

# El Arte de Resolver Problemas de Matemática

Concurso Provincial de Matemática. Imperial Cañete

Hugo Luyo Sánchez  
Mathematicorum y yo  
h.luyo@pucp.edu.pe

Noviembre 2010

# Consideraciones Previas

Esta conferencia versa sobre el desarrollo del **Arte** de resolver problemas de matemática, para ello asumiré tres cosas

# Consideraciones Previas

Esta conferencia versa sobre el desarrollo del **Arte** de resolver problemas de matemática, para ello asumiré tres cosas

- Les gusta la Matemática

# Consideraciones Previas

Esta conferencia versa sobre el desarrollo del **Arte** de resolver problemas de matemática, para ello asumiré tres cosas

- Les gusta la Matemática
- Conocen la matemática de la secundaria y que a mi parecer es la más hermosa

# Consideraciones Previas

Esta conferencia versa sobre el desarrollo del **Arte** de resolver problemas de matemática, para ello asumiré tres cosas

- Les gusta la Matemática
- Conocen la matemática de la secundaria y que a mi parecer es la más hermosa
- Desean aprender resolver *problemas* de matemática ya sea por apetito académico o con fines de enseñanza

# Consideraciones Previas

Esta conferencia versa sobre el desarrollo del **Arte** de resolver problemas de matemática, para ello asumiré tres cosas

- Les gusta la Matemática
- Conocen la matemática de la secundaria y que a mi parecer es la más hermosa
- Desean aprender resolver *problemas* de matemática ya sea por apetito académico o con fines de enseñanza
- Les gusta discutir soluciones de problemas matemáticos

# Consideraciones Previas

Esta conferencia versa sobre el desarrollo del **Arte** de resolver problemas de matemática, para ello asumiré tres cosas

- Les gusta la Matemática
- Conocen la matemática de la secundaria y que a mi parecer es la más hermosa
- Desean aprender resolver *problemas* de matemática ya sea por apetito académico o con fines de enseñanza
- Les gusta discutir soluciones de problemas matemáticos
- Son muy participativos...¿o no?

# Ejercicios vs Problemas

# Ejercicios vs Problemas

- ¿Qué es un problema?

# Ejercicios vs Problemas

- ¿Qué es un problema?
- ¿Qué diferencia hay entre Ejercicio y Problema?

# Ejercicios vs Problemas

- ¿Qué es un problema?
- ¿Qué diferencia hay entre Ejercicio y Problema?
- Ejercicio

Es una pregunta que podemos resolver inmediatamente. Dependiendo de cuán hábiles somos de aplicar una determinada técnica, pero no necesitamos inventar o crear una nueva técnica para resolverlo.

# Ejercicios vs Problemas

- ¿Qué es un problema?
- ¿Qué diferencia hay entre Ejercicio y Problema?
- Ejercicio  
Es una pregunta que podemos resolver inmediatamente. Dependiendo de cuán hábiles somos de aplicar una determinada técnica, pero no necesitamos inventar o crear una nueva técnica para resolverlo.
- Problema  
Contrario a lo anterior, un problema demanda pensar un momento y buscar varias alternativas de solución antes de encontrar la correcta.

# Ejemplo de Ejercicio

- 1 Halle las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

# Ejemplo de Ejercicio

- 1 Halle las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

- 2 Las raíces son  $x = 2, 3$

# Ejemplo de Ejercicio

- 1 Halle las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

- 2 Las raíces son  $x = 2, 3$
- 3 Se pudo hacer por fórmula general

# Ejemplo de Ejercicio

- 1 Halle las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

- 2 Las raíces son  $x = 2, 3$
- 3 Se pudo hacer por fórmula general
- 4 Se usa el método del aspa o factorización

# Ejemplo de Ejercicio

- 1 Halle las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

- 2 Las raíces son  $x = 2, 3$
- 3 Se pudo hacer por fórmula general
- 4 Se usa el método del aspa o factorización
- 5 No tuve que pensar mucho, conocía las dos técnicas anteriores

# Ejemplo de Problema

- 1 *Resolver la ecuación*

$$x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$$

*con  $a$  número real*

# Ejemplo de Problema

- 1 *Resolver la ecuación*

$$x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$$

*con  $a$  número real*

- 2 A primera vista si expandimos tendríamos una ecuación de 4to grado.

# Ejemplo de Problema

- 1 *Resolver la ecuación*

$$x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$$

*con  $a$  número real*

- 2 A primera vista si expandimos tendríamos una ecuación de 4to grado.
- 3 No conozco una técnica para resolver una ecuación de cuarto grado.

# Ejemplo de Problema

- 1 *Resolver la ecuación*

$$x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$$

*con  $a$  número real*

- 2 A primera vista si expandimos tendríamos una ecuación de 4to grado.
- 3 No conozco una técnica para resolver una ecuación de cuarto grado.
- 4 No hay fórmula general para una ecuación de cuarto grado, eso lo demostró Evariste Galois... no el colegio preuniversitario... sino el joven Matemático Francés.

# Ejemplo de Problema

- 1 Conozco cómo resolver una ecuación de 2do grado. ¿Cómo lo uso aquí?

# Ejemplo de Problema

- 1 Conozco cómo resolver una ecuación de 2do grado. ¿Cómo lo uso aquí?

# Ejemplo de Problema

- 1 Conozco cómo resolver una ecuación de 2do grado. ¿Cómo lo uso aquí?
- 2 Pensemos...he aquí lo *interesante* del problema, nos hace *pensar*

# Ejemplo de Problema

- 1 Conozco cómo resolver una ecuación de 2do grado. ¿Cómo lo uso aquí?
- 2 Pensemos...he aquí lo *interesante* del problema, nos hace *pensar*
- 3 Es cierto!! Obtengo una ecuación de cuarto grado si mi variable es  $x$ , pero si mi variable es  $a$  tengo una ecuación de segundo grado, y esa si la sé resolver

# Ejemplo de Problema

- 1 Conozco cómo resolver una ecuación de 2do grado. ¿Cómo lo uso aquí?
- 2 Pensemos...he aquí lo *interesante* del problema, nos hace *pensar*
- 3 Es cierto!! Obtengo una ecuación de cuarto grado si mi variable es  $x$ , pero si mi variable es  $a$  tengo una ecuación de segundo grado, y esa si la sé resolver
- 4 Así

$$4a^2 + 6xa - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$$

una ecuación cuya discriminante es:  $4x^2 (2x + 1)^2$

# Ejemplo de Problema

- 1 Conozco cómo resolver una ecuación de 2do grado. ¿Cómo lo uso aquí?
- 2 Pensemos...he aquí lo *interesante* del problema, nos hace *pensar*
- 3 Es cierto!! Obtengo una ecuación de cuarto grado si mi variable es  $x$ , pero si mi variable es  $a$  tengo una ecuación de segundo grado, y esa si la sé resolver
- 4 Así

$$4a^2 + 6xa - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$$

una ecuación cuya discriminante es:  $4x^2(2x+1)^2$

- 5 Sus raíces son  $a_{1,2} = \frac{-6x \pm 2x(2x+1)}{8}$

# Ejemplo de Problema

- 1 Con esto nos queda

$$4a^2 + 6xa - x^4 - x^3 + 2x^2 = 4 \left( a + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \left( a - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) = 0$$

# Ejemplo de Problema

- 1 Con esto nos queda

$$4a^2 + 6xa - x^4 - x^3 + 2x^2 = 4 \left( a + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \left( a - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) = 0$$

- 2 Una vez más otra ecuación cuadrática en  $x$ , no olvidemos que esa en nuestra incógnita

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2a}, \quad x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8a}$$

# Ejemplo de Problema

- 1 Con esto nos queda

$$4a^2 + 6xa - x^4 - x^3 + 2x^2 = 4 \left( a + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \left( a - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) = 0$$

- 2 Una vez más otra ecuación cuadrática en  $x$ , no olvidemos que esa en nuestra incógnita

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2a}, \quad x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8a}$$

- 3 La cuales son reales si  $a \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right]$

# Heurística

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

# Heurística

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón

# Heurística

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura

# Heurística

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente

# Heurística

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva
- Explotar la simetría

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva
- Explotar la simetría
- Dividir en casos

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva
- Explotar la simetría
- Dividir en casos
- Trabajar hacia atrás

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva
- Explotar la simetría
- Dividir en casos
- Trabajar hacia atrás
- Argumentar por contradicción

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva
- Explotar la simetría
- Dividir en casos
- Trabajar hacia atrás
- Argumentar por contradicción
- Perseguir la paridad

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva
- Explotar la simetría
- Dividir en casos
- Trabajar hacia atrás
- Argumentar por contradicción
- Perseguir la paridad
- Considerar casos extremos

Muchas veces se piensa que la solución de los problemas aparecen de forma mágica, pues no es así porque en muchos de los casos estos están basados en principios que pueden ser aprendidos y practicados

- Buscar un patrón
- Dibujar una figura
- Formular un problema equivalente
- Escoger una notación efectiva
- Explotar la simetría
- Dividir en casos
- Trabajar hacia atrás
- Argumentar por contradicción
- Perseguir la paridad
- Considerar casos extremos
- Generalizar



Sin trampas, sin calculadora y sin programas

*Hallar la parte entera del número*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$

Sin trampas, sin calculadora y sin programas

*Hallar la parte entera del número*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$

Una para factorizar

*Siendo  $a, b, c$  números reales no nulos tales que*

$$(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$$

*demostrar que  $a, b, c$  son términos de una progresión geométrica.*



¿Quién robo la otra ecuación?

*Hallar todas las soluciones enteras a la ecuación*

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$$

¿Quién robo la otra ecuación?

*Hallar todas las soluciones enteras a la ecuación*

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$$

De parejas

*Determinar todos los pares de enteros no negativos  $(x, y)$  para los cuales*

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

**Olimpiada Matemática India**

## Una de primos

## Una de primos

*Probar que para cualquier entero  $n$  el número*

$$5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$

*no es primo.*

Olimpiada Matemática Korea

## Una de primos

*Probar que para cualquier entero  $n$  el número*

$$5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$

*no es primo.*

Olimpiada Matemática Korea

## Enteros y encima positivos

*Hallar la suma de todos los enteros positivos de dos dígitos que son divisibles por cada uno de sus dígitos.*

AIME 2001

# Trigonometría

## Algo complejo

*Siendo  $a, b, c$  números reales tales que*

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$$

*Demostrar que*

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$$

## Algo complejo

*Siendo  $a, b, c$  números reales tales que*

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$$

*Demostrar que*

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$$

## Por la igualdad

*Probar la igualdad*

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

# Trigonometría

¿Pitagórico?

*En un triángulo ABC*

$$3 \sin A + 4 \cos B = 6, \quad 4 \sin B + 3 \cos A = 1$$

*Hallar la medida del ángulo C.*



Como si fuese necesario y además suficiente

*Un triángulo  $ABC$  tiene lados de longitudes  $a, b, c$ . Hallar una condición necesaria y suficiente para los ángulos de este triángulo tal que  $a^2, b^2, c^2$  sean las longitudes de los lados de otro triángulo.*

Revista Matemática Timisoara.Rumania



Ya lo he visto antes

*Si las longitudes de los lados de un cuadrilátero son 33, 47, 34 y 6 como se muestra en la figura 1, probar que sus diagonales son perpendiculares .*

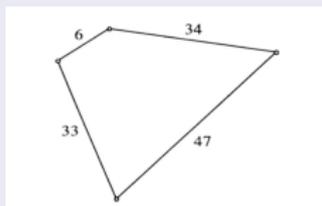


Figure: Cuadrilátero

Euclid Contest. Estudiantes del grado 12. Canadá



Por un punto  $C$  arbitrario sobre el diámetro  $AB$  de un círculo con centro  $O$  como se muestra en la figura 2, trazamos una perpendicular que encuentre al círculo en  $D$ . El círculo inscrito en el triángulo curvilíneo  $DCB$  interseca a  $AB$  en  $J$ .

- 1 Demostrar que  $AJ = AD$ .
- 2 Demostrar que  $DJ$  biseca a  $\angle CDB$ .

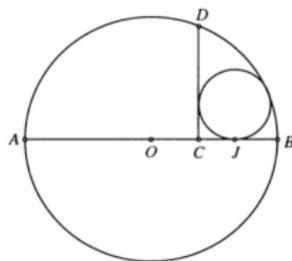


Figure: Gráfico para Problema 1

# Una revisión e Invitación

Cómo han visto, hemos desarrollado una serie de problemas que nos han resultado al principio muy difíciles e incluso pensamos que se desarrollaban con temas avanzados de matemática, pero grande fue nuestra sorpresa cuando descubrimos que se podían resolver de forma sencilla con lo aprendido en la secundaria. Estos problemas motivan nuestra imaginación, desarrollan nuestra creatividad y nos dan una verdadera libertad de pensamiento, muchos de ellos son presentados en las *Olimpiadas de Matemática Internacionales* y nacionales como la *Olimpiada Nacional de Matemática* pero no son de exclusividad de ellos, este Arte de resolver Problemas fue desarrollado por *George Polya* y es un precedente para la resolución de problemas con fines prácticos.

# Una revisión e Invitación

# Una revisión e Invitación

No es necesario ser un experto en matemática para desarrollar este Arte, la condición necesaria y suficiente es que

*Les guste pensar y se diviertan resolviendo problemas de matemática*

Los invito a participar de este Arte, ya sea por apetito académico o con fines de enseñanza.

Participen y publiquen en las revistas

- Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática (España)
- Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem (Canadá). Sección Mayhem Problems
- Eureka (Brasil)

# ¿Dónde puedo encontrar libros o material de olimpiadas?

- Librería Científica MIR.Administrador Señor *Luna*.Jr. Ica 441
- Librería Chancay.Administrador Señor *Jaime Urquizo*.Jr.  
Chancay
- Ambos quedan cerca de la Iglesia de las Nazarenas en la Av.  
Tacna
- Editorial Binaria.Administradores:*Jorge Tipe, Carlomagno Rivera, Juan Neyra*.  
Contacto:....  
Busquenlos en Facebook como BINARIA.

# Agradecimientos

# Agradecimientos

- Dirección de Asuntos Académicos. Oficina de Apoyo Académico. Jefe: Jorge Luis Quiroz Gonzáles  
Pontificia Universidad Católica del Perú

# Agradecimientos

- Dirección de Asuntos Académicos. Oficina de Apoyo Académico. Jefe: Jorge Luis Quiroz Gonzáles  
Pontificia Universidad Católica del Perú

# Agradecimientos

- Dirección de Asuntos Académicos. Oficina de Apoyo Académico. Jefe: Jorge Luis Quiroz Gonzáles  
Pontificia Universidad Católica del Perú
- Profesores: Oscar Neyra, Carlos Miranda Rodriguez , Laura , Mario Auqui Barrientos, Ruben Auqui Cáceres, Victor Pisconte , Jose Caico.

# Agradecimientos

- Dirección de Asuntos Académicos. Oficina de Apoyo Académico. Jefe: Jorge Luis Quiroz Gonzáles  
Pontificia Universidad Católica del Perú
- Profesores: Oscar Neyra, Carlos Miranda Rodriguez , Laura , Mario Auqui Barrientos, Ruben Auqui Cáceres, Victor Pisconte , Jose Caico.

# Agradecimientos

- Dirección de Asuntos Académicos. Oficina de Apoyo Académico. Jefe: Jorge Luis Quiroz Gonzáles Pontificia Universidad Católica del Perú
- Profesores: Oscar Neyra, Carlos Miranda Rodriguez , Laura , Mario Auqui Barrientos, Ruben Auqui Cáceres, Victor Pisconte , Jose Caico.
- Colegio CNI y comité organizador del Concurso Provincial de Matemática.

# Agradecimientos

- Dirección de Asuntos Académicos. Oficina de Apoyo Académico. Jefe: Jorge Luis Quiroz Gonzáles Pontificia Universidad Católica del Perú
- Profesores: Oscar Neyra, Carlos Miranda Rodriguez , Laura , Mario Auqui Barrientos, Ruben Auqui Cáceres, Victor Pisconte , Jose Caico.
- Colegio CNI y comité organizador del Concurso Provincial de Matemática.
- Titu Andreescu, entrenador del equipo de Rumania, por sus excelentes libros, por medio de los cuales me he desarrollado en este *Arte*.