6, 5, 8, 7, 3, 2, 4, 4, 5, 3

   a) Represente los datos en un diagrama de puntos.
   b) Determine la media y la desviación estándar de los datos.
2. A todos los estudiantes de Periodismo de un instituto superior se les preguntó cuántos libros completos habían leído en lo que iba del año. Las respuestas obtenidas se muestran a continuación:

| Número de libros leídos | Cantidad de estudiantes |
|---|---|
| 5 | 8 |
| 8 | 10 |
| 10 | 14 |
| 12 | 8 |
| 15 | 2 |

   a) Elabore la distribución de frecuencias apropiada para este caso.
   b) Determine la media y la desviación estándar de los datos.
   c) Interprete los resultados obtenidos utilizando un gráfico apropiado.
3. Dos grupos diferentes de alumnos de un curso de Matemáticas tienen una misma nota en promedio.
   - Las notas de los alumnos del primer grupo son: 11, 13, 10, 12, 11, 10, 12, 9, 11.
   - Las notas de los alumnos del segundo grupo son: 17, 03, 18, 19, 06, 15, 02, 14, 05.

   a) Calcule la media de cada grupo. ¿Qué se puede decir al comparar los resultados obtenidos?
   b) Represente cada grupo de datos en un diagrama de puntos.
   c) ¿Se puede afirmar que el rendimiento académico de ambos grupos es similar? ¿Por qué?
   d) Calcule la desviación estándar muestral para cada grupo.

4. Se quiere estudiar cómo varía el precio del pasaje a Chiclayo durante el año. En el terrapuerto de Fiori se tomó una muestra durante once días y se obtuvieron los siguientes datos:

S/. 30; S/. 35; S/. 32; S/. 40; S/. 35; S/. 38;
S/. 30; S/. 37; S/. 35; S/. 40; S/. 33

a) Ubique los datos en un diagrama de puntos.
b) Construya una tabla de distribución de frecuencias.
c) Determine la media y la desviación estándar de los datos.
d) Interprete en el diagrama de puntos el resultado obtenido en c).

5. Los sueldos quincenales (en nuevos soles) de 6 socios de una empresa son:

1 400; 1 000; 6 000; 3 500; 2 200; 1 200

En vista de que últimamente la empresa está obteniendo bastantes utilidades, los socios quieren aumentar sus sueldos y estudian las siguientes dos alternativas:
**Alternativa A:** aumentar al sueldo actual de cada uno S/. 300
**Alternativa B:** duplicar el sueldo actual de cada uno

a) Calcule la media y la desviación estándar de los sueldos iniciales y de los sueldos resultantes, según cada una de las alternativas de aumento.
b) ¿Con cuál de las dos alternativas son menores las diferencias entre los sueldos de los empleados?

6. En dos centros de salud A y B de distintos niveles socioeconómicos se miden las estaturas de los niños atendidos en la última semana. Los datos son los siguientes:

| **Centro A** | | **Centro B** | |
|---|---|---|---|
| **Estaturas (en cm)** | **Número de niños** | **Estaturas (en cm)** | **Número de niños** |
| [80 - 85[ | 4 | [80 - 85[ | 9 |
| [85 - 90[ | 14 | [85 - 90[ | 14 |
| [90 - 95[ | 23 | [90 - 95[ | 20 |
| [95 - 100[ | 17 | [95 - 100[ | 18 |
| [100 - 105[ | 11 | [100 - 105[ | 10 |
| [105 - 110] | 6 | [105 - 110] | 9 |
| **Total** | **75** | **Total** | **80** |

a) Halle la media y la desviación estándar muestral para cada uno de los grupos.
b) ¿Cuál grupo tiene mayor estatura promedio?
c) ¿En qué grupo las estaturas son más homogéneas?

7. Considerando los siguientes datos: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ con media $\overline{x}$ y desviación estándar $s$, responda a las siguientes preguntas:
a) Si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, ¿cuál es el valor de la desviación estándar muestral $s$?
b) Si cada uno de los datos se incrementa en una constante positiva $k$, ¿qué ocurrirá con la media y con la desviación estándar de los nuevos datos con relación a la media y desviación estándar de los datos originales?
c) Si a cada uno de los datos se le multiplica por una constante positiva $k$, ¿qué ocurrirá con la media y con la desviación estándar de los nuevos datos en relación con la media y con la desviación estándar de los datos originales?

## 3.6. Percentiles

Seguramente muchos de nosotros alguna vez nos hemos preguntado a qué se refieren los centros de trabajo o de estudio cuando piden como requisito para un puesto de trabajo o para la postulación a una beca ser parte del tercio superior, quinto superior o el décimo superior. ¿Cómo se sabe en cada caso si uno pertenece o no a este grupo dentro del total de la población? Si esta es una medida estadística debe haber algún método para calcular y saber quiénes pertenecen a dicho grupo. Otro caso vinculado al mérito académico en el que es fundamental el uso de percentiles es el puesto que ocupa un estudiante de colegio dentro de su promoción hacia el final de quinto de secundaria. Muchas universidades dan beneficios al momento de postular a alumnos que han ocupado el tercio superior, y en algunos casos a los alumnos del quinto superior se les evalúa cuando están cursando su último año en el colegio.

Pero este tipo de denominación no solo puede aplicarse a personas: también podríamos requerir, de una población de productos de belleza, saber cuáles pertenecen al décimo superior, si dividimos a estos productos de belleza de acuerdo con el costo de producción de cada uno, o al costo de venta de cada uno, tal vez porque deseamos analizar cómo han evolucionado las ventas de dichos productos en los últimos años. En cualquiera de estos casos, es necesario saber no solo hallar, sino interpretar qué significa que nos hablen del medio, tercio o quinto superior. A continuación, encontrará usted algunas situaciones problemas sobre el tema, seguidas de la definición formal de lo que es un percentil.

### Situación 26

Si para un puesto en una empresa se presentan dos egresados de universidades distintas y ambos obtuvieron el mismo promedio final (media aritmética) en su promoción, ¿cuál podría ser un criterio de selección sobre la base de su rendimiento académico?

### Situación 27

Una importante empresa requiere egresados de la Universidad del Futuro de la carrera de Economía para un puesto clave. Dado que los conocimientos matemáticos de un economista son muy importantes, la empresa evaluará a los aspirantes del siguiente modo: se considerará el promedio ponderado obtenido por cada estudiante al final de toda su carrera. Luego se elegirán a aquellos que, con esta asignación, se encuentren en el quinto superior del grupo de aspirantes.

a) Con este criterio, ¿qué significará «estar en el quinto superior» del grupo de aspirantes?
b) Si se presentan los siguientes 20 aspirantes y cuyos promedios ponderados obtenidos al final de su carrera se muestran a continuación,

| Hugo | Paco | Lucía | Luis | Tatiana |
|---|---|---|---|---|
| 14,5 | 15 | 13 | 18 | 13,5 |

| Celeste | Tania | Darío | Leonie | Javier |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 14 | 19 | 19 | 19,5 |

| Jorge | Julio | Inés | Kurt | Sandra |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 12 | 13 | 14,5 | 19,5 |

| César | Enzo | Ángela | Lissette | Claudia |
|---|---|---|---|---|
| 13,5 | 12,5 | 12 | 13 | 15,5 |

¿quiénes cumplirán el requisito establecido por la empresa?

## Solución propuesta

a) Intuitivamente, el término «quinto superior» sugiere dividir la lista de puntajes en cinco «partes iguales» y considerar la última de ellas. Lógicamente, la lista debe estar ordenada, de manera que la última de las 5 partes (quinto superior) corresponda a los mejores puntajes.
b) Es necesario, previamente, ordenar los datos de modo creciente y asignarles su número de orden en la lista:

| 1.º<br>Ángela | 2.º<br>Julio | 3.º<br>Enzo | 4.º<br>Lucía | 5.º<br>Lissette |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 12,5 | 13 | 13 |

| 6.º<br>Inés | 7.º<br>Tatiana | 8.º<br>César | 9.º<br>Tania | 10.º<br>Jorge |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 13,5 | 13,5 | 14 | 14 |

| 11.º<br>Hugo | 12.º<br>Kurt | 13.º<br>Paco | 14.º<br>Celeste | 15.º<br>Claudia |
|---|---|---|---|---|
| 14,5 | 14,5 | 15 | 15 | 15,5 |

| **16.º Luis** | **17.º Darío** | **18.º Leonie** | **19.º Sandra** | **20.º Javier** |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 19 | 19 | 19,5 | 19,5 |

Cada parte contará con el 20% de los datos y el quinto superior será la parte que contenga los puntajes más altos.

| **1.º** | **2.º** | **3.º** | **4.º** | **5.º** | **6.º** | **7.º** | **8.º** | **9.º** | **10.º** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 12,5 | 13 | 13 | 13 | 13,5 | 13,5 | 14 | 14 |

| **11.º** | **12.º** | **13.º** | **14.º** | **15.º** | **16.º** | **17.º** | **18.º** | **19.º** | **20.º** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14,5 | 14,5 | 15 | 15 | 15,5 | 18 | 19 | 19 | 19,5 | 19,5 |

Para establecer qué puntaje determina el quinto superior es necesario definir qué puntaje deja por debajo de él a lo más el 80% del total de datos y, por encima de él a lo más el 20% del total de datos. El 80% de un total de 20 datos son 16 datos.

80% 20%

| **1.º** | **2.º** | **3.º** | **4.º** | **5.º** | **6.º** | **7.º** | **8.º** | **9.º** | **10.º** | **11.º** | **12.º** | **13.º** | **14.º** | **15.º** | **16.º** | **17.º** | **18.º** | **19.º** | **20.º** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 12,5 | 13 | 13 | 13 | 13,5 | 13,5 | 14 | 14 | 14,5 | 14,5 | 15 | 15 | 15,5 | 18 | 19 | 19 | 19,5 | 19,5 |

quinto superior

Por lo tanto, quienes estarían en el quinto superior serían: Darío, Leonie, Sandra y Javier. Además, se puede decir que el valor de nota que determina el quinto superior está entre el 16.º dato (nota 18) y el 17.º dato (nota 19). En este caso, convendremos en considerar como valor divisorio de los datos al número $\frac{18+19}{2} = 18{,}5$.

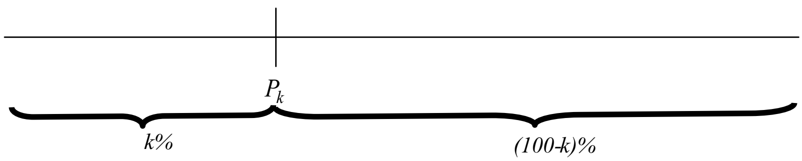
En general, dado un conjunto de datos ordenados de modo creciente, el valor que deja por debajo de él a lo más el 80% de los datos y por encima de él a lo más el 20% de los datos se denomina *percentil 80*. Se llama *quinto superior* al conjunto de datos cuyos valores son mayores que el percentil 80. La situación 23 permitió introducir el concepto de *percentil*.

**Percentiles**

En general, se llama *percentil* a cada uno de los 99 valores que dividen un conjunto de datos en cien partes iguales. Se denotan por $P_1$; $P_2$; ... ; $P_{99}$.

La interpretación de los percentiles es la siguiente: el percentil $P_k$ es el valor que deja por debajo de él a lo más el $k\%$ del total de datos y por encima de él, a lo más el $(100-k)\%$ del total de datos.

Esta situación se puede representar de la siguiente manera:




- Los percentiles son *medidas de posición*. Es decir, son valores numéricos que se calculan de acuerdo con la posición o lugar que ocupan los datos en una lista ordenada de modo creciente.
- Los percentiles no necesariamente coinciden con el valor de algún dato presente tal como ocurría con la mediana. El valor de un percentil puede ser un número intermedio entre dos datos consecutivos.
- Algunos percentiles importantes son:

| Percentil | Se le denomina normalmente | ¿Por qué se le denomina de esa manera? |
|---|---|---|
| $P_{50}$ | *Mediana* | Porque divide el conjunto de datos en dos partes iguales en cantidad de datos. |
| $P_{33}$ y $P_{67}$ | *Terciles* | Porque dividen el conjunto de datos en tres partes iguales en cantidad de datos. |
| $P_{25}$, $P_{50}$ y $P_{75}$ | *Cuartiles* | Porque dividen el conjunto de datos en cuatro partes iguales en cantidad de datos. |
| $P_{20}$, $P_{40}$ , $P_{60}$ y $P_{80}$ | *Quintiles* | Porque dividen el conjunto de datos en cinco partes iguales en cantidad de datos. |

- El *tercio superior* de un conjunto de datos es el conjunto de valores mayores que $P_{67}$.
- El *cuarto superior* de un conjunto de datos es el conjunto de valores mayores que $P_{75}$.
- El *quinto superior* de un conjunto de datos es el conjunto de valores mayores que $P_{80}$.

Los percentiles se suelen emplear con datos continuos; en este texto mostraremos algunos ejemplos con datos discretos para ilustrar mejor cómo se trabaja con ellos.

**¿Cómo se calcula el percentil $P_k$?**

Para calcular el percentil $P_k$ de un conjunto de $n$ datos ordenados de modo creciente se seguirán los pasos siguientes:[1]

1. Se calcula $\dfrac{k}{100}\,n$
2. Si $\dfrac{k}{100}\,n$ no es un número entero, redondeamos $\dfrac{k}{100}\,n$ al entero inmediato superior (llamemos $m$ a este número entero). El valor del percentil $P_k$ será en este caso el dato que ocupa la posición $m$.
3. Si $\dfrac{k}{100}\,n$ es un número entero, entonces el percentil $P_k$ es el promedio de los datos que ocupan las posiciones $\dfrac{k}{100}\,n$ y $\dfrac{k}{100}\,n + 1$.

**Situación 28**

Las calificaciones finales obtenidas por 40 alumnos en un curso de Inglés fueron las siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 63 | 95 | 79 | 71 | 83 | 87 | 92 | 100 | 75 |
| 64 | 60 | 91 | 76 | 68 | 80 | 84 | 88 | 96 | 72 |
| 65 | 61 | 93 | 77 | 69 | 80 | 85 | 89 | 97 | 73 |
| 65 | 62 | 94 | 78 | 70 | 83 | 86 | 90 | 100 | 74 |

a) Halle los percentiles: $P_{25}$, $P_{50}$, $P_{67}$ y $P_{80}$.
b) ¿Cuántos alumnos se encuentran en el tercio superior?
c) ¿Cuántos alumnos se encuentran en el quinto superior?

[1] Véase Johnson, Robert y Patricia Kuby. *Estadística elemental, lo esencial*. México D. F.: Thomson, 2004.

## Solución propuesta

a) Como primer paso, se deben ordenar los datos:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.º** | **2.º** | **3.º** | **4.º** | **5.º** | **6.º** | **7.º** | **8.º** | **9.º** | **10.º** |
| 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 65 | 65 | 68 | 69 |
| **11.º** | **12.º** | **13.º** | **14.º** | **15.º** | **16.º** | **17.º** | **18.º** | **19.º** | **20.º** |
| 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
| **21.º** | **22.º** | **23.º** | **24.º** | **25.º** | **26.º** | **27.º** | **28.º** | **29.º** | **30.º** |
| 80 | 80 | 83 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 |
| **31.º** | **32.º** | **33.º** | **34.º** | **35.º** | **36.º** | **37.º** | **38.º** | **39.º** | **40.º** |
| 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 100 | 100 |

Percentil $P_{25}$

- $\frac{25}{100}(40) = 10$
- Como dicho valor es entero, el percentil $P_{25}$ será el promedio de los datos 10.º y 11.º
- Luego: $P_{25} = \frac{69+70}{2} = 69{,}5$

Percentil $P_{50}$

- $\frac{50}{100}(40) = 20$
- Como dicho valor es entero, el percentil $P_{40}$ será el promedio de los datos 20.º y 21.º
- Luego: $P_{50} = \frac{79+80}{2} = 79{,}5$

Percentil $P_{67}$

- $\frac{67}{100}(40) = 26{,}8$
- Como dicho valor no es entero, redondeamos al entero inmediato superior 27 y buscamos el dato que ocupa la posición 27.º
- Luego: $P_{67} = 86$

Percentil $P_{80}$

- $\frac{80}{100}(40) = 32$
- Como dicho valor es entero, el percentil $P_{40}$ será el promedio de los datos 32.º y 33.º
- Luego: $P_{80} = \frac{91+92}{2} = 91{,}5$

b) El tercio superior lo forman todos los datos mayores que $P_{67}$, que corresponde al dato 27.º; es decir, $P_{67} = 86$. El tercio superior lo forman desde el dato 28.º dato hasta el dato 40.º (13 datos en total).

c) El quinto superior lo formarán desde el dato 33.º hasta el dato 40.º (8 datos en total).

# Más situaciones problema para practicar
## Problemas 3.6

1. Los siguientes datos muestran el total de horas a la semana que invierten 45 niños en cabinas de internet.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 37 | 23 | 47 | 16 | 44 | 46 | 36 | 35 |
| 41 | 40 | 16 | 43 | 30 | 36 | 27 | 46 | 43 |
| 12 | 20 | 33 | 36 | 21 | 31 | 33 | 35 | 24 |
| 34 | 35 | 29 | 38 | 26 | 37 | 25 | 40 | 41 |
| 39 | 35 | 41 | 39 | 34 | 36 | 39 | 32 | 34 |

   a) Calcule los percentiles $P_{33}$. $P_{67}$, $P_{80}$.
   b) Un niño que invierte 20 horas a la semana en internet ¿estará en el tercio inferior de los datos?
   c) Si los niños cuyo tiempo semanal en internet está en el quinto superior se consideran en peligro de adicción a internet, ¿a partir de qué valor se puede considerar que un niño está en peligro de adicción?

2. A continuación se muestran 20 datos correspondientes a la altura (en centímetros) de plantones de eucaliptos listos para transplantar.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 91 | 113 | 100 | 87 | 95 | 96 | 84 | 113 | 118 |
| 85 | 120 | 94 | 87 | 86 | 110 | 97 | 101 | 103 | 95 |

   a) Halle el primer y el tercer cuartil de los datos.
   b) Halle el segundo cuartil de los datos. ¿Cuál es el significado de este valor?

3. Se realizó un estudio sobre el rendimiento de los alumnos de un curso de Matemáticas en el examen parcial. Para ello se tomó una muestra aleatoria de 50 alumnos cuyas notas se muestran a continuación:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 11 | 9 | 15 | 9 | 4 | 14 | 13 | 10 | 17 |
| 16 | 6 | 8 | 9 | 14 | 8 | 7 | 16 | 13 | 11 |
| 13 | 7 | 8 | 17 | 7 | 13 | 10 | 17 | 13 | 9 |
| 8 | 12 | 9 | 15 | 4 | 9 | 11 | 15 | 10 | 13 |
| 16 | 6 | 16 | 11 | 18 | 16 | 14 | 12 | 16 | 10 |

   a) Elabore una tabla de distribución de frecuencias con 5 intervalos de la misma longitud.
   b) Represente, mediante un gráfico apropiado, la distribución de frecuencias elaborada en a).

c) Utilizando la distribución de frecuencias elaborada en la parte a), determine la media y la desviación estándar de las notas.
d) Calcule los percentiles $P_{33}$, $P_{67}$ y $P_{80}$.
e) ¿A partir de qué nota se puede considerar que un alumno se encuentra en el quinto superior?

4. Analice las siguientes situaciones.
   a) En algunas ofertas de trabajo, se exige que el alumno haya tenido un rendimiento que lo ubique en el cuarto superior. En otras ofertas, se exige que se ubique en el quinto superior. ¿Cuál de los dos requisitos es más exigente?
   b) Se tienen dos grupos de alumnos:
   Grupo A: formado por el tercio superior de la universidad X
   Grupo B: formado por el tercio superior de la universidad Y
   ¿Qué se podría afirmar sobre el rendimiento comparativo de ambos grupos?
5. Los siguientes datos muestran el total de horas semanales que invierten 50 alumnos en conectarse a internet.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 38 | 17 | 35 | 16 | 14 | 44 | 23 | 36 | 14 |
| 40 | 16 | 41 | 43 | 30 | 36 | 27 | 16 | 42 | 32 |
| 20 | 36 | 14 | 24 | 21 | 31 | 33 | 30 | 35 | 40 |
| 25 | 38 | 24 | 44 | 26 | 37 | 25 | 29 | 40 | 42 |
| 35 | 39 | 39 | 34 | 34 | 36 | 38 | 40 | 32 | 35 |

   a) Determine la variable estadística involucrada y de qué tipo es.
   b) Elabore una tabla de distribución de frecuencias con 5 intervalos de la misma longitud.
   c) Represente, mediante un gráfico apropiado, la distribución de frecuencias elaborada en b).
   d) Utilizando la distribución de frecuencias elaborada en la parte b), determine la media y la desviación estándar de las notas.
   e) Calcule los percentiles $P_{25}$, $P_{67}$ y $P_{80}$.
   f) ¿A partir de qué número de horas se puede considerar a un alumno en el quinto superior?

# Capítulo 4
# Incertidumbre

Podría parecer extraño hablar de «incertidumbre» en un libro dedicado enteramente a las Matemáticas, pues tendemos a pensar que la exactitud y la precisión son lo que caracteriza a esta disciplina. En efecto, hemos analizado la importancia que tiene el conocimiento matemático en contextos distintos —procesamiento de datos y elaboración de escalas, cuadros, el empleo de diferentes funciones para describir la relación entre dos variables, etcétera— y, en especial, en el capítulo anterior, en el primer acercamiento que tuvimos a la Estadística. Ampliaremos aquí el uso de las herramientas adquiridas, ya no solo como un modo de ordenar y sistematizar la información sobre una población determinada, sino como una metodología de cuantificar cierto tipo de posibilidades. Para ello requeriremos nuevos conceptos, a saber, qué es un experimento en el lenguaje estadístico así cómo distinguir entre un experimento aleatorio y otro no aleatorio; qué entenderemos por espacio muestral y evento para —en el último subcapítulo— introducir la noción de probabilidad. Desde ya podemos decir que intuitivamente todos manejamos la noción de probabilidad, como también las otras mencionadas. Cuando, por ejemplo, asignamos un valor numérico a la posibilidad de que un determinado suceso acontezca: «estoy casi 100% seguro de que pasaré el curso de Matemáticas». Evidentemente, que esto sea cierto depende de una serie de variables, que para nuestros fines no es necesario investigar. Lo central es que así como somos capaces de expresarnos tentativamente sobre cuán posible es que algo suceda, ahora veremos la manera matemática de hacer que el grado de certeza sobre la posibilidad de que algo suceda pase del plano meramente subjetivo al análisis objetivo de los datos que conocemos sobre un suceso.

### 4.1. Experimento aleatorio

El sueño de toda ciencia es poder predecir con certeza, determinar por completo las relaciones causales entre los fenómenos que estudia. Sin embargo, estamos aún lejos de poder realizar una empresa de tamaña envergadura. Aun así, lo cierto es que en muchos casos sí somos capaces de reconocer las causas de un fenómeno y estudiar las condiciones necesarias para que este se dé. En otros casos podemos afirmar algo con menor grado de certeza, grado de certeza que se diluye si atendemos a la diversidad de factores que interactúan para que este se dé. Veamos entonces un par de ejemplos, y analicemos hacia dónde se inclina la balanza en cada caso, hacia lo calculable y —en cierto sentido— predecible, o hacia lo indeterminado parcial o totalmente.

**Situación 1**

Roberto conoce a Lucía en una fiesta y le pide su número telefónico. Una semana después, Roberto decide llamarla para invitarla a salir. Luego de que Roberto marque el número de teléfono que le dio Lucía, ¿qué podría ocurrir?

Haga un listado de las posibles situaciones que se le podrían presentar a Roberto.

**Solución propuesta**

Después de que Roberto marque el número telefónico de Lucía puede ocurrir lo siguiente:

- Que escuche un mensaje que le indique que el número no existe.
- Que le responda una persona señalándole que ese número no le pertenece a Lucía.
- Que el número sea de Lucía pero que ella no conteste.
- Que conteste Lucía y se concrete una cita.
- Que conteste Lucía pero que no lo recuerde y no acepte salir con él, entre otras opciones.

Es importante notar que en esta lista no se muestran todos los resultados posibles, puede haber muchas más situaciones. También se debe tener en cuenta que estos posibles resultados se pueden pensar antes de realizar el experimento.

La situación 1 ha servido para introducir los términos: *experimento, experimento aleatorio, experimento no aleatorio.*

> **¿Qué es un experimento?**
> Es una actividad planeada cuyos resultados producen un conjunto de datos.
>
> Un experimento puede ser aleatorio o no aleatorio.
>
> **¿Qué es un experimento aleatorio?**
> Un experimento es aleatorio cuando se conocen todos sus posibles resultados, pero no se puede predecir cuál será el resultado hasta que se lleve a cabo.
>
> **¿Qué es un experimento no aleatorio?**
> Un experimento es no aleatorio o determinístico cuando el resultado de la observación es determinado en forma precisa por las condiciones bajo las cuales se realiza dicho experimento.

Como ejemplos de situaciones cuyos resultados son inciertos o aleatorios tenemos los siguientes:

- Aprobar el examen de algún curso.
- Lanzar una moneda ocho veces y observar el número de caras obtenidas.
- El número de accidentes de tránsito que se producirán en Lima durante el fin de semana.
- El resultado del partido Universitario-Alianza Lima.
- La duración de una conversación telefónica.

Como ejemplos de situaciones no aleatorias se puede nombrar las siguientes:

- Observar si la suma de dos números naturales pares es par o no.
- Observar el color de una bola extraída de una urna que contiene solo bolas negras.

# Más situaciones problema para practicar
## Problemas 4.1

1. Señale cuáles de los siguientes resultados corresponden a situaciones no aleatorias o determinísticas y cuáles corresponden a situaciones aleatorias o de incertidumbre. Justifique las respuestas.
   a) El resultado del próximo partido Perú-Argentina.
   b) Lo que desayunaré el día de mañana.
   c) El porcentaje de aprobados de un curso de Matemáticas (antes de acabar el ciclo).

2. Durante su estadía en el Perú, Diana conoció a Julio, un periodista peruano. Antes de su retorno a España, Diana invitó a Julio a que conozca su país. Después de tres meses de trámites, Julio viaja a España. ¿Qué podría ocurrir en el aeropuerto de España?
   Haga un listado de las posibles situaciones que se podrían dar en el aeropuerto de España.

3. Pedro está en el paradero de la esquina de la avenida Javier Prado con la avenida Petit Thouars y debe llegar a Plaza San Miguel.
   Haga un listado de las posibles formas que puede usar Pedro para llegar a Plaza San Miguel.

4. Luego de una semana de parciales exitosa, tu mejor amiga y tú deciden ir a ver una película a un multicine de 13 salas.
   Decida si cada una de las siguientes situaciones es aleatoria o no lo es:
   a) ¿A qué número de sala irán?
   b) ¿Cuánto tiempo tardarán en la fila de la boletería para adquirir las entradas?
   c) ¿Qué película verán?

## 4.2. Espacio muestral y eventos

Hemos visto hasta aquí, entonces, que no es lo mismo trabajar con una variable aleatoria que con una no aleatoria. Pensemos ahora, entonces, ya no en el tipo de variable con la que trabajaremos, sino en cuáles serían todos los resultados posibles en que un suceso termine. Por ejemplo, si debemos agrupar a los alumnos de un salón de 60 personas en grupos de 5, podríamos elaborar una lista con todas las opciones posibles de grupos. Cuáles de ellos serán los grupos que lleguen a formarse no lo sabemos, pero sabemos que la lista cubre completamente el espectro de las posibilidades de agrupación. A propósito de la llegada en el 2008 de inversionistas y líderes de la economía mundial al Perú, en el marco del Foro de Cooperación Económica Asia Pacífico (APEC, por sus siglas en inglés), nos preguntamos en aquella oportunidad cuáles serían las posibles opciones para elaborar un menú que comprenda una entrada, un plato de fondo y un postre, tomándolos de la carta de algún prestigioso restaurante limeño. Es posible hacer una lista con todas las combinaciones posibles de entrada-plato de fondo-postre que se ofrecen en dicho restaurante. Cuál o cuáles elijamos dependerá de otros criterios, como qué combinación no contiene tantos aderezos (en caso de que algún invitado sea sensible al ají o al ajo), qué combinación no tiene ningún tipo de carne (en caso de que algún invitado sea vegetariano, etcétera). A través de las dos situaciones problema siguientes trataremos de aclarar tanto la noción de espacio muestral como de evento.

**Situación 2**

Cuatro lindas chicas, Katia, Ludovika, Claudia y Fiorella compiten en un concurso de belleza.

El experimento consiste en observar quiénes ocuparán el primer y segundo lugar en este concurso. Realice las siguientes actividades:

a) Haga una lista de los posibles resultados del experimento.
b) Describa de qué manera se podrían producir cada una de las siguientes situaciones:
   - Ludovika obtiene el primer puesto.
   - Claudia obtiene el primer puesto y Fiorella el segundo puesto.

## Solución propuesta

a) La lista de las posibles ganadoras del concurso está dada en la siguiente tabla:

| Primer puesto | Segundo puesto | Se usará esta representación para abreviar: |
|---|---|---|
| Katia | Ludovika | (K; L) |
| Katia | Claudia | (K; C) |
| Katia | Fiorella | (K; F) |
| Ludovika | Katia | (L; K) |
| Ludovika | Claudia | (L; C) |
| Ludovika | Fiorella | (L; F) |
| Claudia | Katia | (C; K) |
| Claudia | Ludovika | (C; L) |
| Claudia | Fiorella | (C; F) |
| Fiorella | Katia | (F; K) |
| Fiorella | Ludovika | (F; L) |
| Fiorella | Claudia | (F; C) |

La lista de las posibles ganadoras del concurso también puede expresarse en términos de conjuntos:

$$S = \{(K; L), (K; C), (K; F), (L; K), (L; C), (L; F), (C; K), (C; L), (C; F), (F; K), (F; L), (F; C)\}$$

b) Según la tabla anterior, se tienen los siguientes resultados para las situaciones:
- {(L; K), (L; C), (L; F)}
- {(C; F)}

La situación 2 ha servido para introducir los términos: *espacio muestral* y *evento.*

**¿Qué es el espacio muestral?**

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Como todo conjunto, el espacio muestral puede estar dado por comprensión o por extensión.

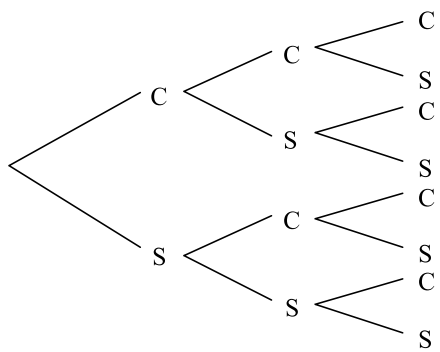
Tomemos los siguientes ejemplos:
El espacio muestral del experimento de *lanzar un dado para observar el número que sale* es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El espacio muestral del experimento de *lanzar una moneda tres veces y observar la secuencia de caras y sellos* es

$$S = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$$

**Observación:** los espacios muestrales de experimentos aleatorios que consisten de dos o más pruebas sucesivas se pueden obtener mediante un diagrama de árbol. Por ejemplo, para el experimento de lanzar una moneda tres veces y observar la secuencia de caras y sellos se tiene el siguiente diagrama de árbol:




De donde se obtiene el espacio muestral:

$S = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$

Este espacio muestral también se puede expresar en términos de *ternas*, de la siguiente manera:

$S = \{(C; C; C), (C; C; S), (C; S; C), (S; C; C), (C; S; S), (S; C; S), (S; S; C), (S; S; S)\}$

**¿Qué es un evento?**

Es cualquier subconjunto del espacio muestral. Puede estar dado por comprensión o por extensión. Como subconjunto, puede tener un solo elemento (eventos simples) o más de un elemento (evento compuesto).

Por ejemplo, en la situación 2 se tienen los siguientes eventos con un solo elemento:
- {(F; C)}
- {(K; L)}

Estos eventos también pueden expresarse por comprensión, de la siguiente manera:
- Fiorella obtiene el primer puesto y Claudia el segundo.
- Katya obtiene el primer puesto y Ludovika el segundo.

También se pueden considerar los siguientes eventos con más de un elemento:
- {(F;K), (F; L), (F; C)}
- {(L; K), (L; C)}

Estos eventos también pueden expresarse por comprensión, de la siguiente manera:
- Fiorella obtiene el primer puesto.
- Katya y Claudia obtienen el segundo puesto y Ludovika obtiene el primer puesto.

## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 4.2

1. Michael y Robert son dos turistas ingleses que han venido al Perú a conocer una de las siete maravillas del mundo. Después de visitar Macchu Picchu, ellos deciden ir a disfrutar de las comidas típicas que se ofrecen en el restaurante El último Inca. A Carlos, el sobrino del dueño, se le ha encomendado la tarea de observar qué platos típicos comerán los dos turistas. La lista de platos es la siguiente:

| Platos típicos | Precio (en $) |
|---|---|
| Trucha con papas fritas | 6 |
| Milanesa de alpaca | 8,5 |
| Cuy con papas | 10,5 |
| Guiso de alpaca | 7,5 |

Suponiendo que cada turista pedirá solo un plato, responda a las siguientes preguntas acerca de lo observado por Carlos.
- ¿La situación descrita es aleatoria?
- ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
- Describa por extensión y comprensión dos eventos.

2. Considere el siguiente experimento: se lanzan simultáneamente un dado y una moneda comunes y se registra el resultado.

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b) Describa por extensión cada uno de los siguientes eventos:
   - Se obtiene un número par.
   - Se obtiene una cara.
   - Se obtiene una cara y un número par.
   - Se obtiene una cara o un número par.
   - Se obtiene un número menor que 5 y un sello.

3. Silvia decide ir a comprar dos cajas (distintas) de discos compactos de música clásica. En el catálogo de música se tienen a cantantes como: Enrico Caruso, Franco Corelli, Luciano Pavarotti, Plácido Domingo y Juan Diego Flórez. En cada caja vienen 2 discos compactos de diferentes tenores, distribuidos de la siguiente manera:

   Caja 1 : Caruso y Corelli

   Caja 2: Pavarotti y Domingo

   Caja 3: Flórez y Caruso

   Caja 4: Corelli y Domingo

   Caja 5: Pavarotti y Flórez

   Caja 6: Caruso y Domingo

   Si el experimento consiste en anotar qué cajas comprará Silvia, responda a las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
   b) ¿En qué consiste el evento:
      - Silvia decide comprar música de Caruso?
      - Silvia decide comprar música de Juan Diego?
      - Silvia decide comprar música de Caruso y Juan Diego?
      - Silvia decide comprar música de Caruso o Juan Diego?

   **Nota:** Los dos cantantes no tienen que estar necesariamente en la misma caja.
4. Laura irá este sábado a la playa y se ha propuesto poner atención a lo que ocurrirá a su alrededor y llevar un registro. Tomará el tiempo que demora en llegar a la playa, contará cuántos heladeros pasarán ofreciéndole sus productos cuando esté soleándose, contará cuántos chicos guapos hay a su alrededor entre otros hechos adicionales.

   a) ¿De qué tipo son las variables que registró Laura?

b) Dé un elemento del espacio muestral asociado al experimento: «tomar el tiempo que ella demora en llegar a la playa, contar cuántos heladeros pasan ofreciéndole sus productos y contar cuántos chicos guapos hay a su alrededor»
c) Dé ejemplos de otros dos hechos adicionales que se podrían observar en la situación en la que se encuentra Laura.
d) Establezca el espacio muestral para los experimentos descritos en c).
e) Para cada uno de los espacios muestrales de la pregunta d), defina por extensión y por comprensión dos eventos, uno de ellos con un elemento y el otro con más de un elemento.

## 4.3. Probabilidad

Debemos ver ahora de qué manera medir qué evento tiene mayores posibilidades de suceder. Pensemos en qué sucede cuando lanzamos un dado. Si el dado está bien balanceado, habrá iguales posibilidades de que salga cualquier número. Sin embargo, si lanzamos dos dados a la vez y tomamos nota de la suma de ambos, habrá un número que se repita mayor número de veces. ¿Por qué sucede ello? ¿Qué número es aquel que tiene mayores posibilidades de salir? A continuación se encuentran dos situaciones que nos permitirán explicar la noción de *probabilidad*.

### Situación 3

Un experimento consiste en anotar qué bola ha sido extraída de una caja donde solo hay 5 bolas rojas y 3 azules.

Determine lo siguiente:

a) ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento?
b) ¿Todos los resultados son igualmente probables?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola al azar esta resulte roja? ¿Varía la probabilidad si se desea que la pelota sea azul o negra?

### Solución propuesta

a) Los posibles resultados del experimento son: S = {r, a}.
b) No, obtener una bola roja es más probable que obtener una bola azul.
c) De entre un total de 8 posibilidades igualmente probables de que salgan, hay 5 maneras de extraer una bola roja. Por lo tanto, la probabilidad de extraer una bola roja es: $\frac{5}{8}$ .

   Análogamente, la probabilidad de que salga una bola azul es: $\frac{3}{8}$.

   Como no existen bolas negras en la caja, entonces la probabilidad de que salga una bola negra es 0.

La situación 3 ha servido para introducir el concepto de *probabilidad*.

**¿Qué es la probabilidad?**

La teoría de probabilidades corresponde a un área dentro de las Matemáticas que trata de manejar con números el grado de incertidumbre de un evento. Es decir, trata de medir hasta qué punto se puede esperar que ocurra un evento. Se dice que esa medida es su *probabilidad*.

La probabilidad de un evento se define como un número comprendido entre 0 y 1. Si la probabilidad de un evento se aproxima al número 0, se dice que el evento es poco frecuente. Si la probabilidad de un evento se aproxima al número 1, se dice que el evento es muy frecuente.

Se considerarán dos tipos de planteamiento para el cálculo de la probabilidad: clásica y empírica. A continuación, se presenta e ilustra con un ejemplo cada una de ellas.

**Cálculo de la probabilidad clásica**

Si $S$ es un espacio muestral con un número de resultados $n(S)$ igualmente probables de que ocurran, y $E$ es un evento de dicho espacio muestral con $n(E)$ resultados igualmente probables de que ocurran, entonces la probabilidad clásica de $E$, que se denota por $P(E)$, es la siguiente:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

## Situación 4

Se seleccionará al azar un número entre los enteros del 1 al 12. Determine la probabilidad de que ese número sea

a) divisible entre 3 b) par y divisible entre 3 c) par o divisible entre 3

## Solución propuesta

El espacio muestral del experimento es: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, 12\}$.

a) El conjunto $E = \{3, 6, 9, 12\}$ contiene los múltiplos de 3. Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

b) El conjunto $E = \{6, 12\}$ contiene a los pares y divisibles entre 3. Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

c) El conjunto $E = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ contiene a los pares o divisibles por 3. Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

**Cálculo de la probabilidad empírica**

La probabilidad empírica es una manera de asignar probabilidad a cada evento, según los datos que se han recopilado. La probabilidad empírica se halla realizando un experimento u observando una situación varias veces, contando cuántas veces ocurre cierto evento y estableciendo la relación entre casos favorables y casos totales.

$$P(E) = \frac{\text{Número de veces que se observa que el evento ocurre}}{\text{Número total de pruebas u observaciones}}$$

## Situación 5

A continuación se muestran los resultados obtenidos luego de lanzar un dado y anotar el número que aparece en la cara superior:

| Número de lanzamientos | Número de veces que se obtuvo el número 6 |
|---|---|
| 120 | 22 |
| 100 | 21 |
| 130 | 26 |
| 150 | 20 |
| 120 | 21 |
| 140 | 26 |

Teniendo en cuenta esta información, ¿cuál sería la probabilidad empírica de que al lanzar nuevamente el dado se obtenga el número 6?

## Solución propuesta

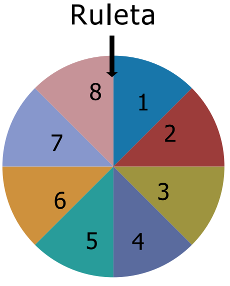
| Número de lanzamientos | Número de veces que se obtuvo el número 6 | Acumulando el número de veces que el evento ocurre | Acumulando las observaciones | Dividiendo los números de las columnas 3 y 4 |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 22 | 22 | 120 | 0,18333333 |
| 100 | 21 | 43 | 220 | 0,19545455 |
| 130 | 26 | 69 | 350 | 0,19714286 |
| 150 | 20 | 89 | 500 | 0,178 |
| 120 | 21 | 110 | 620 | 0,17741935 |
| 140 | 26 | 136 | 760 | 0,17894737 |

Se observa cierta estabilidad alrededor del 0,17 y se podría definir este valor como la probabilidad empírica de que al lanzar el dado nuevamente se obtenga el número 6.

**Observación:** en términos generales, las probabilidades empíricas pueden diferir de las teóricas, pero tienden a coincidir cuando el número de observaciones es grande.

## Más situaciones problema para practicar
### Problemas 4.3

1. Un experimento consiste en anotar qué lapicero ha sido extraído de una caja donde hay 6 lapiceros rojos y 4 lapiceros negros. Determine lo siguiente:
   a) ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento?
   b) ¿Todos los resultados son igualmente probables?
   c) Calcule la probabilidad de que al extraer un lapicero al azar suceda lo siguiente:
      - Que sea un lapicero rojo.
      - Que sea un lapicero negro.
      - Que sea un lapicero azul.
2. Si se tiene una ruleta como la que se muestra en la figura,
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al girarla esta se detenga en un número impar?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en los números 4 ó 5?




3. De una bolsa que solo contiene caramelos de dos sabores (25 de fresa y 25 de limón), Juan extrae con reposición al azar tres de ellos de uno en uno. Considerando dicha situación, realice las siguientes actividades:
   a) Haga un diagrama de árbol para el experimento.
   b) Determine el espacio muestral del experimento.
   c) Describa por extensión los siguientes eventos y señale si tienen uno o más elementos:
      - Todos los caramelos son del mismo sabor.
      - Se seleccionan exactamente dos caramelos de fresa.
   d) Determine la probabilidad de que ocurran los eventos descritos en c).

4. El profesor Ramírez decidió llevar a la escuela un juego de bingo para asignar a sus alumnos, aleatoriamente, una tarea. El juego contiene 5 esferas numeradas del 1 al 5. Antes de iniciar la clase presentó a sus 12 alumnos el siguiente cuadro.

| | |
|---|---|
| Esfera 1 | Pintar acuarela |
| Esfera 2 | Experimentos sobre botánica |
| Esfera 3 | Lectura silenciosa |
| Esfera 4 | Resolver problemas de matemáticas |
| Esfera 5 | Componer poemas |

Cada alumno saldrá según el orden alfabético, extraerá una esfera y la retornará a la caja.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno no pinte acuarela?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno no resuelva problemas de matemáticas y que tampoco realice experimentos de botánica?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que componga poemas?
d) Explique en qué medida variaría el problema si se extrajeran las esferas sin reposición.

5. En un curso de Matemáticas, dirigido a estudiantes de diferentes especialidades, se encuentran matriculados 70 alumnos de los cuales 15 siguen la carrera de Psicología, 26 la de Derecho, 13 la de Antropología y 16 la de Filosofía.

Si se selecciona un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea de la especialidad de Derecho.
b) Calcule la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea de Psicología o Antropología.
c) Calcule la probabilidad de que el estudiante seleccionado no sea de Filosofía.
d) ¿A qué especialidad es más probable que pertenezca este estudiante?

6. En el siguiente cuadro, se muestra el número de alumnos que decidieron seguir una carrera de Letras de cada 1 000 ingresantes a la Universidad del Futuro.

| Año | Número de alumnos que siguieron una carrera de Letras |
|---|---|
| 1 | 480 |
| 2 | 625 |
| 3 | 550 |
| 4 | 640 |
| 5 | 580 |
| 6 | 590 |
| 7 | 610 |
| 8 | 680 |
| 9 | 560 |
| 10 | 605 |
| 11 | 590 |
| 12 | 620 |

a) Complete la tercera y cuarta columna de la tabla, siguiendo el procedimiento mostrado a continuación:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 480 | 480 | 480/1 000 |
| 2 | 625 | 1 105 | 1 105/2 000 |

b) Comente cómo cambian los valores de la cuarta columna cuando se consideran más años.

c) Si se eligiera al azar a uno de los nuevos ingresantes a dicha universidad el próximo año, ¿cuál sería la probabilidad de que dicho alumno siga una carrera de Letras?

# Anexo
# Respuestas a las preguntas propuestas

## Capítulo I

### Problemas 1.1

1. a) F
   b) V

2. a) La escala del plano será 1:20 000, lo que significa que 1 cm en el plano representa 20 000 cm ó 200 m en la realidad.
   b) La distancia real entre el Museo Arqueológico (15) y la iglesia Santo Domingo (6) es 80 000 cm u 800 m.
   c) $E = \dfrac{3{,}7}{80\,000} \approx \dfrac{1}{21622}$

3. a) Para $E = \dfrac{7}{2}$ la copia excede del tamaño de una hoja A4.

   b) Para $E = \dfrac{3}{1}$ la copia ampliada tiene dimensiones menores a la hoja A4.

   c) La escala adecuada es $E = \dfrac{1}{0{,}2892}$

4. a) 1 cm en el plano equivale a 200 cm en la realidad.
   10 cm en el dibujo equivale a 2000 cm en la realidad.
   b) Dimensiones reales (valores aproximados)

Aproximadamente área = 261 $m^2$

c) La mesa y las sillas sí pueden acomodarse en la cocina, dado que sus dimensiones son menores a las dimensiones de la cocina (4,2 m x 2,4 m) y se pueden distribuir en este espacio.

d) El tamaño de este nuevo plano será mayor que el tamaño del plano mostrado pues, según la nueva escala, 1 cm del dibujo equivale a 50 cm de la realidad.

e) No es posible porque las dimensiones del nuevo plano son mayores que las dimensiones de la hoja A4.

5. a) $\frac{1}{6\,666\,667}$

   b) 440 km

## Problemas 1.2 y 1.3

1. Claudia tuvo una mejora más significativa en su aprendizaje, pues el incremento porcentual fue de 44,4%; mientras que el de Vanesa fue de 26,7%.

2. Las dos alternativas son iguales.

3. a) Sí
   b) S/. 36
   c) S/. 1 480

4.

| | |
|---|---|
| SUBTOTAL | S/. 636,66 |
| IGV (19%) | S/. 121,34 |
| TOTAL | S/. 760,00 |

5. a) 19 295 $m^3$
   b) 58,75%
   c) Disminuyó en 28 907 $m^3$
   d) Disminuyó en 55,44%
   e) Se podría decir que en el 2008 no habrá suficiente madera ni siquiera para el comercio legal.

6. a) Ricardo recibiría adicionalmente 25 soles en total.
   b) Para Ricardo sería más beneficioso comprar una sola recarga de 120 soles, por la cual recibiría un bono de 36 soles.
   c) La recarga fue de 110 soles.

7. a) Según la Universidad Católica, 26 personas manifestaron su aprobación a la gestión presidencial.
   b) Según la Universidad Católica, el rechazo al presidente García se ha incrementado en 24,23 puntos porcentuales.
   c) El rechazo a la gestión del presidente García ha variado en 46,1%.
   d) La aprobación del presidente García ha disminuido en 12,402 puntos porcentuales.
   e) La aprobación de García ha variado porcentualmente en 40,793%.
   f) Según la Universidad Católica, en el Sur del país la aprobación del presidente ha disminuido menos.
   g) Según Datum, en el Oriente del país el rechazo se ha incrementado más.

## Problemas 1.4

1. El capital acumulado luego de 6 años será de S/. 2530,63.

2. La tasa de interés que se aplicó fue de 5,2%.

3. a) Hildara deberá pagar $ 14 880
   b) Monto de la mora: $ 144,8
      Pago total: $ 15 028, 8
   c) Hildara deberá pagar: $ 15 116, 544

4. a) En total se pagará $ 2 480
   b) 8 años

5. a) $ 13 600
   b) $ 45 600
   c) $ 760
   d) 4 años
   e) $ 32 000(1+0,085*t*)

6. a) \$ 2 140
   b) \$ 2 450,1
   c) $2\,000(1{,}07)^t$
   d) Luego de aproximadamente 16,24 años

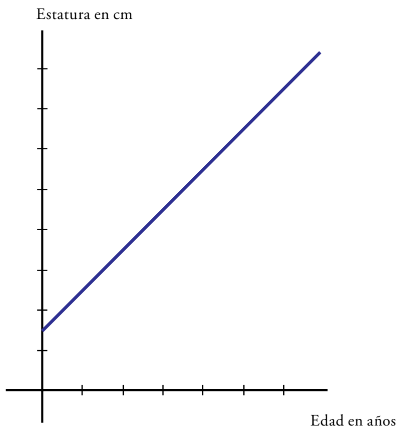
7. a) El monto acumulado en la cuenta luego de 4 años es: \$ 16 325,868.
   b) El monto acumulado en la cuenta luego de 5 años es: \$ 17 631,937.
   c) Entre el cuarto y quinto año, el monto acumulado habrá aumentado en \$ 1 306,069.
   d) $\textit{Variación porcentual} = \dfrac{17\,631{,}937 - 16\,325{,}868}{16\,325{,}868} \times 100\% = 7{,}9\%$
   e) Entre el noveno y décimo año.

## Capítulo 2

### Problemas 2.1

1. a) Sí es función.
   Variable independiente: longitud del lado.
   Variable dependiente: perímetro.
   b) Sí es función, ya que cada alumno tienen una única fecha de nacimiento.
   Variable independiente: alumno del curso de Matemáticas.
   Variable dependiente: la fecha de nacimiento.

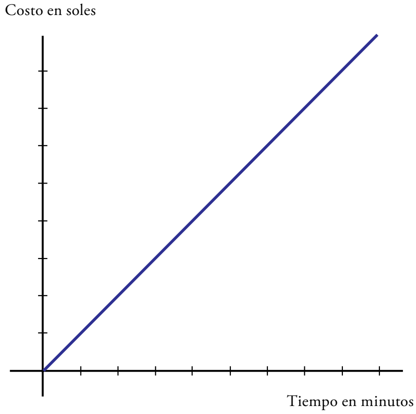
2. a) Sí es función.



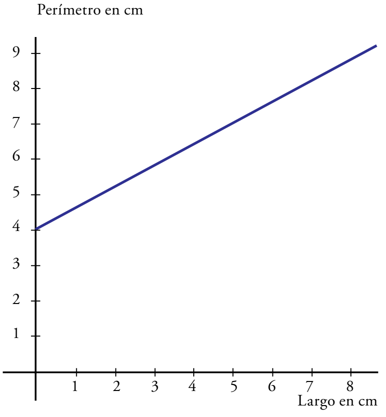
b) No es función, pues hay personas con igual masa corporal, pero con distinto índice de grasa diferente.

c) No es función, pues hay mujeres que tienen la misma edad pero necesitan diferentes cantidades de calorías.

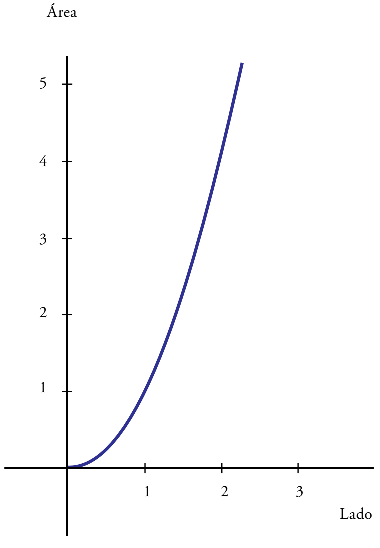
d) Sí es función



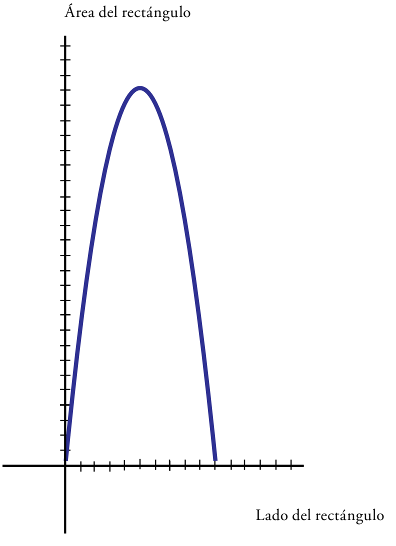

e) Sí es función




f) Sí es función




g) Sí es función



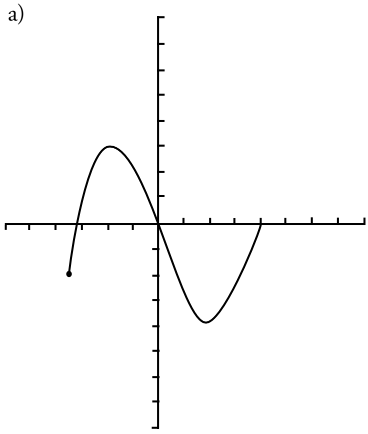
3. A = {1; 2; 3; 4; 5 }.
   a) No es función cuando a un alumno le corresponda dos escalas de pago diferentes.
   b) Para que sea función a cada alumno le debe corresponder una única escala.

4. a) A cada peruano que lo solicita le corresponde un crédito hipotecario.
   Variable independiente: un peruano que solicita un préstamo hipotecario.
   Variable dependiente: el monto asignado para el préstamo.
   b) Tiempo que emplea un estudiante para almorzar en una cafetería de la Universidad del Futuro.
   Variable independiente: estudiante de la Universidad del Futuro.
   Variable dependiente: tiempo que demora un estudiante en almorzar.

5. a) Es suficiente observar la gráfica.
   b) No es una función.
   c) Se tiene que considerar la edad en el eje X y la altura en el eje Y.

6. a) 1750 libros.
   b) Sí es función, pues a cada día le corresponde una única cantidad de libros vendidos.
   c) Según la gráfica, durante los días 10-20, la venta de libros ha disminuido con respecto al décimo día, y durante los días 30-45 la venta de libros ha disminuido con respecto al día 30.
   d) En el día 30 se vendió la mayor cantidad de libros y fueron 250.

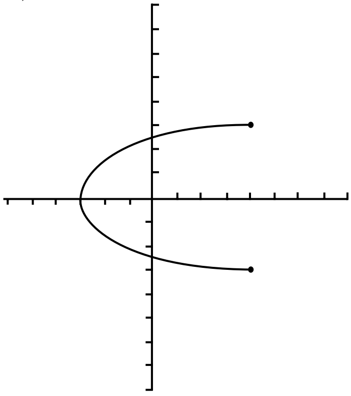
7. a)



Sí es una función.
La variable independiente se encuentra en el eje horizontal y la dependiente en el eje vertical.

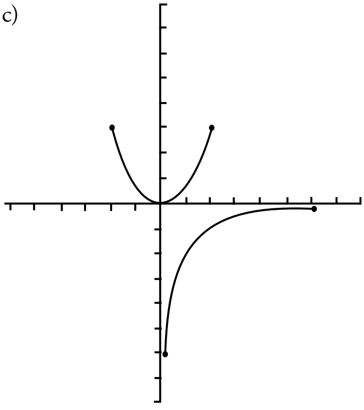
Dominio: [-3,5 ; 4]     Rango: [-4; 3]

b)



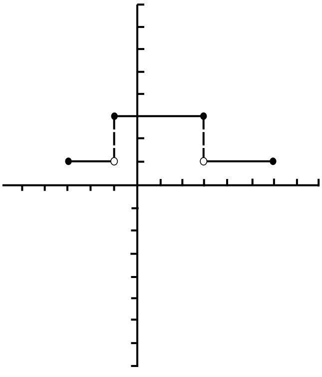
Si se considerara a la variable independiente en el eje horizontal y la dependiente en el eje vertical, entonces no sería función ya que hay valores de *x* con dos imágenes. Sin embargo, se podría considerar como función si se considera a la variable dependiente en el eje horizontal y la independiente en el eje vertical.

c)



Considerando a la variable independiente en el eje horizontal y la dependiente en el eje vertical, no sería función ya que hay valores de *x* con dos imágenes.

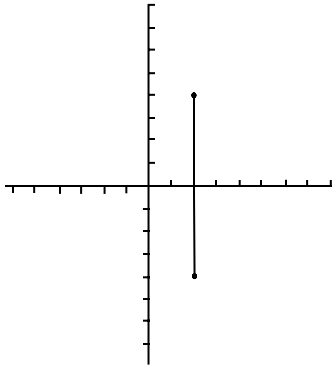
d)



Sí es una función.
La variable independiente se encuentra en el eje horizontal y la dependiente en el eje vertical.

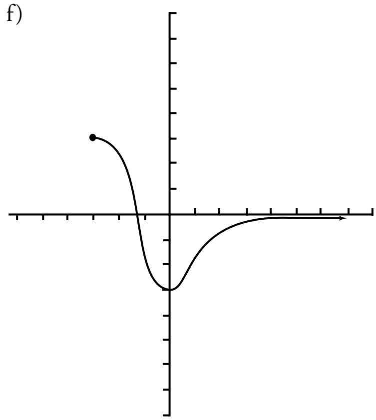
Dominio: [-3;6]     Rango: {1;3}

e)



Si se considera a la variable independiente en el eje horizontal y la dependiente en el eje vertical, entonces no sería función ya que el valor de $x = 2$ tiene más de una imagen (en realidad, infinitas). Sin embargo, se podría considerar como función si se considera a la variable dependiente en el eje horizontal y la independiente en el eje vertical.

f)

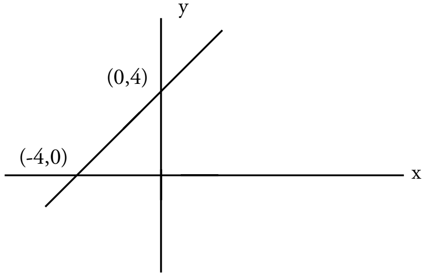


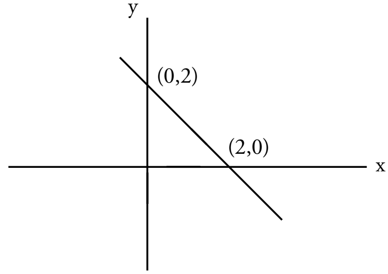
Considerando a la variable independiente en el eje horizontal y la dependiente en el eje vertical, sí sería función, ya que a cada valor de *x* se le asigna un único valor de *y*.

Dominio: [-3; +∞[ Rango: [-3;3]

## Problemas 2.2

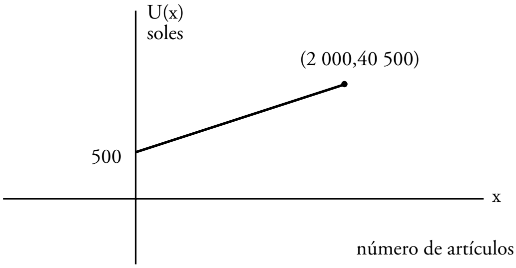
1. Una regla de correspondencia para *y* en función de *x* está dada por: $y = \frac{1}{2}x + 1$.
2. $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$
3. Las reglas de correspondencia que corresponden a funciones lineales son a, c y d.
4. Cada una de las funciones tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales. Las gráficas de a) y b) se muestran a continuación.



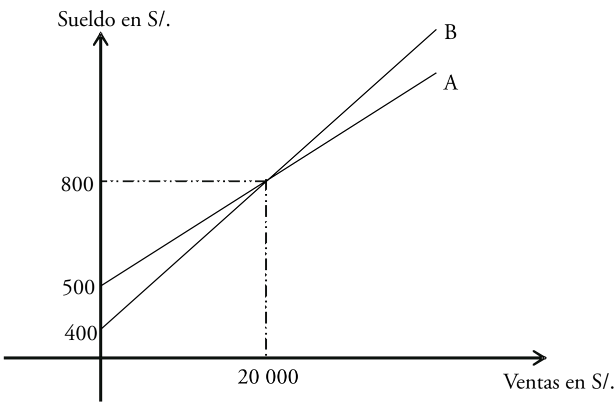
5. La función que corresponde a la gráfica mostrada es $y = \dfrac{9}{8}x + 15$.

6. a)




   b) Al vender 200 artículos se obtiene una utilidad de 4 500 soles.
   c) Al vender 500 artículos se obtiene una utilidad de 10 500 soles.
   d) Para obtener una utilidad de 3 400 soles se deben vender 145 artículos.
   e) La máxima utilidad que puede obtenerse es 40 500 soles.

7. a) Según la opción A: A($x$) = 400 + 0,02$x$, donde $x$ es el total de ventas realizadas por Susana.
   Según la opción B: B($x$) = 500 + 0,015 $x$, donde $x$ es el total de ventas realizadas por Susana.
   b) S/. 440
   c) S/. 530
   d)



e) Si las ventas de Susana son menores a S/. 20 000, le conviene la opción B; y si sus ventas son mayores a S/. 20 000, le conviene la opción A.

8. a) Caso A: precio por pagar = 30 + 16$n$.
   Caso B: precio por pagar = 20($n$ + 1).
   b) Le conviene la opción A, con lo cual pagaría 110 soles.

## Problemas 2.3

1. a) Plan Perú 16:

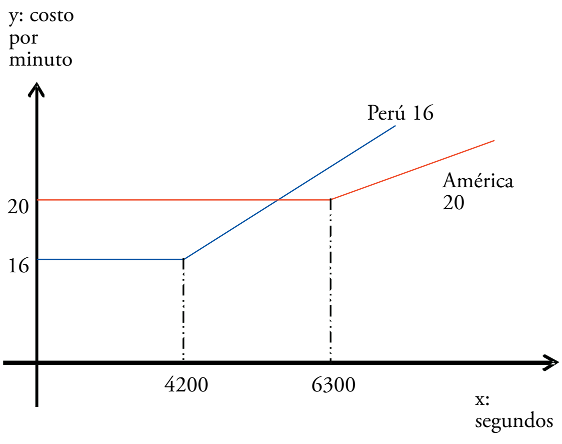
$$C(x)=\begin{cases}16, & x\leq 4200\\ 16+0{,}004(x-4200), & x>4200\end{cases}$$

donde $x$ es la cantidad de segundos en llamadas.

Plan América 20:

$$A(x)=\begin{cases}20, & x\leq 6300\\ 20+0{,}003(x-6300), & x>6300\end{cases}$$

b)

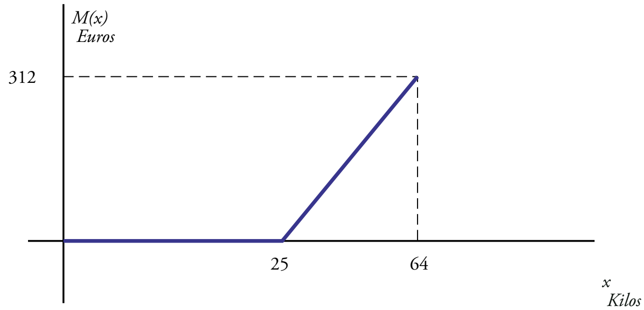



c) Se habló 7201 segundos.

2. a) Sea $x$ el peso del equipaje total en kilogramos y $M$ ($x$) el monto total que se debe pagar por exceso de equipaje. Entonces, obtenemos la siguiente regla de correspondencia:

$$M(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 25\\ (x-25)8, & 25<x\le 64\end{cases}$$

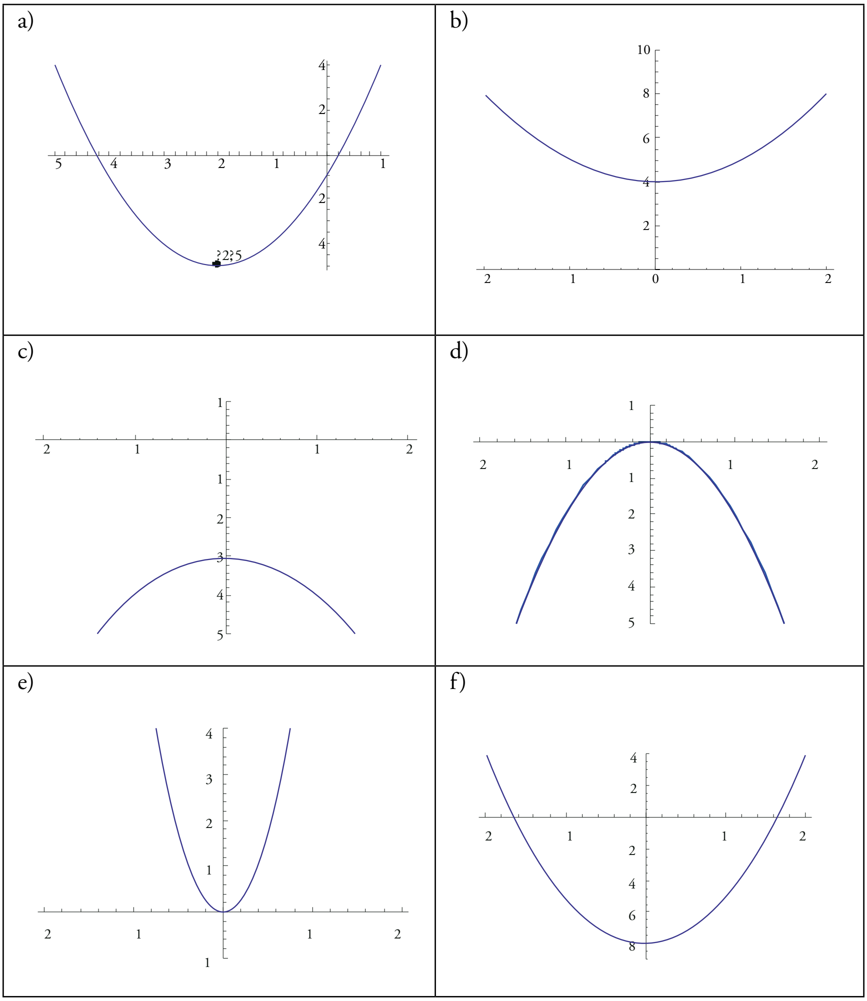
b) Graficamos $M(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 25\\ 8x-200, & 25<x\le 64\end{cases}$




c) Si el equipaje excede los 30 kilos se pueden presentar los siguientes casos:
- Si $30 < x < 40$, le conviene viajar en Blue Air.
- Si $x = 40$, en cualquiera de las aerolíneas pagará lo mismo.
- Si $40 < x \leq 64$ le conviene viajar en Sky Blue.

Debemos notar que el punto de intersección de las dos gráficas se da en $x = 40$.

## Problemas 2.4

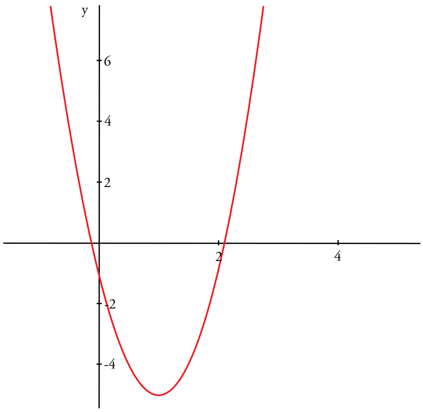



2. a) $f(x) = -2(x-2)^2 + 7$; Dom = $R$; Ran = $]-\infty; 7]$; interceptos: (0; -1), $\left(2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}};0\right)$

   b) $f(x) = (x-3)^2$; Dom = $R$; Ran = $[0; +\infty[$; interceptos: (-3; 0), (0; 9)

   c) $f(x) = -3(x-1)^2 + 3$; Dom = $R$; Ran = $]-\infty; 3]$; interceptos: (0; 0), (2; 0)

3. $f(x) = -4(x-1)^2 - 5$; Dom = $R$; Ran = [-5; +∞[; interceptos: (0; -1), $\left(1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2};0\right)$

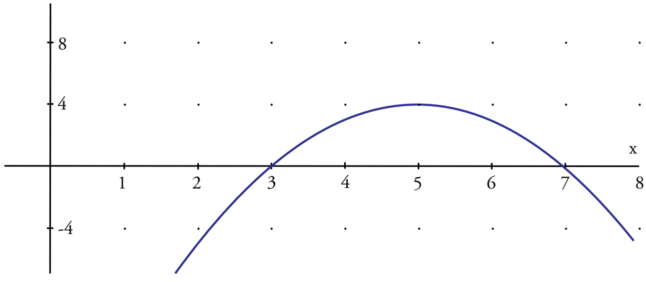



4. $A(x) = x(8-x)$, donde $x$ es la longitud de uno de los lados del rectángulo y $0 < x < 8$.

5. a) Depende, pues hay dos instantes en los que la altura del proyectil es 5 m. En uno de ellos, la cantidad de km recorridos es menor que 5 km pero; en el otro, es mayor.
   b) No, solo a la altura y = 15 km le corresponde un único elemento del dominio, x = 4 km. A los otros valores de la altura le corresponden dos valores del dominio.

6. $A(x) = x(3400 - 2x)$
   La expresión obtenida corresponde a una función cuadrática cuyo dominio es ]0; 1700[.

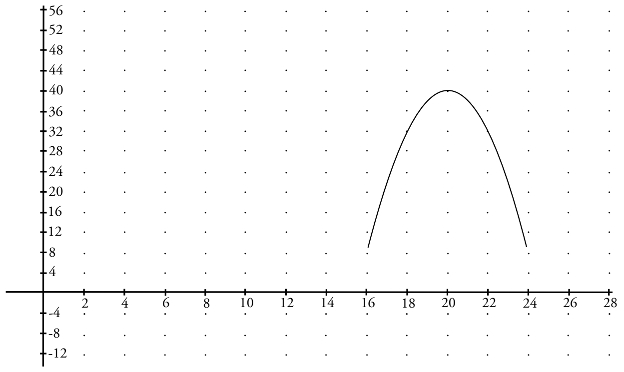
7. a) U = 3, lo que significa que hubo una ganancia de 3 000 dólares.
   b) U = 3,75, lo que significa que hubo una ganancia de 3 750 dólares.
   c)



d) Se deben producir 500 unidades para obtener la máxima utilidad que es 4 000 dólares.

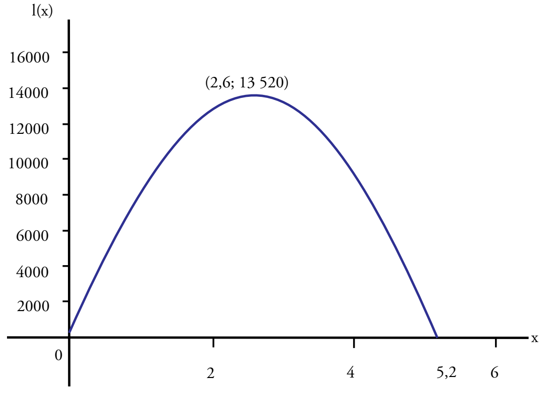
8. a) $U(x) = -0{,}1x^2 + 90x - 300$
   b) S/. 13 700
   Se deben producir y vender 450 artículos para obtener la máxima utilidad que es S/. 19 950.

9. a) $T(x) = -2(x - 20)^2 + 40$; $a$ = -2; h = 20; $k$ = 40, considerando $16 \leq x \leq 24$
   b)




   c) 20 km/h
   d) 40 km

10. a) S/. 12
   b) S/. 12
   c)



$U(t) = -(t-4)^2 + 16$
Vértice (4; 16)
Puntos corte con los ejes: (0; 0), (8; 0)
d) Deben alquilar un auto por 4 h para obtener la mayor utilidad posible que es S/. 16.

11. a) La expresión que relaciona el precio del pasaje y el número de pasajes vendidos es la siguiente, o una equivalente, $\dfrac{p-400}{4} = \dfrac{5000-n}{10}$

b) Una fórmula para la función que relaciona el ingreso con el precio es la siguiente

$$I\ (p) = \left(\frac{24000\text{-}10p}{4}\right)p$$

$$I\ (p) = -2{,}5(p-1200)^2 + 3600\ 000$$

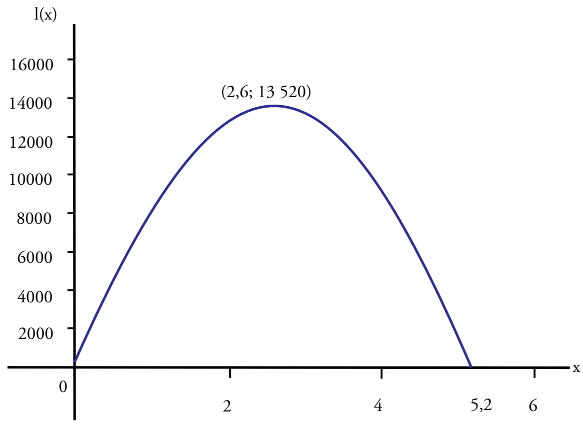
c) Para tener un máximo ingreso el pasaje debe costar 1200 dólares.

12. a) La tabla quedaría de la siguiente manera:

| **Precio por pan** <br> ***x*** | **Número de panes vendidos diariamente** <br> ***y*** |
|---|---|
| 0,20 | 10 000 |
| 0,20 + (1)0,005 | 10 000 - (1)(10) |
| 0,20 + 2(0,005) | 10 000 - (2)(10) |
| 0,20 + 3(0,005) | 10 000 - (3)(10) |
| 0,20 + 4(0,005) | 10 000 - (4)(10) |
| 0,20 + $m$(0,005) | 10 000 - ($m$)(10) |

b) $m = 200x - 40$
c) $y = -2\ 000x + 10\ 400$
d) Sea $I$ el ingreso: $I(x) = -2000x^2 + 10\ 400x$

e) La gráfica de $I$ es:




Su vértice es (2,6; 13 520).

Los interceptos con los ejes coordenados son (0; 0) y (5,2; 0).

f) El precio que debe asignarse a un pan para obtener el mayor ingreso posible es S/. 2,6.

13. a) De los datos se obtiene la siguiente tabla

| **Precio de un kg de pollo** *p* | **Número de kg de pollo vendidos** *n* |
|---|---|
| S/. 5 | 50 000 |
| S/. (5 + 0,10) | 50 000 - 500 |
| S/. (5 + 0,10(2)) | 50 000 - 500(2) |
| S/. (5 + 0,10($x$)) | 50 000 - 500($x$) |

Entonces, obtenemos la siguiente expresión:

$$p = 5 + 0{,}10x \qquad n = 50\,000 - 500x$$

Si se despeja x en cada ecuación y se iguala:

$$\frac{p-5}{0{,}10} = \frac{50000-n}{500}$$

b) Una fórmula para la función que relaciona el ingreso con el precio es la siguiente:

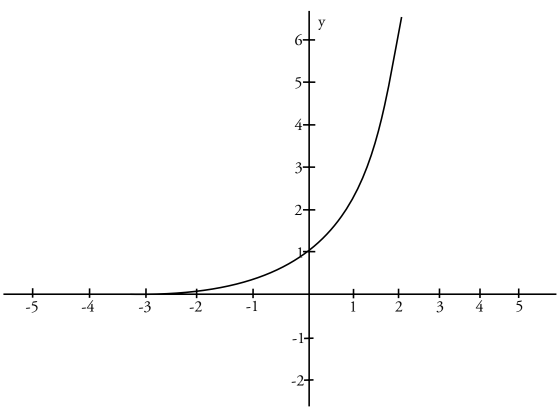
Ingreso = (precio de un kg)(número de kg vendidos)

De la fórmula obtenida en a), se obtiene que $n = \dfrac{7500 - 500p}{0{,}10}$
Entonces:

$$I(p) = n \times p$$
$$I(p) = \left( \frac{7500 - 500p}{0{,}10} \right) p$$

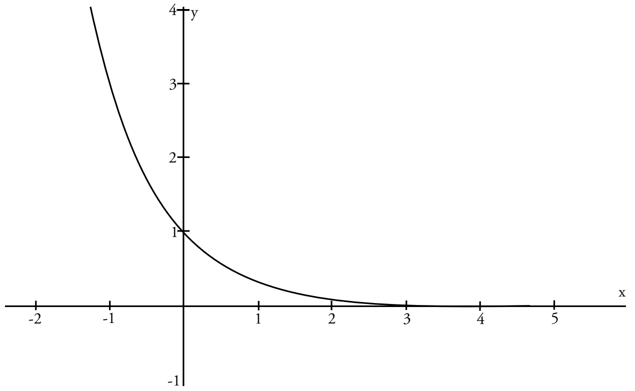
## Problemas 2.5

1. a) La gráfica es la siguiente:



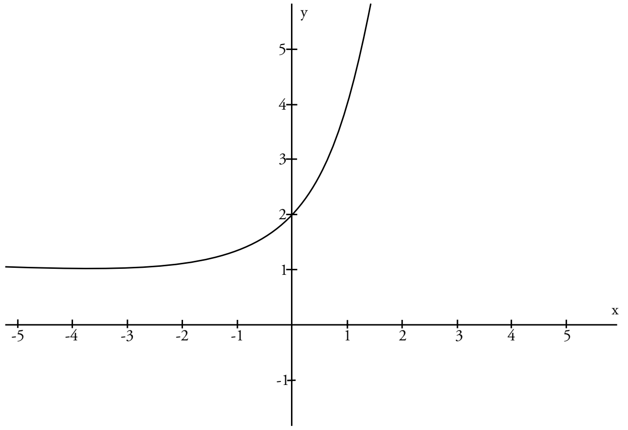

$Dom(f)$ = R $\qquad$ $Ran(f)$ = ]0; + ∞ [

b) La gráfica es:



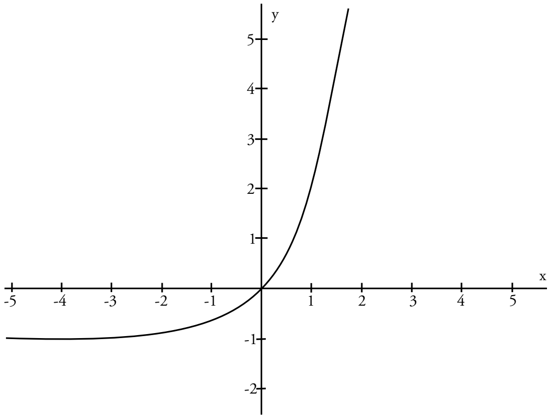

$Dom(f) = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Ran(f) = ]0; +\infty[$

c) La gráfica es la siguiente:



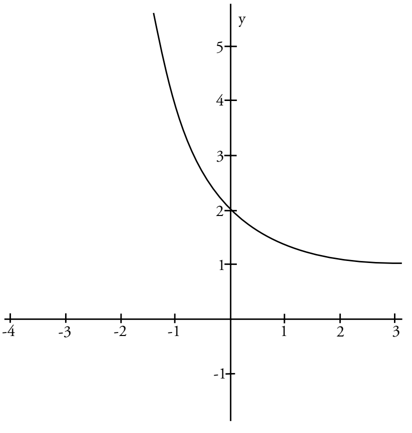

$Dom(f) = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Ran(f) = ]1; +\infty[$

d) La gráfica es la siguiente:



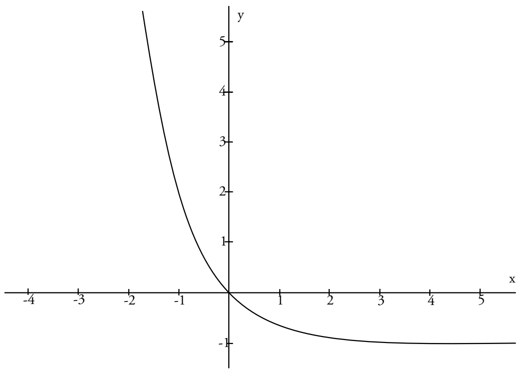

$Dom(f) = \mathrm{R}$ $Ran(f) = ]-1; +\infty[$

e) La gráfica es la siguiente:



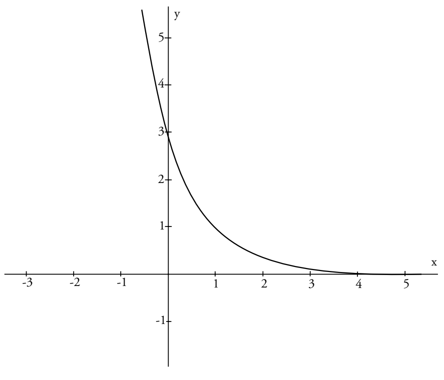

$Dom(f) = \mathrm{R}$ $Ran(f) = ]1; +\infty[$

f) La gráfica es la siguiente:




$Dom(f) = R$ $Ran(f) = ]-1; +\infty[$

g) La gráfica es la siguiente:




$Dom(f) = R$ $Ran(f) = ]0; +\infty[$

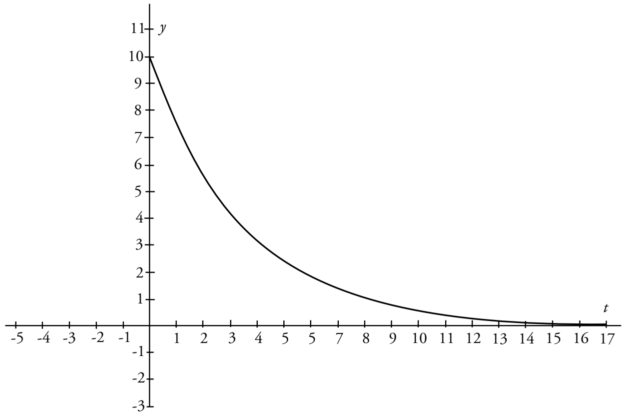
2. a) B
   b) A

3. $f(x) = 4{,}3(1{,}4)^x$
   $g(t) = 5{,}5(0{,}8)^t$

4. a) $0{,}75\ D_0$
   b) $0{,}5625\ D_0$

c) $0{,}75^{t}\ D_0$

d) Sea $f(t) = 10(0{,}75)^t$, $t \geq 0$, su gráfica es la siguiente:




e) Según la expresión obtenida en la parte c), el ibuprofeno no desaparecerá totalmente del torrente sanguíneo, pero a medida que pase el tiempo irá disminuyendo.

f) 2, 4 horas (valor aproximado).

5. a) La población después de 3 años será de 97 029 habitantes (aproximadamente).
   b) 8 años (aproximadamente).

6. a) 8 589 habitantes.
   b) 16 años.

7. a) Para el 2015 la población será de 138 750 habitantes.
   b) 141 años (valor aproximado).

8. a) $k = 12{,}77$
   b) Para $R = 7{,}45$, es decir, el riesgo es de 7,45%.
   c) $x = 0{,}22$

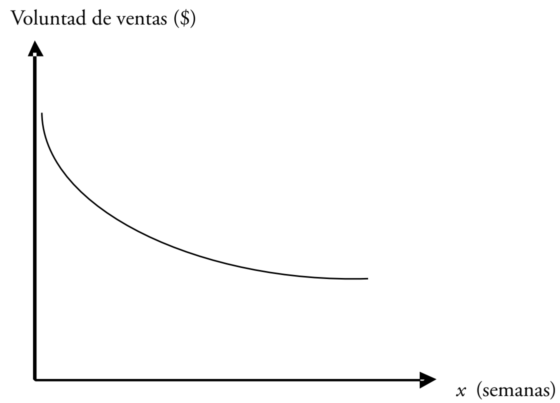
9. Sería más rentable el método b), pues 21 474 836,46 > 1 000 000.

10. a) $n = 1{,}98$ días (1 día 23 horas 31 minutos 12 segundos)
    b) $n = 6{,}58$ días (6 días 13 horas 53 minutos 30 segundos)

11. a) $k = -0{,}1340$
b) $A = 89\ 774{,}78$
c)

| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Volumen | 78 515 | 68 667,44 | 60 055 | 52 522,75 | 45 935,21 |

d) El volumen de ventas en la cuarta semana fue de $ 52 522,76.
e)

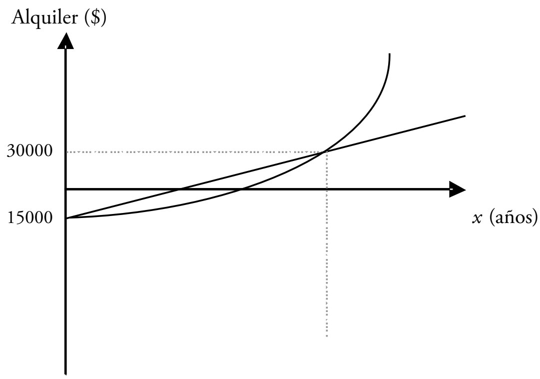



El volumen de ventas disminuye al transcurrir el tiempo.
f) 4,3673 días.

12. a) $y = 750x + 15000$
b) $S = 15000\left(\sqrt[20]{2}\right)^x$
c)

| $x$ | (I) Crecimiento lineal del alquiler | (II) Crecimiento exponencial del alquiler |
|---|---|---|
| 0 | 15 000 | 15 000 |
| 5 | 18 750 | 17 838,11 |
| 10 | 22 500 | 21 213,20 |
| 15 | 26 250 | 25 226,89 |
| 20 | 33 750 | 30 000 |
| 25 | 37 500 | 35 676,21 |
| 30 | 37 500 | 42 426,40 |

d)




## Problemas 2.6

1. a) Las variables que se relacionan son los años y el número de huelgas producidas a nivel nacional en esos años. Es importante notar que en la gráfica los puntos que sobresalen se han unido por segmentos para resaltar el crecimiento o decrecimiento del número de huelgas, pero en realidad la gráfica debió ser solo un conjunto finito de puntos.
   b) El dominio está formado por los valores enteros entre 1985 y 2007 inclusive, y el rango de la función está formado por las alturas de los puntos marcados en el gráfico; es decir, por el conjunto {50; 100; 150; 200; 300; 550: 600; 650; 700; 750; 850}. Estas variables son discretas.
   c) Según la gráfica, en 1988 hubo mayor número de huelgas.
   d) El número total de huelgas entre 1995 y 2007 se obtiene sumando las ordenadas de los años respectivos.

2. a) $Dom\ (f) = [-4; -2[\cup]-2; 4]$ y $Ran\ (f) = [-2; 6]$
   b) Creciente: $]-4; -2] \cup ]0; 1[$
   Decreciente: $]-2; 0[$
   Constante: $]1; 4]$
   c) Valor máximo de $f$: $f(1) = 6$ y valor mínimo de $f$: $f(0) = 2$
   d) $E = \dfrac{4}{3}$
   e) No es posible encontrar $f(-1)$, pero sí $f(3) = 4$.

3. a) Solución alternativa: asumiendo que se moviliza en automóvil, dado que la distancia es en millas. El estudiante parte de su domicilio y en 4 minutos recorre 2 millas, luego se detiene a recoger a otros estudiantes que demoran 2 minutos y finalmente llega a la escuela en 10 minutos.

   b) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & , \quad 0 \le x \le 4 \\ 2 & , \quad 4 < x < 6 \\ x-4 & , \quad 6 \le x \le 10 \end{cases}$$

4. a) x: años entre 1980 y 2000
   y: número de desapariciones forzadas atribuidas a las fuerzas policiales reportadas
   b) Dom($f$) = {80;81;82;…;99;100}
   Teniendo en cuenta los datos puntuales tenemos:
   Ran($f$) = {2;6;30; …; 5; 0}
   c) Sí, pero por tramos.
   d) Entre 1982 y 1984.
   e) Sí podría inferirse.
   f) Con los datos obtenidos se tendría una información aproximada.

## Capítulo 3

### Problemas 3.1

1. a) Cuantitativa continua
   b) Cualitativa nominal
   c) Cualitativa nominal
   d) Cualitativa ordinal
   e) Cualitativa nominal
   f) Cualitativa ordinal
   g) Cuantitativa continua
   h) Cualitativa nominal
   i) Cuantitativa discreta
   j) Cuantitativa continua

2. a) Tipo de variable: cualitativa nominal
   Posible población: personas que viven en Lima

b) Tipo de variable: cuantitativa continua
   Posible población: estudiantes de la Universidad del Futuro
c) Tipo de variable: cualitativa nominal
   Posible población: personas que escuchan radio
d) Tipo de variable: cuantitativa discreta
   Posible población: personas que comen en restaurantes
e) Tipo de variable: cuantitativa discreta
   Posible población: personas que utilizan celular

3. a) Variable estadística: nivel de estudio
   Tipo de variable: cualitativa ordinal
   b) Muestra: grupo de habitantes del distrito de San Miguel
   Posible población: habitantes del departamento de Lima

4. a) Variable estadística: número de vehículos de transporte público que toma al día
   Tipo de variable: cuantitativa discreta
   b) Muestra: grupo de estudiantes de la Universidad del Futuro
   Población: estudiantes de la Universidad del Futuro

## Problemas 3.2

1. a) Variable estadística: puntaje obtenido en un test psicológico
   Tipo de variable: cuantitativa discreta
   b) Sí se podía utilizar una tabla como la descrita. La ventaja sería que así tendríamos la información organizada por puntaje obtenido en el test.
   c)

| **Intervalos de puntajes** | **Cantidad de niños** |
|---|---|
| [4; 11[ | 2 |
| [11; 18[ | 3 |
| [18; 25[ | 9 |
| [25; 32[ | 15 |
| [32; 39[ | 8 |
| [39; 46] | 3 |
| **Total** | **40** |

d)

| Intervalos $[x_i; x_{i+1}[$ | Marca de clase ($x_i$') | Frecuencias absolutas ($f_i$) | Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$) | Frecuencias acumuladas ($F_i$) | Frecuencias relativas acumuladas ($H_i$) |
|---|---|---|---|---|---|
| [4 - 11[ | 7,5 | 2 | 0,05 | 2 | 0,05 |
| [11 - 18[ | 14,7 | 3 | 0,075 | 5 | 0,125 |
| [18 - 25[ | 21,5 | 9 | 0,225 | 14 | 0,35 |
| [25 - 32[ | 28,5 | 15 | 0,375 | 29 | 0,725 |
| [32 - 39[ | 35,5 | 8 | 0,2 | 37 | 0,925 |
| [39 - 46] | 42,5 | 3 | 0,075 | 40 | 1 |
| | | 40 | 1 | | |

e) 14 niños
f) 3 niños
g) 72,5%
h) 27,5%

2. a) Variable estadística: puntaje obtenido en una prueba sobre puntos
   Tipo de variable: cuantitativa discreta
   b) Muestra: 40 alumnos de un colegio
   Posible población: todos los alumnos del colegio
   c) Es más conveniente presentar la información resumida como la tabla 2 porque esto permite detectar el rendimiento de los alumnos. Aunque la presentación de los datos depende del tipo de investigación que se está realizando, la forma 2 permite organizar la información recogida directamente, en este caso de las pruebas.
   d)

| Intervalos $[x_i; x_{i+1}[$ | Marca de clase ($x_i$') | Frecuencias absolutas ($f_i$) | Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$) | Frecuencias acumuladas ($F_i$) | Frecuencias relativas acumuladas ($H_i$) |
|---|---|---|---|---|---|
| [40 - 49[ | 44,5 | 3 | 0,075 | 3 | 0,075 |
| [49 - 58[ | 53,5 | 5 | 0,125 | 8 | 0,2 |
| [58 - 67[ | 62,5 | 5 | 0,125 | 13 | 0,325 |
| [67 - 76[ | 71,5 | 7 | 0,175 | 20 | 0,5 |
| [76 - 85[ | 80,5 | 13 | 0,325 | 33 | 0,825 |
| [85 - 94] | 89,5 | 7 | 0,175 | 40 | 1 |
| | | 40 | 1 | | |

e) 20
f) 5
g) 82,5%
h) 17,5%

3. a)

| **Intervalos** $[x_i; x_{i+1}[$ | **Marca de clase** $(x_i')$ | **Frecuencias absolutas** $(f_i)$ | **Frecuencias relativas** $(h_i = f_i/n)$ | **Frecuencias acumuladas** $(F_i)$ | **Frecuencias relativas acumuladas** $(H_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [127 - 132[ | 129,5 | 4 | 0,2 | 4 | 0,2 |
| [132 - 137[ | 134,5 | 6 | 0,3 | 10 | 0,5 |
| [137 - 142[ | 139,5 | 3 | 0,15 | 13 | 0,65 |
| [142 - 147[ | 144,5 | 3 | 0,15 | 16 | 0,8 |
| [147 - 152[ | 149,5 | 2 | 0,1 | 18 | 0,9 |
| [152 - 157[ | 154,5 | 1 | 0,05 | 19 | 0,95 |
| [157 - 162] | 159,5 | 1 | 0,05 | 20 | 1 |
| | | 20 | 1 | | |

b) 35%

## Problemas 3.3

1. a) Variable estudiada: la raza; tipo: cualitativa nominal
   b)

| **Raza** | **Frecuencia absoluta** $f_i$ | **Frecuencia relativa** $h_i$ | **Frecuencia porcentual** $p_i$ |
|---|---|---|---|
| Blanca | 316 | 0,316 | 31,6% |
| Negra | 175 | 0,175 | 17,5% |
| Amarilla | 203 | 0,203 | 20,3% |
| Mestiza | 306 | 0,306 | 30,6% |
| Total | 1000 | 1 | 100% |

   c) No sería adecuado, ya que la variable estudiada no es cuantitativa continua.

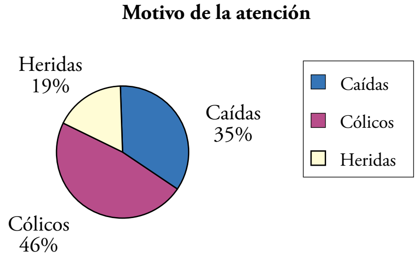
2. a) Son cualitativas nominales: el sexo y el motivo de la atención.
   b) Ambas variables no podrían representarse en una tabla de frecuencias de una variable aleatoria; habría que hacerlo en tablas distintas.

Por ejemplo:

| **Mujeres** | | | |
|---|---|---|---|
| Motivo de la atención | $f_i$ | $h_i$ | $p_i$ |
| Caídas | 15 | 0,35 | 35% |
| Cólicos | 20 | 0,46 | 46% |
| Heridas | 8 | 0,19 | 19% |

| **Hombres** | | | |
|---|---|---|---|
| Motivo de la atención | $f_i$ | $h_i$ | $p_i$ |
| Caídas | 12 | 0,21 | 21% |
| Cólicos | 25 | 0,44 | 44% |
| Heridas | 20 | 0,35 | 35% |

c) Mujeres:



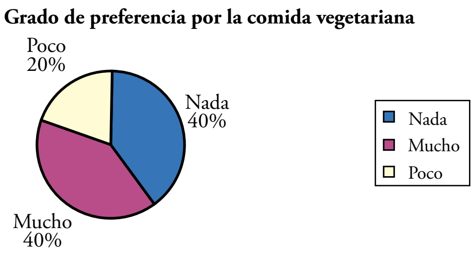

De manera similar, se obtiene un gráfico para los hombres.

3. a) Variable: grado de preferencia por la comida vegetariana
Tipo: cualitativa ordinal

Tabla de frecuencias:

| **Grado de preferencia** | $f_i$ | $h_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|
| Nada | 20 | 0,4 | 40% |
| Poco | 20 | 0,4 | 40% |
| Mucho | 10 | 0,2 | 20% |

Gráfico:

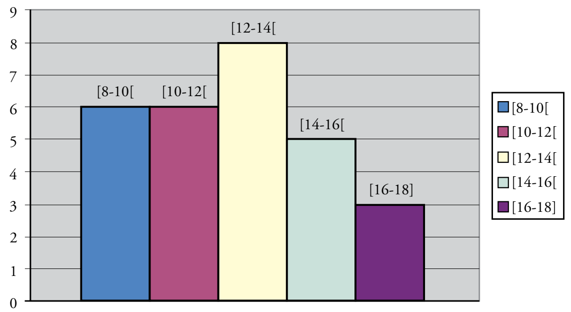


b) Variable: costo del menú
Tipo: cuantitativa continua

Tabla de frecuencias:

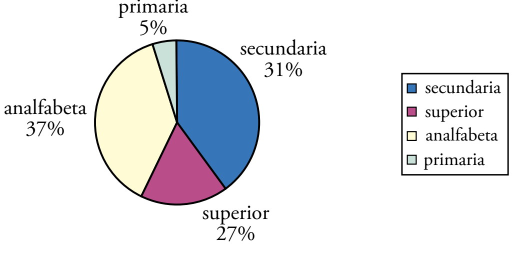
| Clases | $x_i'$ | $f_i$ | $h_i$ | $p_i$ | $F_i$ | $H_i$ | $P_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [8; 10[ | 9 | 6 | 0,21 | 21% | 6 | 0,21 | 21% |
| [10; 12[ | 11 | 6 | 0,21 | 21% | 12 | 0,42 | 42% |
| [12; 14[ | 13 | 8 | 0,29 | 29% | 20 | 0,71 | 71% |
| [14: 16[ | 15 | 5 | 0,18 | 18% | 25 | 0,89 | 89% |
| [16; 18] | 17 | 3 | 0,11 | 11% | 28 | 1 | 100% |

Gráfico:




4. a) Variable: medio de preferencia para informarse mejor
Tipo: cualitativa nominal
b) No, porque la suma no es 100%.

5. a) Se representan dos variables:
El grado de instrucción y el uso o no uso de anticonceptivos. Los tipos de estas variables son, respectivamente, cualitativa ordinal y cualitativa nominal.
b) Corresponde al grado de instrucción de las personas que no usan anticonceptivos.



## Problemas 3.4.1

1. No puede ser la mediana ya que la única manera de que esta sea un número con cifras decimales es si fuera el resultado de promediar dos enteros consecutivos (por ejemplo 0 y 1, 1 y 2, etcétera), y en ningún caso este promedio será 0,9. Tampoco puede ser la moda porque esta medida de tendencia central debe tomar uno de los valores de la variable y 0,9 no es un valor de la variable número de vehículos.

2. a) En total fueron encuestados 4 000 hinchas
   b) El equipo B tiene 1 440 hinchas
   c) Hinchas del equipo A: 1 680
   Hinchas del equipo C: 440
   Hinchas del equipo D: 240
   La variable es cualitativa nominal

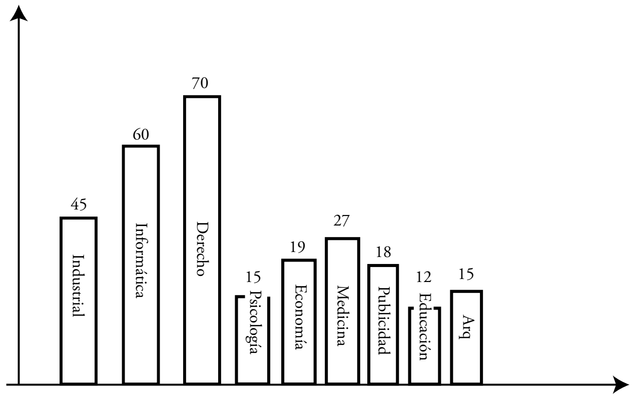
| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $P_i$=$h_i$% | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Equipo A | 1 680 | 1 680 | 0,42 | 42 | 0,42 |
| Equipo B | 1 440 | 3 120 | 0,36 | 36 | 0,78 |
| Equipo C | 440 | 3 560 | 0,11 | 11 | 0,89 |
| Equipo D | 240 | 3 800 | 0,06 | 6 | 0,95 |
| Otros | 200 | 4 000 | 0,05 | 5 | 1,00 |

   d) Es imposible determinar la mediana, ya que se trata de una variable cualitativa. La moda está dada por el equipo A, pues es el de mayor preferencia.

3. a) Denotemos por $x_i$ la variable estadística involucrada. Esta variable está definida como la carrera que estudian los alumnos de la promoción 2005 del colegio Albert Newton. La variable es de tipo cualitativa nominal.
   b)

| $x_i$ | $f_i$ | $h_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|
| I. Industrial | 45 | 0,16 | 16 |
| I. Informática | 60 | 0,21 | 21 |
| Derecho | 70 | 0,25 | 25 |
| Psicología | 15 | 0,05 | 5 |
| Economía | 19 | 0,07 | 7 |
| Medicina | 27 | 0,10 | 10 |
| Publicidad | 18 | 0,06 | 6 |
| Educación | 12 | 0,04 | 4 |
| Arquitectura | 15 | 0,05 | 5 |

c)

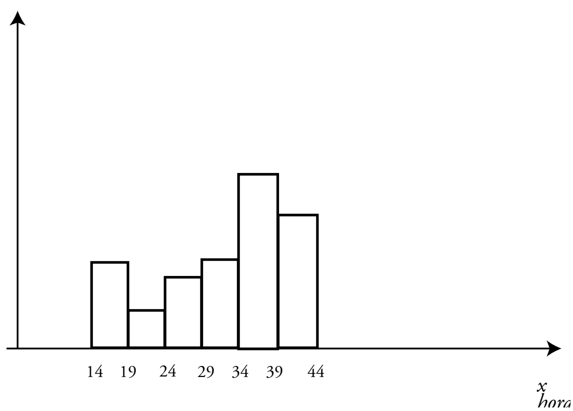



4. a) Variable: número de horas que invierten los alumnos en internet
Tipo: variable cuantitativa continua

b)

| **Intervalos** | $x_i'$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $P_i=h_i\%$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [14 - 19[ | 16,5 | 7 | 7 | 0,14 | 14 | 0,14 |
| [19 - 24[ | 21,5 | 3 | 10 | 0,06 | 6 | 0,20 |
| [24 - 29[ | 26,5 | 6 | 16 | 0,12 | 12 | 0,32 |
| [29 - 34[ | 31,5 | 7 | 23 | 0,14 | 14 | 0,46 |
| [34 - 39[ | 36,5 | 15 | 38 | 0,30 | 30 | 0,76 |
| [39 - 44] | 41,5 | 12 | 50 | 0,24 | 24 | 1,00 |

c) La siguiente variable relaciona el número de alumnos con las horas que invierten en internet.



## Problemas 3.4.2

1. Media aritmética = $\bar{x} = \dfrac{121}{20} = 6{,}05$

   Mediana= $M_e = \dfrac{6+7}{2} = 6{,}5$

   Moda = $M_o = 8$

2. $\bar{x} = 14{,}25,\ M_e = 15\quad M_o, = 16$

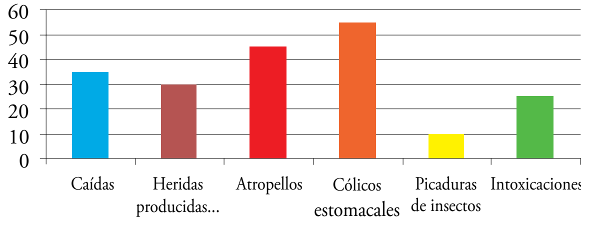
3.

| Clases | $x_i$' | $f_i$ | $h_i$ | $p_i$ | $F_i$ | $H_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [150; 180[ | 165 | 20 | 0,1 | 10% | 20 | 0,10 |
| [180; 210[ | 195 | 40 | 0,2 | 20% | 60 | 0,30 |
| [210; 240[ | | 50 | 0,25 | 25% | 110 | 0,55 |
| [240; 270[ | | 50 | 0,25 | 25% | 160 | 0,80 |
| [270; 300] | | 40 | 0,2 | 20% | 200 | 1 |

4. Las edades son 22, 22, 23 y 28.

5. a) La variable estudiada es la temperatura promedio de un paciente durante 10 días y el tipo de la variable es cuantitativa continua.
   b) $\bar{x} = 37{,}69$, $M_e = 37{,}65$, $M_o = 37{,}5$ y 38, es bimodal.

6. a) Variable estudiada: motivo de atención de los pacientes durante una semana en una unidad de emergencia.
   Tipo: cualitativa nominal
   b) En un gráfico de barras.



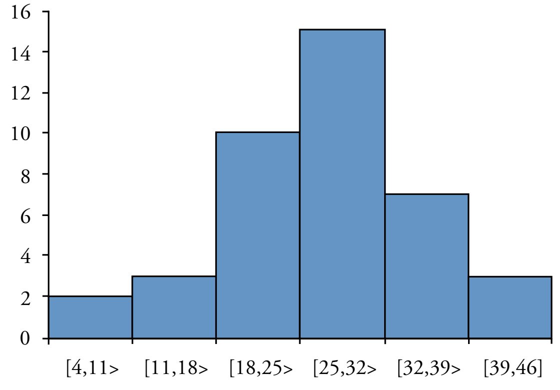
c) La moda

7. a)
   Mediana = 27
   Moda = 27, 28,31
   Media = 26,9

   b)

| Inversión | Marcas de clase $x_i$ | $f_i$ | $h_i$ | $F_i$ | $H_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [4 - 11[ | 7,5 | 2 | 0,05 | 2 | 0,05 | 5% |
| [11 - 18[ | 14,5 | 3 | 0,075 | 5 | 0,125 | 7,5% |
| [18 - 25[ | 21,5 | 10 | 0,25 | 15 | 0,375 | 25% |
| [25 - 32[ | 28,5 | 15 | 0,375 | 30 | 0,75 | 37,5% |
| [32 - 39[ | 35,5 | 7 | 0,175 | 37 | 0,925 | 17,5% |
| [39 - 46] | 42,5 | 3 | 0,075 | 40 | 1 | 7,5% |

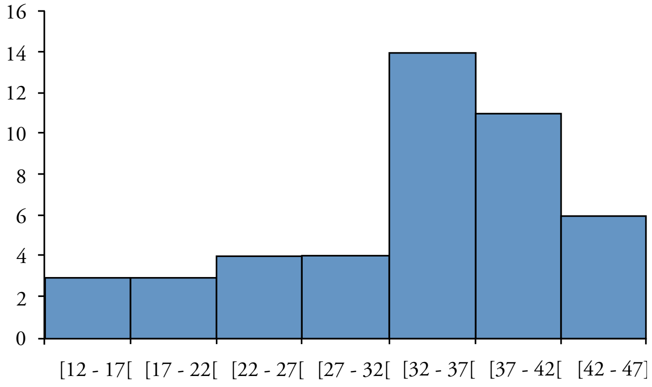
   c) Menos de 18 mil dólares: 12.5%.
   d) Por lo menos 18 mil dólares: 22,5%.
   e)




8. a) Media = 33,34
   Mediana = 35
   Moda = 35 y 36

| **Intervalos** | **Marcas de clase** | $f_i$ | $h_i$ | $F_i$ | $H_i$ | $p_i$% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [12 - 17[ | 14,5 | 3 | 0,07 | 3 | 0,07 | 7 |
| [17 - 22[ | 19,5 | 3 | 0,07 | 6 | 0,14 | 7 |
| [22 - 27[ | 24,5 | 4 | 0,09 | 10 | 0,23 | 9 |
| [27 - 32[ | 29,5 | 4 | 0,09 | 14 | 0,32 | 9 |
| [32 - 37[ | 34,5 | 14 | 0,31 | 28 | 0,63 | 31 |
| [37 - 42[ | 39,5 | 11 | 0,24 | 39 | 0,87 | 24 |
| [42 - 47] | 44,5 | 6 | 0,13 | 45 | 1 | 13 |
| **Total** | | **45** | | | | |

b)

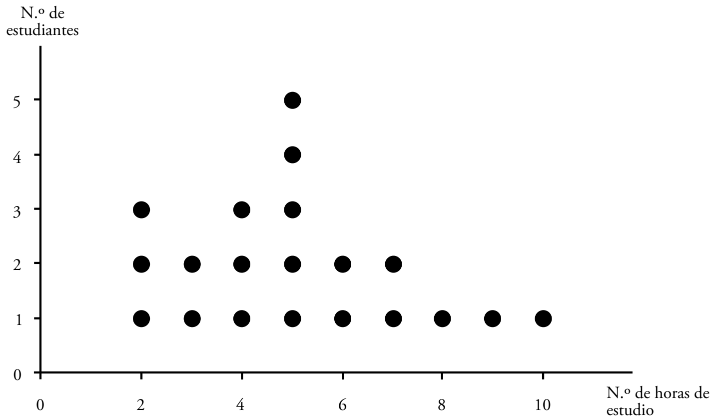



9. a) Variable estudiada: el estado civil (o también lugar de procedencia)
   Tipo de variable: cualitativa nominal. Los valores que puede tomar son soltero, casado, divorciado y conviviente.
   b) No es posible, pues no se menciona el total de entrevistados.
   c) No tiene sentido.
   d) En un diagrama circular, considerando las variables estado civil o lugar de procedencia por separado.

10. a) Verdadero
   b) Falso
   c) Falso
   d) Falso
   e) Verdadero

## Problemas 3.5

1. a) En un diagrama de puntos



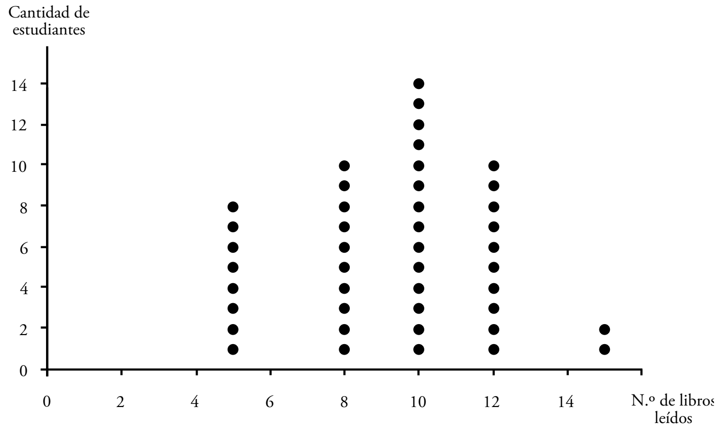

b) Media = 5,1
Desviación estandar = 2,26

2. a)

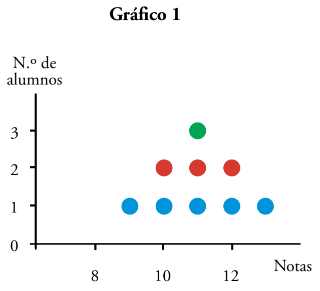
| **Libros leídos** | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 8 | 0,19 | 0,19 | 19% |
| 8 | 10 | 18 | 0,24 | 0,43 | 24% |
| 10 | 14 | 32 | 0,33 | 0,76 | 33% |
| 12 | 8 | 40 | 0,19 | 0,95 | 19% |
| 15 | 2 | 42 | 0,05 | 1 | 5% |
| | 42 | | | 1 | 100% |

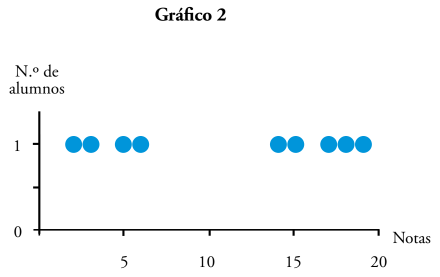
b) Media aritmética = 9,19
Desviación estándar = 2,65

c)



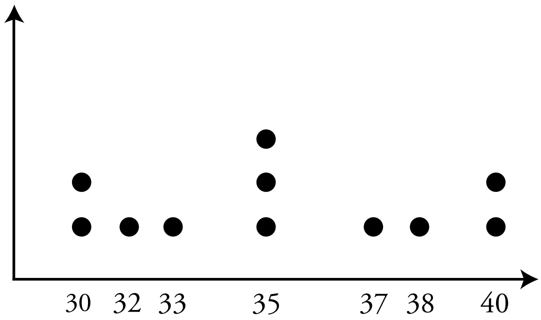

3. a) La media aritmética de ambos grupos es 11.
   b) Gráfico




   c) No es similar.
   d) Desviación estándar del grupo 1: 1,29.
      Desviación estándar del grupo 2: 6,50.

4. a) Gráfica




b)

| $x_i$ | $f_i$ | $h_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| 30 | 2 | 0,18 | 2 |
| 32 | 1 | 0,09 | 3 |
| 33 | 1 | 0,09 | 4 |
| 35 | 3 | 0,27 | 7 |
| 37 | 1 | 0,09 | 8 |
| 38 | 1 | 0,09 | 9 |
| 40 | 2 | 0,18 | 11 |
| | 11 | 1,00 | |

c) $\overline{x} = 35$ y $S = 3{,}55$

d) La mayoría de datos se encuentran en el intervalo:

$$[\overline{x} - S;\ \overline{x} + S] = [31{,}45;\ 38{,}55]$$

5. a) La media aumenta en S/. 300 y la desviación se mantiene igual

$$\overline{x}_A = 2850, \quad S_A = 1922$$

En este caso la media, como la desviación estándar, se duplica

$$\overline{x}_A = 5100, \quad S_A = 3844$$

b) La alternativa A conviene, pues el sueldo aumenta por igual para todos, además, hay menor dispersión de datos.

6. a) **Grupo A**

| $x'_i$ | $f_i$ | $f_i x'_i$ | $f_i(x'_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| 82,5 | 4 | 330 | 608 |
| 87,5 | 14 | 1 225 | 753 |
| 92,5 | 23 | 2 127 | 125 |
| 97,5 | 17 | 1 657 | 121 |
| 102,5 | 11 | 1 127 | 647 |
| 107,5 | 6 | 645 | 963 |

**Grupo B**

| $x'_i$ | $f_i$ | $f_i x'_i$ | $f_i(x'_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| 82,5 | 9 | 743 | 1 310 |
| 87,5 | 14 | 1 225 | 698 |
| 92,5 | 20 | 1 850 | 85 |
| 97,5 | 18 | 1 755 | 155 |
| 102,5 | 10 | 1 025 | 630 |
| 107,5 | 9 | 968 | 4 384 |

$\bar{x}_A = 94{,}83$

$S_A = 6{,}59$

$\bar{x}_B = 94{,}56$

$S_B = 7{,}45$

b) El grupo A tiene mayor estatura promedio (mayor media).

c) En el grupo A las estaturas son más homogéneas, pues $\frac{S_A}{\bar{x}_A} < \frac{S_B}{\bar{x}_B}$.

7.

a) Si se cumple que

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$

Entonces se tendrá que:

$\bar{x} = 0$

$S = 0$

b) Al sumar $k$ a cada uno de los datos:

- La media aumenta en $k$.
- La desviación estándar no cambia.

c) Al multiplicar por $k$ a cada uno de los datos, se tendrá que la media y la desviación estándar respectivas serán $k\bar{x}$ y $kS$, donde $\bar{x}$ y $S$ son los valores de la media y desviación de los datos iniciales.

## Problemas 3.6

1. a)

- El dato ocupa la posición 15. Así $P_{33} = 32$.
- El dato ocupa la posición 31. Así $P_{67} = 38$.
- Tomando los datos de la posición 36 y 37 tenemos $P_{80} = 40{,}5$.

b) Sí, ya que el tercio inferior considera hasta el dato 15 que es 32 horas.
c) El quinto superior se considera desde el dato 37 al dato 45, es decir, a partir de 41 horas.

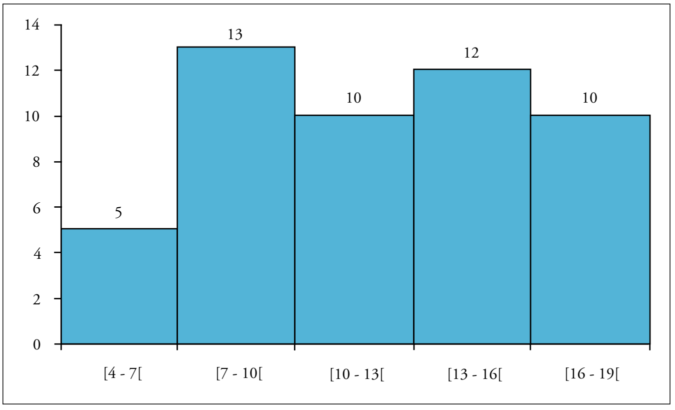
2. a) $P_{25} = 88{,}5$
$P_{75} = 106{,}5$

b) $P_{50} = 95{,}5$ quiere decir que el 50% de los datos tienen altura mayor a 95,5 cm.

3. a)

| | $x'_i$ | $f_i$ | $h_i$ | $F_i$ | $f_i x'_i$ | $f_i(x'_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [4 - 7[ | 5,5 | 5 | 0,1 | 5 | 27,5 | 214 |
| [7 - 10[ | 8,5 | 13 | 0,26 | 18 | 110,5 | 163 |
| [10 - 13[ | 11,5 | 10 | 0,2 | 28 | 115 | 3 |
| [13 - 16[ | 14,5 | 12 | 0,24 | 40 | 174 | 73 |
| [16 - 19[ | 17,5 | 10 | 0,2 | 50 | 175 | 298 |
| | | 50 | 1,00 | | 602 | 750 |

b) La siguiente gráfica muestra la cantidad de alumnos que se ubican en los distintos grupos, según haya sido su rendimiento en un examen de Matemáticas.




c) $\bar{x} = 12{,}04$

$S = 3{,}91$

d) $P_{33} = 9$
$P_{67} = 13$
$P_{80} = 15{,}5$

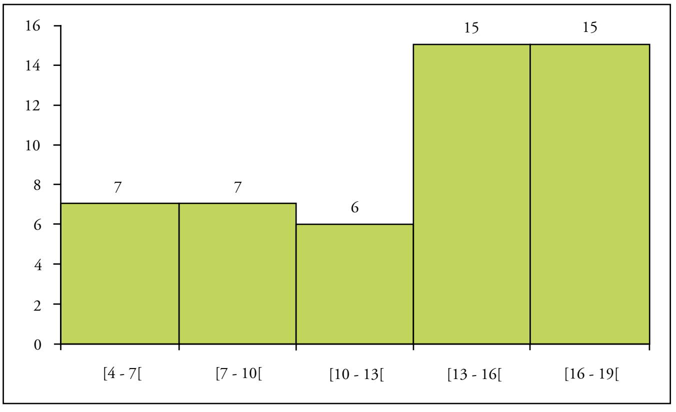
e) A partir del dato 41.º al 50.º corresponde a 16.

4. a) En el cuarto superior se encuentra el 25% de los datos. En el quinto superior está el 20% de datos. Será más exigente estar en el quinto superior.
   b) Cada grupo está en el respectivo tercio superior de su universidad, habría que tener cuidado al comparar los rendimientos de ambos grupos pues el nivel de exigencia de cada universidad podría haber sido distinto.

5. a) Variable: total de horas semanales en internet
   Tipo: cuantitativa discreta
   b)

| | $x'_i$ | $f_i$ | $h_i$ | $F_i$ | $f_i x'_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [14 - 20[ | 17 | 7 | 0,14 | 7 | 119 |
| [20 - 26[ | 23 | 7 | 0,14 | 14 | 161 |
| [26 - 32[ | 29 | 6 | 0,12 | 20 | 174 |
| [32 - 38[ | 35 | 15 | 0,3 | 35 | 525 |
| [38 - 41[ | 41 | 15 | 0,3 | 50 | 615 |
| | | 50 | 1,00 | | 1594 |

   c) La siguiente gráfica muestra la cantidad de alumnos que se ubican en los distintos grupos, según haya sido el número de horas que usaban internet.



d) $\overline{x} = 31{,}88$
$S = 8{,}51$

e) $P_{25} = 25$
$P_{67} = 37$
$P_{80} = 39{,}5$

f) El dato número 41 es 40. Se considera a partir de 40 horas.

## Capítulo 4

### Problemas 4.1

1. a) Aleatoria
   b) Depende. Es no aleatoria si sé lo que desayuno todos los días y es aleatoria si no lo sé.
   c) Aleatoria

2. Algunos posibles resultados son los siguientes:
   - Julio no encuentra a Diana.
   - Julio y Diana se enamoran.
   - Julio es deportado a su país.

3. Algunos posibles resultados son los siguientes:
   - Toma un ómnibus.
   - Toma un taxi.
   - Un amigo que estaba pasando por allí lo lleva hasta su destino.

4. a) Aleatorio
   b) Aleatorio
   c) No aleatorio

### Problemas 4.2

1. a) La situación es aleatoria, pues Carlos, que es el observador, no sabe qué plato pedirán.
   b) $\Omega$ = {(T; T),(T; M),(T; C),(T; G), (M; M),(M;C),(M; G),(C;C),(C; G),(G; G)} donde T: trucha, M: milanesa, C: cuy, G: guiso.
   c) $\Omega_1$ = {M, M)}. Los dos turistas comen milanesa de alpaca.

2. Se denotará cara por c y sello por s
   a) {(1;c), (1; s), (2;c), (2;s), (3;c), (3;s), (4;c), (4;s), (5;c), (5;s), (6;c), (6;s)}
   b) Evento: Se obtiene un número par= {(2;c), (2;s), (4;c), (4;s), (6;c), (6;s)}
      Evento: Se obtiene una cara= {(1;c), (2;c), (3;c), (4;c), (5;c) (6;c)}
      Evento: Se obtiene una cara y un número par= {(2;c), (4;c), (6;c)}
      Evento: Se obtiene una cara o un número par= {(1;c), (2;c), (2;s), (3;c), (4;c), (4;s), (5;c), (6;c), (6;s)}
      Evento: Se obtiene un número menor que 5 y un sello= {(1;s), (2;s), (3;s), (4;s)}

3. Sean C1: caja 1, C2: caja 2, C3: caja 3, C4: caja 4, C5: caja 5, C6: caja 6.
   a) Espacio muestral = {(C1; C2), (C1; C3), (C1; C4), (C1; C5), (C1; C6), (C2; C3), (C2; C4), (C2; C5), (C2; C6), (C3; C4), (C3; C5), (C3; C6), (C4; C5), (C4; C6), (C5; C6)}
   b)

      E1 = {(C1; C2), (C1; C3), (C1; C4), (C1; C5), (C1; C6), (C2; C3), (C2; C6), (C3; C4), (C3; C5) (C3; C6), (C4; C6), (C5; C6)}

      E2 = {(C1; C3), (C1; C5), (C2; C3), (C2; C5), (C3; C4), (C3; C5), (C3; C6), (C4; C5), (C5; C6)}

      E3 = {(C1; C3), (C1; C5), (C2; C3), (C3; C4), (C3; C5), (C3; C6), (C5; C6)}

      E4 = {(C1; C2), (C1; C3), (C1; C4), (C1; C5), (C1; C6), (C2; C3), (C2; C5), (C2; C6), (C3; C4), (C3; C5), (C3; C6), (C4; C5), (C4; C6), (C5; C6)}

4. a) Variables cuantitativas.
   b) (1 hora; 5 heladeros; 1 chico guapo).
   c) Número de niños que entran a bañarse al mar, el número de bebidas que tomaron los asistentes a la playa, el número de chicas que usan lentes, etcétera.
   d) S = {(un niño, una bebida, una chica con lentes), (un niño, 0 bebidas, dos chicas con lentes), (dos niños, 4 bebidas, tres chicas con lentes), ….. }
   e) Un primer evento:
      Por extensión: un niño entra a bañarse al mar.
      Por comprensión: {un niño}.

      Un segundo evento:
      Por extensión: un niño entra a bañarse a la playa y tres chicas usan lentes.
      Por comprensión: {(un niño, 0 bebidas, tres chicas)}.

## Problemas 4.3

1. a) Rojo, negro.
   b) No, es más probable que sea roja pues hay más lapiceros de este color.

   c) $P_{rojo} = \frac{6}{10} = 0,6$

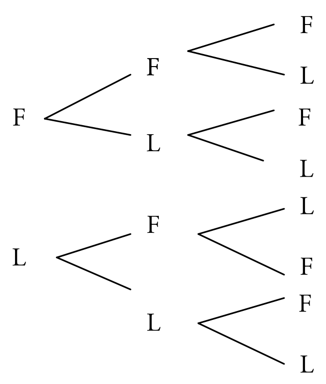
   $P_{negro} = \frac{4}{10} = 0,4$

   $P_{azul} = \frac{0}{10} = 0$

2.
   a) $P_{impar} = \frac{4}{8} = 0,5$

   b) $P_{(4 \text{ ó } 5)} = \frac{2}{8} = 0,25$

3. a) 1.º 2.º 3.º




   b) S = {FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL}
   c) $E_1$ = {FFF, LLL} Tiene más de un elemento
   $E_2$ = {FFL, FLF, LFF} Tiene más de un elemento

d) $P_1 = \frac{2}{8} = 0,25$

e) $P_2 = \frac{3}{8} = 0,375$

4. a) $\frac{4}{5}$

   b) $\frac{3}{5}$

   c) $\frac{1}{5}$

   d) Para cada ensayo el espacio muestral disminuiría y además solo 5 alumnos tendrían asignada alguna tarea y el resto no.

5. a) $\frac{13}{35}$

   b) $\frac{2}{5}$

   c) $\frac{27}{35}$

   d) A la especialidad de Derecho porque hay más estudiantes de esta carrera en el grupo de alumnos.

6. a)

| Año | Número de alumnos que siguieron una carrera de Letras | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 480 | 480 | 0,4800 |
| 2 | 625 | 1 105 | 0,5525 |
| 3 | 550 | 1 655 | 0,5517 |
| 4 | 640 | 2 295 | 0,5738 |
| 5 | 580 | 2 875 | 0,5750 |
| 6 | 590 | 3 465 | 0,5775 |
| 7 | 610 | 4 075 | 0,5821 |
| 8 | 680 | 4 755 | 0,5944 |
| 9 | 560 | 5 315 | 0,5906 |
| 10 | 605 | 5 920 | 0,5920 |
| 11 | 590 | 6 510 | 0,5918 |
| 12 | 620 | 7 130 | 0,5942 |

b) Los valores van incrementándose poco a poco estabilizándose alrededor de 0,59.
c) 0,59

# Bibliografía


Johnson, Robert y Patricia Kuby
2004 *Estadística elemental, lo esencial*. México D. F.: Thomson.

Stewart, James
2001 *Precáclulo*. México D. F.: Thomson.

Se terminó de imprimir en los talleres gráficos de
**Tarea Asociación Gráfica Educativa**
Pasaje María Auxiliadora 156 - Breña
Correo e.: tareagrafica@terra.com.pe
Teléf. 332-3229 Fax: 424-1582
Agosto 2009 Lima - Perú

En una sociedad globalizada, con cambios tan rápidos en la tecnología, con avances profundos en los diversos campos del conocimiento y con tendencias a la superespecialización, considero fundamental, en un marco de interdisciplinariedad, estimular el cultivo de las matemáticas en los estudiantes de todas las especialidades, haciendo evidente su carácter de vínculo entre las ciencias, la tecnología y la cultura, mostrando sus aportes para modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las ciencias humanas, sociales y naturales.

*Uldarico Malaspina*

Las matemáticas nos ofrecen la posibilidad de describir muchos fenómenos de nuestro entorno, empleando para ello un lenguaje preciso y unas herramientas poderosas bien organizadas. Sin embargo, luego del paso por la formación escolar básica, esta disciplina termina siendo respetada por todos, comprendida por algunos y querida por muy pocos. Esta situación hace que, por un lado, quien sea bueno en ella, adquiera un estatus superior y se sienta atraído por seguir una carrera en donde se la volverá a encontrar; y, por otro lado, quien no consigue comprenderla, trate de evitarla en su formación superior.

Este texto pretende ganar adeptos a esta ciencia mostrando cómo, a partir de situaciones cotidianas, con contextos próximos a no matemáticos y con una adecuada dirección de las actividades, se pueden presentar los conceptos formales y simultáneamente se puede cambiar la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y la concepción que poseen sobre sus capacidades matemáticas.

*Cecilia Gaita*

ISBN 978-9972-2968-3-3
9 789972 296833