PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ARQUITECTURA 1

TRABAJO COLABORATIVO 9:

SUPERFICIES MÍNIMAS:

EL ESTADIO OLÍMPICO DE MUNICH

Integrantes

Yerick José Ampuero Paredes

Juan Antonio Caycho Berrocal

Mauro Javier Jurado Salcedo

Franz Raido Núñez Herrera

Daniel Ismael Sánchez Castillo

PROFESORES:

Francisco Ugarte Guerra

Haydée Zenaida Azabache Caracciolo

Noviembre, 2011

ÍNDICE

Introducción **4**

Capítulo 1: Planteamiento del Problema **3**

1.1 Descripción del problema **3**

1.2 Contexto **3**

1.2.1. La teoría de las superficies mínimas: Joseph Plateu 5

1.2.2. Superficies mínimas en la arquitectura 6

1.2.3. La arquitectura orgánica: El caso del Estadio Olímpico de Munich 6

1.2.4. La arquitectura textil 7

Capítulo 2: Solución Matemática del problema **9**

2.1 Requisitos matemáticos para resolver el problema **9**

2.1.1. Las curvas 9

Curva convexa 10

Concavidad hacia abajo 10

La catenaria .... **¡Error! Marcador no definido.**

2.1.2. Las superficies 12

Topología finita y topologías homeomorfas 12

Superficies cuádricas 13

Superficies regladas 15

Superficies anticlásticas 16

Otras superficies 16

2.1 Aplicación de los conceptos matemáticos en la solución del problema **17**

Conclusiones **19**

Anexos **21**

Anexo 1: Referencias bibliográficas **21**

ÍNDICE DE IMÁGENES

Figura 1: Joseph Plateu....................5
Figura 2: Estadio Olímpico de Múnich (Vista interior) 7
Figura 3: Estadio Olímpico de Múnich (Vista aérea) 7
Figura 4: Pabellón Alemán....................8
Figura 5: La forma de las subiertas de membrana....................9
Figura 6: Convexidad y concavidad....................10
Figura 7: Tangentes de una curva 11
Figura 8: Concavidad....................11
Figura 9: Arco Gateway 12
Figura 10: Paraboloide elíptico....................13
Figura 11: Paraboloide circular 14
Figura 12: Paraboloide hiperbólico 14
Figura 13: Elipsoide....................14
Figura 14: Esfera 14
Figura 15: Hiperboloide 15
Figura 16: Cono....................15
Figura 17: Superficies regladas 16
Figura 18: Superficies 16
Figura 19: Helicoide de Gaudí 19
Figura 20: Estadio Olímpico de Múnich (Cubierta) 5

INTRODUCCION

Uno de los elementos que definen la espacialidad arquitectónica y que ha sido utilizado durante muchos siglos son las superficies. Sin embargo una de las superficies que más se ha empleado en la arquitectura son los paraboloides hiperbólicos y lo importante de este tipo de superficies es que, si bien es una superficie tridimensional, se puede construir usando solo líneas rectas.

También encontramos otro tipo de superficies: superficies mínimas, que es el tema que se *estudiará*, las cuales ayudan a la proyección de estructuras con diversas formas de diseño y que son estudiadas en la geometría desde el siglo XVII. El estudio de este tipo de superficies es importante pues son superficies que a pese a ser simples y ligeras en peso pueden cubrir una amplia luz entre los apoyos. Un primer acercamiento al estudio de estas superficies podría ser realizando un simple experimento en el cual se generaran superficies mínimas. Por ejemplo, si formamos con alambres las aristas de un tetraedro y luego penetramos lo formado en un recipiente lleno de agua, en el cual previamente se ha disuelto una disolución jabonosa, luego notaremos que al retirarlo de este se formara una superficie que envuelve a todas las aristas, de esta manera se demuestra que esta superficie es la que cuenta con el área mínima posible dentro de todas las existentes y por ello se le conoce como superficie mínima.

Para entender más a cabalidad este tema, en el trabajo presentado se investigara un ejemplo arquitectónico en particular que será el de Estadio Olímpico de Múnich (1972) del arquitecto alemán Frei Otto: **Superficies mínimas en el Estadio Olímpico de Múnich**. Para el diseño de este estadio, Otto uso el concepto de superficies mínimas para la cubierta, que cubren tanto el estadio propiamente dicho, así como también las pistas atléticas y piscinas, y se logra que el peso también sea mínimo y una tensión superficial equilibrada que le brinda estabilidad al conjunto (lo mismo que sucede con las burbujas de jabón que se forman con el experimento de alambres mencionado líneas arriba). También es importante destacar que al usar áreas mínimas para el desarrollo de estas cubiertas se logra una economía del material y como conjunto arquitectónico, una forma orgánica de la cubierta que brinda al espectador un paisaje diferente a los patrones ortogonales que rigen la arquitectura moderna.

Para organizar el marco teórico del tema a estudiar, se ha divido el trabajo en capítulos. El primer capítulo, Reflexión, es un comentario individual de valor de cada integrante sobre su preocupación personal del porque vincular a las ciencias matemáticas con la arquitectura y que relaciones existen entre ambas. El Segundo Capitulo, Enlaces contiene información de todas las fuentes web gráficas a las que se ha consultado para desarrollar el trabajo, además de una descripción general de lo que contiene el enlace respectivo. El Tercer Capítulo, Contexto, contiene información sobre cómo se originó el conocimiento de superficies mínimas en el mundo a través de la historia y como se aplicó este conocimiento, posteriormente, a la arquitectura y su evolución. Por último en el Capítulo Matemáticas, profundiza en temas de connotación más teórica y de abstracción matemática, teoremas y principios fundamentales, sobre superficies mínimas.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción del problema

Uno de los elementos que definen la espacialidad arquitectónica y que ha sido utilizado durante muchos siglos son las superficies. Sin embargo una de las superficies que más se ha empleado en la arquitectura son los paraboloides hiperbólicos y lo importante de este tipo de superficies es que, si bien es una superficie tridimensional, se puede construir usando solo líneas rectas.

También encontramos otro tipo de superficies: superficies mínimas, que es el tema que se estudiará, las cuales ayudan a la proyección de estructuras con diversas formas de diseño y que son estudiadas en la geometría desde el siglo XVII. El estudio de este tipo de superficies es importante pues son superficies que a pese a ser simples y ligeras en peso pueden cubrir una amplia luz entre los apoyos.

Para entender más a cabalidad este tema, en el trabajo presentado se investigará un ejemplo arquitectónico en particular que será el de Estadio Olímpico de Múnich (1972) del arquitecto alemán Frei Otto: Superficies mínimas en el Estadio Olímpico de Múnich. Para el diseño de este estadio Otto usó el concepto superficies mínimas para generar la cubierta, que cubre tanto el estadio propiamente dicho, las pistas atléticas y piscinas. Con esta cubierta se logra que el peso de la misma sea mínimo y una tensión superficial equilibrada que le brinda estabilidad al conjunto. También es importante destacar que al usar áreas mínimas para el desarrollo de estas cubiertas se logra una economía del material y como conjunto arquitectónico una forma orgánica de la cubierta que brinda al espectador un paisaje diferente a los patrones ortogonales que rigen por lo general a la arquitectura moderna.

1.2 Contexto

1.2.1 La teoría de las Superficies Mínimas: Joseph Plateau.

Para poder entender la teoría de las superficies mínimas es importante situarnos en el siglo XIX. Hacia esos años, el físico Belga, Joseph Plateau realizó experimentos simples y divertidos que consistían en hacer pompas de jabón y mojar marcos de alambre en una disolución jabonosa. Plateau difícilmente podía imaginar que sus trabajos servirían para desarrollar y potenciar una nueva rama de las matemáticas, y de las ciencias en general. Estos experimentos le permitieron percatarse de que las películas de jabón obedecen a un principio muy simple: hacer mínima su área ya que serán las más estables pues su energía potencial es mínima. Afirmaba, también, que la tensión superficial era, en parte, la causante de los resultados de sus experimentos.

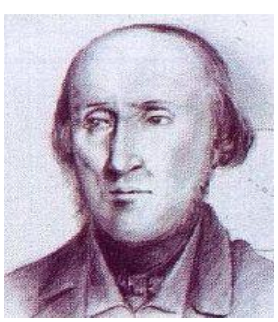

Figura 1: **Joseph Plateu**; fuente: http://www.trueknowledge.com/q/facts_about__joseph_plateau

Es así que formuló tres puntos básicos en la teoría sobre las SUPERFICIES MÍNIMAS basado en sus observaciones a partir de sus experimentos. Según Plateau estas superficies se generaban por la tensión superficial que la propia naturaleza demandaba en su intento de buscar un área mínima. Este trabajo exige una energía determinada y las superficies o áreas tienden a contraerse para minimizar esta energía.

En 1873 formuló el problema que lleva su nombre: "problema de Plateau" que busca determinar la superficie de área mínima limitada en el espacio por un contorno cerrado. En donde enuncio las tres leyes siguientes:

Primera ley: "Tres superficies de jabón se intersecan a lo largo de una línea. El ángulo formado por los planos tangenciales a dos superficies que se intersecan, en cualquier punto a lo largo de la línea de intersección de las tres superficies, es de 120°".

Segunda Ley: "Cuatro líneas todas formadas por la intersección de tres superficies, se intersecan en un punto y el ángulo formado por cada capa es de 109°28'".

Tercera Ley: "Una película de jabón que puede moverse libremente sobre una superficies la interseca en un ángulo de 90°".

Finalmente dentro de sus objetivos podemos mencionar al hecho de indagar sobre la tendencia de los líquidos y la naturaleza, en general, a adoptar la forma esférica; además de demostrar mediante sus experiencias realizadas la elaboración de materiales interactivos que expliquen, de una manera visual y manipulativas, estos conceptos.

Sin embargo, el concepto de mínima área parecer ser introducido, mucho antes, por Arquímedes pues este observó que las líneas rectas minimizaban la longitud entre dos puntos así como los planos, en algunos casos, minimizaban las superficies. Mucho tiempo después a esto, en 1676, Boyle demostró con experimentos de líquidos el comportamiento de las gotas de agua, para esto mezcló dos líquidos: uno denso y alcohol y notó que al estar estos en reposo se formaba una superficie entre ambos que los separaba.

1.2.2 Superficies Mínimas en la Arquitectura.

Las superficies mínimas existen desde la antigüedad siendo las cúpulas las primeras expresiones de este cálculo matemático que busca encontrar la forma más económica de sostener un el peso propio de un techo. Sin embargo para lograr eso las estructuras de cúpulas resultaban en grandes alturas que le otorgaban a los espacios amplios de planta también una gran monumentalidad a escala urbana. De ahí que las superficies mínimas en la modernidad resultan de combinar las curvas parabólicas e hiperbólicas en más de un sentido, pudiendo techar espacios enormes como un estadio sin necesidad tener estructuras exageradamente altas. Es así como la teoría de las "superficies mínimas" en la arquitectura van adquiriendo mayor presencia en el contexto de la arquitectura contemporánea.

1.2.3 La Arquitectura Orgánica: El Caso del Estadio Olímpico de Múnich.

La ciudad contemporánea era criticada por su crecimiento irracional, por la concentración desmesurada de edificios y masas humanas en espacios reducidos (tugurización) , por ello en el siglo XX se produjeron una serie de movimientos de vanguardia para solucionar estos problemas, dentro de estos movimientos arquitectónicos transformadores se destaca el movimiento de vanguardia propulsado por el norteamericano Frank Lloyd Wright, el cual fue la Arquitectura Orgánica que busca integrar armónicamente la construcción de espacios humanos y la naturaleza, promueve como el ideal moderno la de vivir en conjunto con la vida, predomina lo útil sobre lo meramente ornamental, la incorporación a la arquitectura de los adelantos de la era industrial .Un ejemplo acerca de esta arquitectura es el Estadio Olímpico de Múnich que fue diseñado por los arquitectos alemanes Gunther Behnisch y Frei Paul Otto , este último un gran exponente de formas orgánicas arquitectónicas que se ven reflejadas en la cobertura del estadio , la idea formal era imitar a los Alpes que rodeaban la edificación integrando las formas sobresalientes de los techos con las colinas e insertar el conjunto dentro del paisaje que estaba formado por escombros amontonados causados por los bombardeos de la segunda guerra mundial, el edificio tiene una gran relación con la naturaleza no solo como está emplazado sino también trata de coger la forma de elementos naturales y los plasmándolos en la cobertura .


Figuras 2 y 3: **Estadio Olímpico Múnich - Arq. Frei Otto (Alemania**), fuente: http://www.megaupload.com/?d=3H7FHAFY

Para el presente trabajo nos centraremos en analizar el estadio olímpico Múnich como obra significante de la presencia del teorema de SUPERFICIES MINIMAS presentes en la arquitectura. Dicho estadio es uno de los recintos de mayor reconocimiento arquitectónico, diseñado por el alemán Frei Otto. Está ubicado en la ciudad de Múnich, capital del estado de Baviera al sur de Alemania. Se construyó para albergar los Juegos Olímpicos de Múnich 1972, y con posterioridad fue sede de la Copa Mundial de Fútbol de 1974.

1.2.4 La Arquitectura Textil

Así como existen grandes y reconocidas obras arquitectónicas donde la utilización del teorema de las SUPERFICES MINIMAS es bastante clara, también existen otros ejemplos donde se da la utilización de las mismas pero para un uso y escala menor.

Es así como se puede mencionar a la Arquitectura textil, que es la arquitectura que emplea materiales tensados, sean membranas textiles, láminas, mallas de cables, etc. Ha sido desarrollada durante los últimos 50 años y se ha convertido hoy en una nueva herramienta del repertorio arquitectónico espacial, siendo las cubiertas exteriores un desafío conceptual, espacial y estructural, tratando de dar soluciones espaciales a partir de una tecnología que a pesar de su flexibilidad espacial conlleva una minuciosa ingeniería de detalle.

La arquitectura textil se puede fabricar tensada o neumática. Las cubiertas neumáticas son las soportadas por aire, ya que el esfuerzo perpendicular se consigue con una sobre presión de aire. Las cubiertas tensadas son las que emplean mástiles, tensores y cables para tensar la tela por sus extremos en direcciones y sentidos opuestos, incluso fuera de plano.

Las primeras obras de arquitectura textil comenzaron a realizarse en 1952, aunque el punto de partida de este nuevo tipo de construcción se puede situar en la construcción del Pabellón Alemán para la Expo de Montreal de 1967, obra proyectada por Frei Otto y Rolf Gutbrod. Presentó en gran manera un punto de partida radical, tanto arquitectónica como estructuralmente.

Figura 4: **Pab. Alemán - Expo de Montreal 1967 (Frei Otto y Rolf Gutbrod)**; fuente http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/11991622/Arquitectura-Textil--_Tenso-estructuras_.html

A partir de ese año, la realización de obras de arquitectura textil ha ido en aumento hasta nuestros días, donde el uso de este tipo de construcción está muy extendido. Hoy en día, la mayoría de los grandes estadios deportivos son cubiertos con estructuras tensadas, así como terminales de aeropuertos, circuitos de Fórmula 1 y centros comerciales, con superficies superiores a los 100.000 m2.

En cuanto a sus características las estructuras textiles proporcionan amplios cerramientos de gran variedad e interés espacial, requieren mínimos elementos de soporte de estructura "rígida" y proporcionan niveles generales de luz diurna natural muy buenos. A la hora de realizar un proyecto de arquitectura textil hay que tener en cuenta tres factores estructurales fundamentales: la elección de la forma superficial, los niveles de pretensado y la deformidad de la superficie, pues las superficies textiles difieren mucho de las estructuras convencionales.

CAPÍTULO 2: SOLUCIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

2.1. Requisitos matemáticos para resolver el problema

La resolución matemática de proyectos como el Estadio Olímpico de Múnich se hacen basados principalmente en softwares matemáticos que general la superficie a partir de curvas. De esta manera:

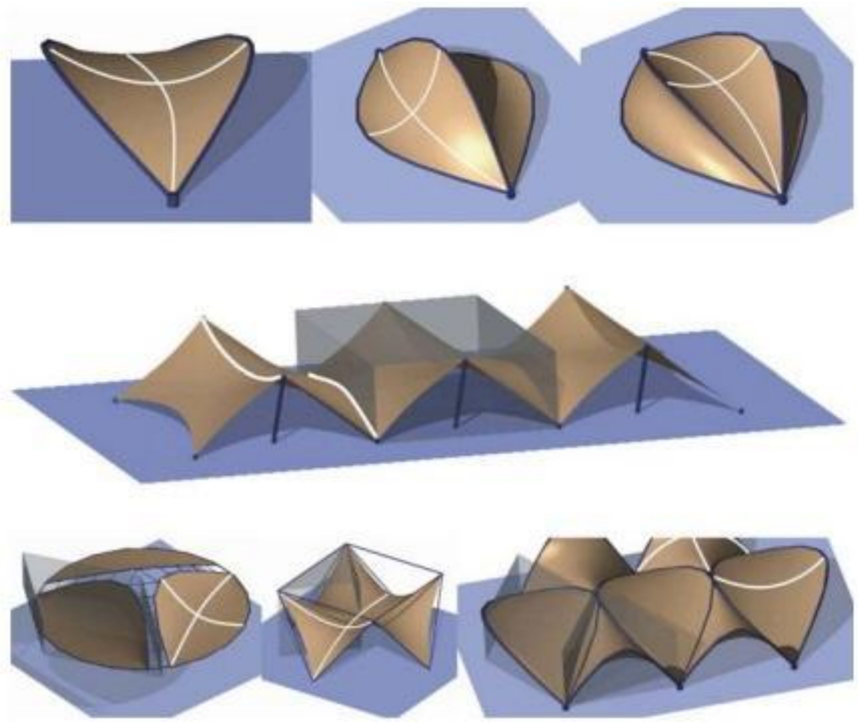

Figura 5: **La forma de las cubiertas de membrana**; fuente: www.herrera.unt.edu.ar/revistacet/anteriores/Nro26/PDF/p50-54.pdf

Para ello, antes de estudiar propiamente las superficies mínimas (más específicamente las superficies anticlásticas) que son el objeto principal de estudio cuando hablamos de los techos tensados, estudiaremos los elementos que componen esta estructura desde un enfoque matemático.

2.1.1. Las curvas

Si la definimos de un modo más o menos informal e intuitivo, todos tenemos una idea de lo que es la curvatura de una curva y de que algo sea más o menos curvo. Sin embargo, la descripción matemática precisa del concepto de curvatura no es en absoluto nada inmediato y ha necesitado de diferentes aproximaciones hasta llegar al concepto actual de curvatura.

Según nuestra experiencia una línea recta no tiene curvatura alguna (su curvatura debe ser cero), puesto que no se dobla en absoluto, mientras que una circunferencia se dobla lo mismo en todos sus puntos (su curvatura debe ser la misma en todos sus puntos). Además, circunferencias de radio pequeño son circunferencias muy curvadas y conforme aumenta el radio r, disminuye la curvatura de la circunferencia. Es así como el concepto de curvatura de una curva está basado precisamente en este comportamiento de la curvatura de una circunferencia frente a su radio.

Finalmente entonces definimos a la curvatura como aquella medida del cambio de dirección del vector tangente a una curva, cuanto más rápido cambia éste a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva, se dice, que más grande es la curvatura.

Fuentes: http://www.f-seneca.org/seneca/informes/Matematicas.pdf

Curva convexa

Para empezar de manera sencilla es importante señalar que la palabra convexo proviene del latín y significa llevar a cuestas, por lo cual se entiende que la palabra represente al lado que parece estar encorvado de los dos que puede generar una curva. La convexidad es el opuesto a la concavidad.

Una curva se dice que es convexa si la recta tangente en cada punto deja a la curva completamente a uno de los lados que determina dicha recta. Entonces análogamente, diremos que es CONVEXA o presenta su concavidad hacia arriba si dados dos puntos de la curva el segmento que los une queda por encima de la curva.

Una función será CONVEXA en un intervalo cuando las tangentes a la curva en los puntos de dicho intervalo quedan por debajo de la curva.

Se puede utilizar las terminaciones de cóncavo u convexo, hacia arriba o hacia abajo de distintas maneras: una misma curva puede ser cóncava hacia arriba o convexa hacia abajo; o cóncava hacia abajo y convexa hacia arriba.

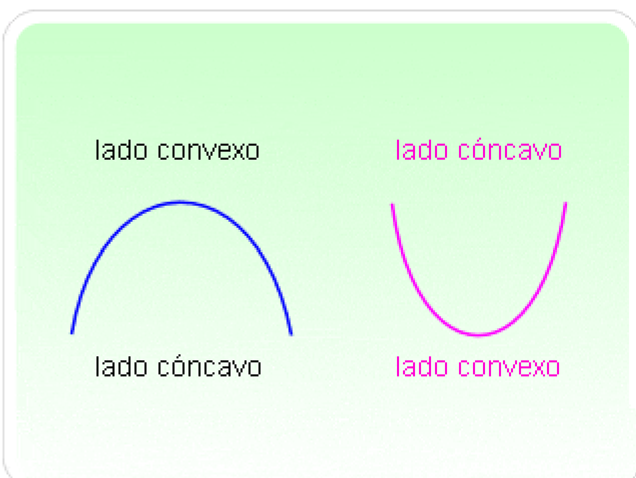

Figura 6: **Convexidad y concavidad**; fuente: http://www.ugr.es/~rcamino/docencia/geo3-95/convexa.pdf

Concavidad hacia abajo

Para un mejor entendimiento de la misma es necesario definir concavidad como aquella característica de una curva en el entorno de un punto en el que la tangente no la atraviesa. La concavidad de una curva o de una superficie es la parte que se asemeja a la zona interior de una circunferencia o de una esfera.

Se dice que para una curva, en el punto dado de tangencia, presenta una concavidad hacia el lado donde no se encuentra la tangente. Por ello si es que la curva que da por debajo de la tangente debemos mencionar acertadamente que esa curva es “cóncava hacia abajo”.

Para un mejor entendimiento es preciso citar un ejemplo:

Considere la función f cuya gráfica aparece en la fig. Note en primer lugar que la curva que f representa, tiene tangente en todos sus puntos.

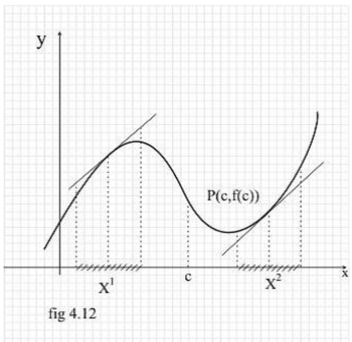

Figura 7: **Tangentes de una curva**; fuente: ttp://docencia.udea.edu.co/ingenieria/calculo/pdf/**4_7_1**?.pdf

Se observa que en los puntos “cercanos” a x1, pero diferentes de x1, la curva se encuentra por “debajo” de la recta tangente. Se dice en este caso que la curva es cóncava hacia abajo en el punto x1. Del mismo modo hacia x2, la recta esta por “encima” de la recta tangente, en este caso la curva hacia arriba en el punto x2**.**

A partir de ello se puede precisar lo siguiente**:**

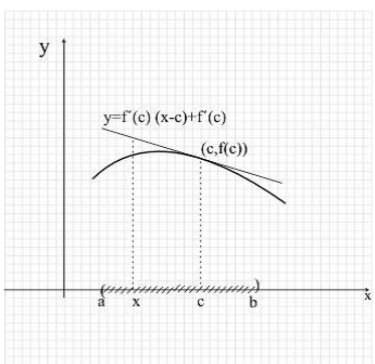

Figura 8: **Concavidad**; fuente: http://docencia.udea.edu.co/ingenieria/calculo/pdf/**4_7_1**?.pdf

f es cóncava hacia abajo en c o cóncava negativa en c, si existe un intervalo abierto (a, b) al cual pertenece c, tal que para todo x de (a, b), $x \neq c$ se cumple que:

$$Z(x) = f(x) - f'(x)(x-c)-f(c)<c$$

Se usará el símbolo: ∩, para denotar que una curva es cóncava hacia abajo o cóncava negativa.

Otro teorema, que se enuncia sin demostración establece una condición suficiente para determinar la concavidad de una curva en un intervalo: Teorema de criterio de la segunda derivada para concavidad. Este teorema enuncia que sea f una función dos veces derivable en todos los puntos de un intervalo abierto I. Entonces: Si $f''(x) < 0$ para todo x ιI, entonces, f es cóncava hacia abajo en I**.**

La catenaria

La catenaria es la curva que muestra una cadena suspendida por sus extremos que está sometida a un campo gravitatorio uniforme, su masa está distribuida uniformemente por unidad de longitud. Estas curvas entonces representan una forma natural de auto estructuración que al colocarse de manera invertida funciona de la misma manera, cargando su propio peso de manera eficiente, con ello creamos un arco estructura. Por ejemplo en el arco del proyecto arquitectónico Arco Gateway del Arq. Eero Sarinen se usa la catenaria invertida que soporta solamente su propio peso; de esta manera, la cadena está en tensión estando estrictamente en compresión, el Arco Gateway no es una catenaria común, sino una curva más general de la forma $y = A\cosh(Bx)$. Esto la convierte en una *curva catenaria ponderada invertida* : el arco es más grueso en sus dos bases que en su vértice.

Figura 9: **Arco Gateway**; fuente: http://www.pagina12.com.ar/diario/suplementos/futuro/13-2054-2008-12-08.html

2.1.2. Las superficies

Una superficie es un conjunto de puntos en el espacio que forma un espacio topológico bidimensional. Existen muchos tipos de superficie y en rasgos generales están clasificadas por sus topologías.

Topología finita y topologías homeomorfas

La topología es el estudio de las propiedades que permanecen invariables en una superficie cuando esta es alterada de manera física sin separar ni adherir partes de esta superficie ni haciendo coincidir puntos diferenciados.

Las topologías homeomorfas entonces hacen referencia a superficies distintas pero topológicamente equivalentes. En la definición anterior de "Helicoide", por ejemplo, se señala que esta topología es homeomorfa a la de un plano. Asimismo la topología de una taza es homeomorfa a la de una rosquilla y la de un catenoide es homeomorfa a la de cualquier forma generada por el desplazamiento de una circunferencia.

Cuando hablamos de topologías finitas nos referimos a aquellas superficies a las que le podemos determinar un final (la superficie podría seguir sin embargo hasta el infinito) sin alterar sus propiedades. Por ejemplo, un plano, el cual podemos establecerles los límites de un cuadrado, o una circunferencia o cualquier otra forma y sigue siendo una misma topología finita. Las topologías infinitas, en cambio, no tienen un límite determinado y son la representación de superficies completas de por sí, sin una extensión hasta el infinito, por ejemplo: la esfera.

Podemos decir entonces intuitivamente que las topologías finitas corresponden a superficies infinitas y las topologías infinitas corresponden a superficies finitas.

Superficies cuádricas

Una superficie cuadrática es una superficie del espacio tridimensional real usual, en un sistema de coordenadas ortogonal y unitario. Su ecuación es de segundo grado con tres variables: x, y, z.

Ecuación general: $a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + ey + fz - g$; donde g es la constante

Se puede decir que para que la ecuación de la forma F(x, y, z) represente una superficie cuadrática esta debe poseer las siguientes características:

- Deben estar presentes las variables x,y,z
- Debe ser una expresión poli nómica de segundo grado
- Al menos dos de las variables deben estar elevadas al cuadrado

Clasificación de las superficies cuadráticas

Paraboloides: Solo dos de sus variables están elevadas al cuadrado, la otra variable es lineal. Pueden ser:

Paraboloide Elíptico: Los coeficientes de sus términos cuadráticos presentan igual signo pero diferente valor. Sus secciones transversales son elipses.

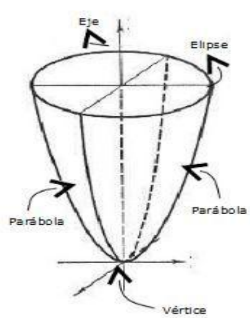

Figura 10: Paraboloide Elíptico Fuente: http://es.scribd.com/doc/29598351/Superficies-cuadricas

Paraboloide Circular: Los coeficientes de sus términos cuadráticos presentan igual signo e igual valor. Sus secciones transversales son círculos

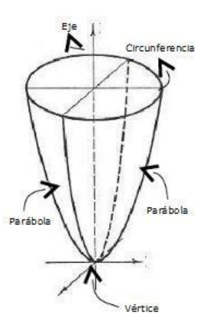

Figura 11: **Paraboloide Circular** Fuente: http://es.scribd.com/doc/29598351/Superficies-cuadricas

Paraboloide Hiperbólico: Los coeficientes de sus términos cuadráticos presentan diferente signo. Sus secciones transversales son parábolas.

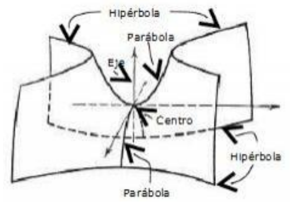

Figura 12: **Paraboloide Hiperbólico** Fuente: http://es.scribd.com/doc/29598351/Superficies-cuadricas

*<u>Los siguientes tipos de superficies cuadráticas presentan sus tres variables elevadas al cuadrado</u>***.**

Elipsoides: Los coeficientes de las variables presentan igual signo pero valores diferentes. Sus secciones transversales son elipses o circunferencias**.**

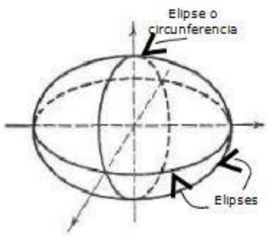

Figura 13: **Elipsoides** Fuente: http://es.scribd.com/doc/29598351/Superficies-cuadricas

Esferas: Los coeficientes de las variables presentan igual signo e igual valor. Sus secciones transversales son circulares

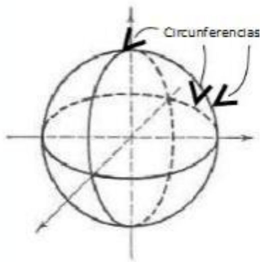

Figura 14: **Esferas** Fuente: http://es.scribd.com/doc/29598351/Superficies-cuadricas

Hiperboloides: Uno de los tres coeficientes de las variables presentan signo diferente y el término independiente es diferente a cero. Sus secciones transversales son elipses o circunferencias. Pueden ser:

Hiperboloide de dos hojas: Dos de los coeficientes de las variables presentan signo negativo y el otro positivo.

Hiperboloide de una hoja: Dos de los coeficientes de las variables presentan signo positivo y el otro negativo.

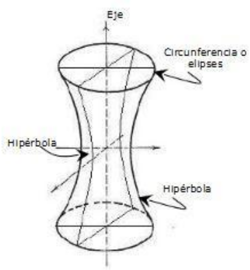

Figura 15: Hiperboloide Fuente: http://es.scribd.com/doc/29598351/Superficies-cuadricas

Conos: Uno de los coeficientes de las variables presenta signo diferente y el término independiente es igual a cero. Sus secciones transversales pueden ser elipses o circunferencias.

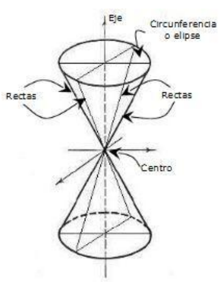

Figura 16: **Cono** Fuente: http://es.scribd.com/doc/29598351/Superficies-cuadricas

Superficies regladas

Las superficies regladas son superficies que contienen rectas y que se pueden generar mediante el movimiento de una recta (recta generatriz) que se mantiene en contacto con otras rectas determinadas directrices. Pueden ser:

· **Desarrollables:** Dado un plano tangente a la recta generatriz, este tocara todos los puntos de dicha recta. Por esta característica, estas superficies serán desarrollables en un mismo plano.

· **Alabeadas:** Dada un plano tangente a la recta generatriz, este no tocara todos los puntos de dicha recta sino ira variando. Estas superficies no son desarrollables en un mismo plano.

Dentro de las superficies desarrollables se pueden mencionar como las más importantes las siguientes:

Superficies Cónicas (Conos): Son superficies generadas por una recta generatriz que tiene un punto fijo (vértice del cono) y que a partir de este punto se va apoyando sobre una curva cerrada o no denominada curva generatriz.

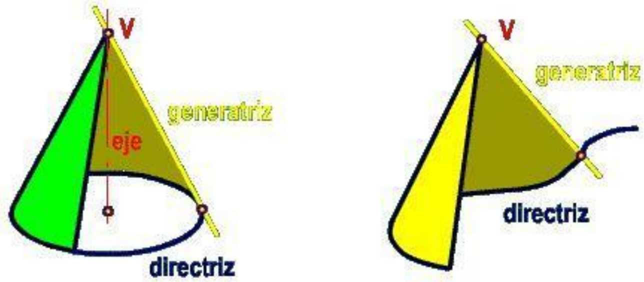

Figura 17: Superficies regladas; fuente: http://es.scribd.com/doc/63955070/77/T2-9-SUPERFICIES-REGLADAS

Superficies Cilíndricas (Cilindros): Son superficies generadas por una recta generatriz que se mantiene paralela a una recta con una dirección específica y se va apoyando sobre una curva cerrada o no, denominada curva generatriz.

Superficies anti clásticas

Las superficies anti clásticas o también llamadas cascarones anti clásticos, son una superficie que adquiere su complejidad en su doble curvatura: una positiva y una negativa. Las superficies anti clásticas representan el concepto que se aproxima entonces a la construcción del estadio de Múnich.

Observemos un cuadro en el que están clasificadas las superficies antes revisadas junto con las superficies de doble curvatura negativa (anti clásticas):

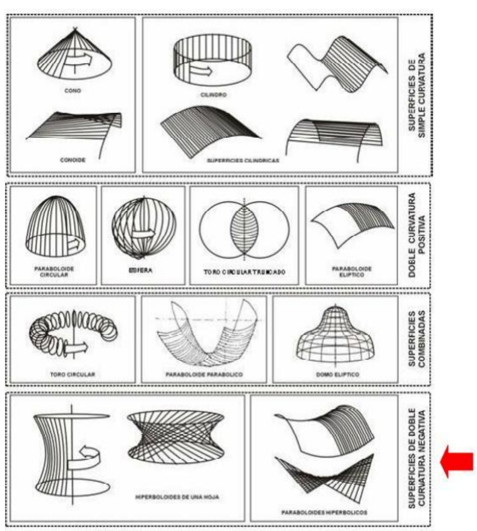

Figura18: Superficies; fuente: http://www.herrera.unt.edu.ar/revistacet/anteriores/Nro26/PDF/p50-54.pdf

Podemos observar entonces que a diferencia de las otras superficies, las superficies anti clásticas están directamente relacionadas con la estructuración pues sus elementos lineales convertidos en la realidad en cables, son capaces de sostener la membrana a través de la TENSIÓN. Esto se debe a la doble curvatura que ofrece el equilibrio para que esto suceda. Dentro de estas superficies anti clásticas encontramos entonces los Hiperboloides de una hoja y los Paraboloides hiperbólicos. Si observamos la gráfica de los Hiperboloides y los Paraboloides Hiperbólicos nos daremos cuenta que sus primeras gráficas representan las mismas superficies graficando de manera simple la doble curvatura (una representada por la forma de las líneas y otra por el giro de la superficie) y a continuación encontramos la misma superficie transformada en elementos estructurales auto-resistentes a través de la tensión.

Otras superficies

Conoide

Son superficies alabeadas son siempre regladas porque se generan siempre por el movimiento de una línea recta, por ende dos posiciones adyacentes de una recta se cruzan. Estas superficies se pueden clasificar: se apoyan en tres directrices sin perder el contacto con ellas, se apoyan en dos líneas directrices y siempre están paralelas a un plano director, se apoyan en dos líneas directrices y forma la generatriz siempre un mismo ángulo con algún plano. En el caso del conoide pertenece al segundo grupo porque se genera apoyado en una línea recta y una curva con un plano director y dos directrices, si la directriz curva es un circulo se produce un conoide circular y si es una elipse se tiene el conoide elíptico, etc., en el caso que la directriz es paralela al plano de la directriz curva y perpendicular al plano director, la superficie se denomina conoide recto**.**

Su aplicación en la arquitectura seda gracias al arquitecto Gaudí quien la utilizo en el edificio de la Sagrada Familia, se encuentran en las fachadas y en las cubiertas sirven de esqueleto, donde Las vigas de madera son las generatrices que se apoyan en el perfil sinusoidal de las fachadas, por un lado, y en la jácena central interior por otro , en consecuencia también son dos líneas directrices, una recta y otra curva, y una serie de rectas que se apoyan en ellas**.**

Helicoide

La helicoide es una superficie reglada generada por una línea recta que gira según una espiral alrededor de un eje vertical, el arquitecto Gaudí las uso de una manera de notable en las escaleras de la Sagrada Familia, las chimeneas imaginativas de Palacio Guell olas columnas helicoidales del Park Guell.

Figura 19: **Helicoide de Gaudí**; fuente: http://www.mcrit.com/comsoc/treballsrecerca/treballs_03_04/treb_publicats/gaudi/documents/estructures.pdf

2.2. Aplicación de los conceptos matemáticos en la solución del problema

El estadio olímpico de Múnich aplica los conceptos de curvas y superficies trabajadas previamente, para poder generar un resultado arquitectónico que realmente da la impresión de pertenecer a la naturaleza. Esto se debe al concepto mismo de las superficies mínimas.

Un método para hallar la superficie mínima de determinada estructura es hacer un modelo a escala en alambre y sumergirlo en agua con jabón. La burbuja que se generará al sacar la estructura del agua es la superficie mínima que se necesitará para cubrir dicha estructura. Este mismo proceso, de características tan orgánicas, es generado por un ordenador, a través del diseño de la estructura compuesta de curvas.

Es por eso que un primer supcapítulo nos permite entender las curvas en sí, su clasificación y definición matemática, para luego entrar en el tema de las superficies, y desde un enfoque teórico estudiar su comportamiento y sus propiedades en función a las curvas.

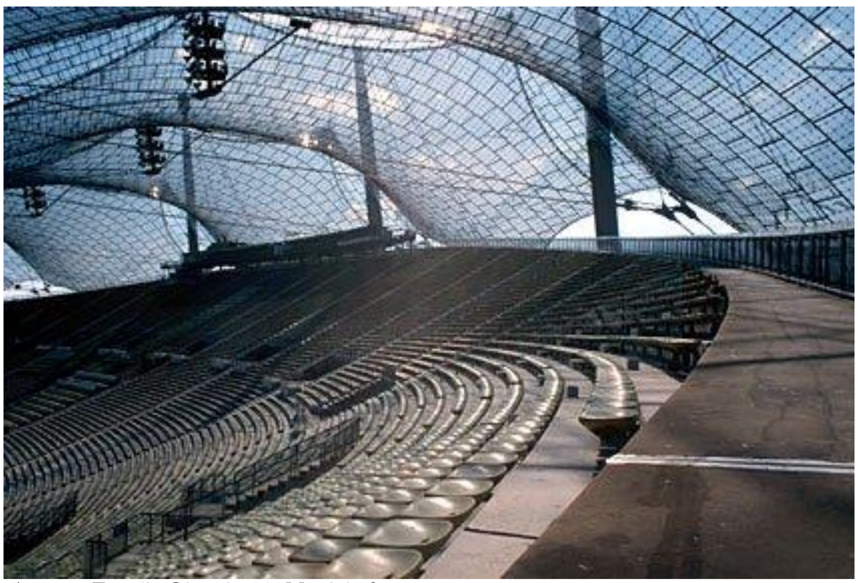

Figura 20: **Estadio Olímpico de Múnich**; fuentehttp://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/

La cubierta del estadio de Múnich representa estos dos conceptos. Las curvas representadas en la estructura de fierro y la superficie representada en la cubierta textil. Asimismo, la superficie está compuesta de infinitas curvas generadas por sección. Desde una perspectiva de superficies regladas, estas formas tridimensionales también pueden ser generadas por infinitas líneas rectas. En la imagen se puede observar el carácter anti clástico de la cubierta en la que curvas de distinta orientación y concavidad se encuentran definidas por la gran unidad orgánica y fluida que es el techo.

CONCLUSIONES

3.1. El impacto en la arquitectura.

Concluimos entonces que las superficies mínimas son importantes en la arquitectura en tanto permiten el techado de una gran área de manera económica, naturalmente estructural y arquitectónicamente estética. Si bien este trabajo ha estado centrado en la arquitectura textil, representada por el Estadio Olímpico de Múnich, las formas de las superficies mínimas pueden ser aplicadas (y han sido aplicadas desde la antigüedad) en diversos materiales, a diversas escalas y con diversos fines. Reconocemos que uno de los atributos fundamentales en las superficies mínimas del Estadio de Múnich es su carácter de superficie reglada. Reglar una superficie es la manera más sencilla de representar una superficie curvada en la realidad y de poder llevarla a cabo de manera constructiva. Los conceptos de superficies que se han trabajado (cuádricas, anti clásticas y regladas) no son excluyentes uno del otro, no se trata de una clasificación. Por el contrario, son diversas maneras de entrar al tema de las superficies utilizando variables distintas. Por ello entendemos que las superficies anti clásticas tienen como característica a su vez ser superficies regladas, a diferencia de las superficies sin clásticas (de doble curvatura positiva). De aquellos grupos de superficies, entonces, el más reducido y específico es el de las superficies anti clásticas, que reconocemos como las formas ideales para su construcción en la realidad, porque se pueden estructurar a partir de rectas. Las rectas en la arquitectura textil representan fibras de tensión que permiten rigidizar un material que en principio tiene como característica su maleabilidad. Las rectas en una arquitectura tradicional, por ejemplo en una estructura de concreto, representan los listones de madera utilizados al momento de encofrar. Por tanto, las superficies anti clásticas son la solución estructural al problema de la construcción física de superficies de curvatura compleja. Si bien las superficies mínimas solo pueden ser representadas con exactitud matemática a través de herramientas informáticas de diseño, su representación a la hora de concebir un proyecto arquitectónico puede ser lograda a través de experimentos sencillos a pequeña escala, como los realizados por Joseph Plateu, los cuales convierten el problema aparentemente complejo de las superficies mínimas, en un juego bastante libre y orgánico, de gran utilidad para el pensamiento arquitectónico y la creatividad.

3.2. El uso de la matemática.

El problema de las superficies mínimas, abordado desde el caso del Estadio Olímpico de Múnich permite abarcar conceptos matemáticos diversos. La estructura de este trabajo, la cual se ha centrado en dos pilares básicos, la curva y la superficie, abstrae de manera sintética los elementos matemáticos entendiéndolos en su estado más primario. De este modo podemos desprender de un problema arquitectónico complejo, una serie de temas matemáticos de interés, que nos dé un panorama completo del universo de las formas que pueden ser regladas a través de la geometría. Y en esta lógico de ir de lo complejo a lo más sencillo, que se ha podido comprender que las formas más sofisticadas de la arquitectura no son sino composiciones y superposiciones de elementos matemáticos tan sencillos como una recta. El trabajo también permite dar un repaso a propiedades de curvas básicas reconocidas en un sistema de coordenadas de dos dimensiones, así como de las superficies cuádricas, reconocidas en un sistema de coordenadas de tres dimensiones. Un déficit de un estudio matemático sobre las superficies curvas es la falta de precisión al momento de describir dichas superficies con una fórmula algebraica convencional. Este déficit es cubierto, sin embargo, por las soluciones que aporta el ordenador a la construcción de las formas. De todos modos, éste es un ámbito que amerita un estudio posterior de profundización.

3.3. Importancia de las matemáticas en la formación del arquitecto Se suele tener la idea de que la arquitectura es una disciplina artística, incluso está incluida en las siete bellas artes del pensamiento clásico. El arte se caracteriza, entre otras cosas, por su libertad de expresión y de creación. Sin embargo la arquitectura, y lo sabemos todos los que trabajamos con ella, está llena de restricciones. Los que hayan sido empujados hacia esta vocación debido a una vena artística, se toparán con una serie de limitaciones impuestas por condiciones externas, como la gravedad, la estructura, el presupuesto, el tamaño del lote, etc. La gran mayoría de estas "restricciones" están representadas por las ciencias y las matemáticas en sus diversas variedades. Por eso que para el dominio pleno de la libertad arquitectónica, es preciso el estudio de dichas ciencias de modo de poder incorporarlas con facilidad a la hora del proceso de diseño. Las matemáticas, además de servir como herramienta de resolución de problemas arquitectónicos, también pueden representar una fuente de inspiración. Las formas que la matemática ya tiene regladas en su extensa historia, son de utilidad para servir al diseño arquitectónico de manera sencilla, estructural y orgánica. Las matemáticas también le enseñan al arquitecto a reflexionar objetivamente acerca de lo que es naturalmente bello y que con la misma naturalidad puede ser reproducido en la arquitectura.

ANEXOS

Anexo 1: Referencias Bibliográficas

Contexto

1. Wikipedia. "**Arquitectura textil " En: http://es.wikipedia.org/wiki/Arquitectura_textil**
Ultimo acceso: 8/10/11

El contenido habla sobre la arquitectura textil, su definición, historia, características, su forma y comportamiento de las estructuras textiles, detalles constructivos y los materiales que usa.

2. Lucas Pascual." **De las superficies mínimas, las pompas de jabón y otras construcciones óptimas** " En: http://www.um.es/docencia/plucas/miscelanea/minimales.pdf Ultimo acceso: 15/10/11

El contenido es en general sobre las Superficies mínimas abarcando diferentes puntos: La etapa de desarrollo, propiedades físicas y topológicas, Ejemplos y relaciones físicas entre ellas.

3. Ampliación de Matemáticas. "**Cubierta de la ciudad olímpica de Múnich"** En:
http://portalevlm.usal.es/blogs/ampliacion/2009/09/30/cubierta-de-la-ciudad-olimpica-de-munich/
Último acceso: 25/10/2011

Pequeño texto perteneciente a un blog en el cual se hace referencia a la cubierta del estadio olímpico de Múnich. Se destaca las ventajas del uso de las superficies mínimas en el desarrollo de su cubierta.

4. Wikipedia." **Arquitectura Orgánica** " En:
http://es.wikipedia.org/wiki/Arquitectura_org%C3%A1nica Ultimo acceso: 20/10/11

El contenido es sobra la definición de la Arquitectura Orgánica donde se habla acerca de sus inicios y su evolución y los arquitectos que pertenecen a esta corriente, siendo el Arq. Frank Lloyd Wrigth quien promovió esta corriente.

5. Esther Vallejo Lobete, Fernando Fadón Salazar y José Enrique Cerón Hoyos. "**La geometría, soporte de la idea en el proceso del diseño" En:**
http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/LAGEOMETRIA.pdf Último acceso: 25/10/2011

6. Raúl Ibáñez Torres. "El **vientre de un arquitecto: La búsqueda de la forma** " En:
http://www.matesco.unican.es/talleres_matematicas/transparencias/transparencias-raul.pdf Ultimo acceso: 15/10/11

Un interesante documento que se titula El vientre de un arquitecto: La búsqueda de la forma. Como se anuncia, se trata de poner en manifiesto los diferentes tipos de formas. Se explica el concepto de cada uno de ellos y también se ejemplifica con obras arquitectónicas relacionadas.

7. Luis Felipe Villada Peñaranda. "**Superficies Mínimas"** En:
http://lfcrux.wordpress.com/componentes/sistemas%20complejos/superficies-minimas/ Último acceso: 25/10/2011

En el artículo se menciona las principales ideas sobre superficies mínimas, para tener una noción rápida del tema con preguntas como ¿qué son?, ¿para qué sirven?, ¿cómo funciona?

Matemáticas

1. Diego Jimeno Génova, Julia Díaz Sáez, Eva Mª Martín Fernández y Roberto Martín Sánchez. " De las superficies mínimas, las pompas de jabón y otras construcciones óptimas" En: http://www.uam.es/departamentos/ciencias/matematicas/premioUAM/premiados1/superficies_minimas.pdf Ultimo acceso: 15/10/11

El contenido principal es acerca de cómo las matemáticas, es decir el Cálculo de variaciones o cálculo infinitesimal, trata los problemas de máximos y mínimas superficies donde minimizar áreas es equivalente a resolver una ecuación diferencial, para entender visualmente esto utilizan una simple disolución jabonosa, demostraciones que hizo Plateau en el siglo XIX quien resolvió y enunció las leyes que rigen el comportamiento de minimizar esfuerzos que utiliza la naturaleza haciendo experimentos con burbujas y pompas de jabón.

2. Departamento de Arquitectura y Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes. "**Modelos Matemáticos y Simulación Numérica en Arquitectura"** En: http://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/bioing/cuadernillo.pdf Último acceso: 25/10/2011

3. Lucas Pascual." **De las superficies mínimas, las pompas de jabón y otras construcciones óptimas** " En: http://www.um.es/docencia/plucas/miscelanea/minimales.pdf Ultimo acceso: 15/10/11

El contenido es en general sobre las Superficies mínimas abarcando diferentes puntos: La etapa de desarrollo, propiedades físicas y topológicas, Ejemplos y relaciones físicas.

4. Luis Felipe Villada Peñaranda. "**Superficies Mínimas"** En: http://lfcrux.wordpress.com/componentes/sistemas%20complejos/superficies-minimas/ Último acceso: 25/10/2011

En el artículo se menciona las principales ideas sobre superficies mínimas, para tener una noción rápida del tema con preguntas como ¿qué son?, ¿para qué sirven?, ¿cómo funciona?

5. María Rosa Sánchez de Colacelli. "La **forma en las cubiertas de membranas. Parte 1: De las tiendas a las membranas pretensadas"** En: http://www.herrera.unt.edu.ar/revistacet/anteriores/Nro26/PDF/p50-54.pdf Ultimo acceso: 19/10/11

Se habla de las cubiertas de membranas pretensadas, acerca de su estructura y diseño que está relacionado con superficies geométricas para luego pasar a la clasificación de estas: Superficies de doble curvatura negativa, superficies combinadas, doble curvatura positiva, superficies de simple curvatura para luego ejemplificarlos medio de aplicaciones en algunas cubiertas.

6. Monserrat's Web log. "**Superficies Mínimas"** En: http://realidadmultisensorial.wordpress.com/ Último acceso: 25/10/2011

Un pequeño artículo donde se toca el tema de forma fugaz. Se menciona el concepto y las bondades de su uso en la arquitectura.

7. Morfología estética. "**Superficies Mínimas"** En: http://morfologiaestetica.wordpress.com/2008/12/03/superficies-minimas/ Último acceso: 25/10/2011

Pequeño artículo que se menciona superficialmente el tema, se enfoca mas en mostrar imágenes de obras arquitectónicas que usan el concepto de superficies mínimas en su desarrollo.

8. Néstor Martín Gulias. "**Superficies regladas alabeadas"** En: http://superficies-regladas-alabeadas.blogspot.com/ Último acceso: 25/10/2011

El contenido es acerca de la definición de las superficies regladas alabeadas con su clasificación para luego explicar los tipos de superficies que están dentro de esas características: paraboloide, conoide, Hiperboloide de revolución de una rama, helicoide, helicoide oblicuo.

9. Sagrada Familia. "**Helicoides y Conoides"** En: http://www.sagradafamilia.cat/sf-cast/docs_instit/pdf/geom_05.pdf Último acceso: 25/10/2011

Contiene información sobre conoide y helicoides y donde se usa en la arquitectura de Gaudí, en el edificio de la Sagrada Familia.

El problema y su solución matemática

1. Claudia Alsina. "**Geometría Gaudiniana"** En: http://textos.pucp.edu.pe/pdf/413.pdf Último acceso: 25/10/2011

El contenido es acerca de cómo el arquitecto Gaudí ha modificado y utilizado las superficies geométricas en esta caso: conoides, hiperboloide, arcos catenarios, etc. y como esos han sido aplicados en los diferentes edificios diseñados por ese arquitecto.

2. "**Estructuras Arquitectónicas"** En http://www.mcrit.com/comsoc/treballsrecerca/treballs_03_04/treb_publicats/gaudi/documents/estructures.pdf Último acceso: 25/10/2011

3. Salvador Pérez Arroyo. "Arquitectura **Orgánica " En:** http://diselabia.wordpress.com/2008/07/30/disenos-olimpicos-iii-y-la-mano-del-arquitecto-ii-frei-otto-y-munich-72/

Descarga de archivo: http://www.megaupload.com/?d=3H7FHAFY Ultimo acceso: 15/10/11

Se habla acerca de la arquitectura orgánica. El arquitecto Frei Otto explica las características de dicha arquitectura.

4. Wikipedia." **Minimalsurface** " En: http://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface Ultimo acceso: 15/10/11

El contenido es sobre la definición de las superficies mínimas y lo ejemplifican con el experimento donde se hace una inmersión de un marco de alambre en una solución de jabón, formando así una película de jabón la cual es una superficie mínima cuyo límite es la estructura del alambre, luego define lo que es una superficie mínima relacionándolo con las curvaturas.