# Los secretos geométricos en diseño y arquitectura

**Claudi Alsina i Català**
Catedrático de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Departamento de Estructures a l'Arquitectura, Universitat Politècnica de Catalunya

## *Introducción*

La Geometría es una rama fundamental de las Matemáticas cuyo objetivo primordial es el conocimiento y la creatividad, en el espacio tridimensional. Por ello, la Geometría está presente en la creación del Diseño y de la Arquitectura. La Geometría es, a la vez, un instrumento capaz de dar formas geométricas, dar métodos de diseño y representación, aportar medidas y proporciones y suministrar transformaciones con las que establecer simetría, modularidad o repetición, etc.

Las dimensiones del Diseño y de la Arquitectura son muchas y muy diversas: las tres espaciales, la temporal, el color, la luminosidad, la acústica, el confort, la percepción... y la Geometría incide muy especialmente en el apartado espacial. Quizás pudiéramos recordar aquí lo dicho por Giancarlo de Carlo:

> La forma tridimensional de la arquitectura no es el exterior de un sólido, sino la envoltura cóncava y convexa de un espacio; y a su vez el espacio no es el vacío, sino el lugar volumétrico en el que se desenvuelve toda una serie de actividades posibles y variadas.

Es de la fiel alianza del arquitecto con la geometría para "delimitar porciones del espacio libre para el uso de las personas" que nace la Arquitectura, y de la utilización del diseñador de los principios geométricos nace el Diseño.

Dado que la relación entre Geometría, Diseño y Arquitectura es milenaria, nuestra propuesta en este taller es hacer ver algunos secretos de esta relación, a través de desvelar algunas claves. Para cualquier persona interesada en el tema la descripción puede resultar curiosa, pero para profesores y estudiantes desearíamos transmitir la idea didáctica de que, más allá de la curiosidad, pueden encontrar en el estudio de esta relación Geometría-Diseño-Arquitectura una buena oportunidad para comprender cosas, desarrollar la capacidad de desenvolverse tridimensionalmente e iniciarse en los procesos de creatividad espacial.

A continuación iremos comentando algunos de estos aspectos geométricos ligados al Diseño y a la Arquitectura.

## Orientación geográfica

La buena orientación de los edificios ha sido un tema siempre importante en Arquitectura. Había (y hay) motivos de índole muy práctica: maximizar las horas de sol (iluminación, calefacción,...), pero también otros motivos de tipo simbólico (encarar hacia el oriente, iluminación especial en ciertos días santos o de solsticio, etc.). Ello llevó a la necesidad de usar métodos geométricos y de cálculo ya en las propias ceremonias que marcaban el inicio de las construcciones. Los relojes solares son bellos testimonios de este encuentro entre Arquitectura, Geometría y Naturaleza. Incluso hay edificios que son ellos mismos relojes de sol: Museo Arqueológico de Nápoles, Torre de Santiago Calatrava en Barcelona, Pirámide en el CosmoCaixa de Barcelona, etc.

**Nota didáctica:** Construir un reloj de sol para una ventana de la clase es una magnífica lección de Geometría.

## La modelización geométrica

Trabajar con maquetas a escala 1:10, 1:25,... o incluso 1:1 ha sido una técnica simple para favorecer la creatividad y la ejecución de obras arquitectónicas. Consta que algunas pirámides se hicieron partiendo de maquetas grandes (1:10). Los picapedreros medievales tenían maquetas de madera (1:1) de los elementos a esculpir en piedra. Hoy sigue siendo común el uso de maquetas de yeso o madera como soporte creativo.

Nuevas técnicas con resinas y cortes robóticos están revolucionando hoy el maquetaje, siendo el lenguaje geométrico esencial para programar dichas realizaciones.

**Nota didáctica**: ¿A qué escala deja de verse un objeto de medida real 10cm?

## La representación geométrica

La elaboración de modelos gráficos para Arquitectura surge a partir del siglo XII. Será con la invención de la perspectiva lineal y la Geometría Descriptiva de Monge que el método gráfico adquirirá rango científico, pudiendo unirse a él el cálculo riguroso o estática gráfica.

Gracias a la computación y las últimas generaciones de ordenadores y de software gráfico, con métodos geométricos es posible hoy hacer magníficas representaciones que llegan a la creación de maquetas y de espacios virtuales.

**Nota didáctica:** Junto a la regla y el compás era utilizada siempre una escuadra (dos reglas de madera formando ángulo recto). ¿Qué trazados facilitaba la escuadra?

## Modularidad

Muy a menudo, la Arquitectura exige la repetición de elementos iguales. Surge entonces la modularidad. El módulo puede ser un sistema de medidas (palmos y canas medievales; metros en el sistema métrico decimal; el Modulor de Le Corbusier con las series $d$, $d\phi$, $d\phi^2$,... y su doble, siendo $\phi$ el número de oro;...). Y también puede tratarse de un módulo geométrico (el módulo $L$ de Rafael Leoz en 4 cubos; el tatami japonés; el capitel románico, etc.). La modulación conlleva armonía, simetría, plasticidad,... pero también es, y ha sido, una forma de construir simple y eficaz (por repetición o por subdivisión). En épocas industriales la modulación ha facilitado también la economía de la obra.

**Nota didáctica:** Con un rectángulo áureo (tarjeta de crédito) dibujado en papel recorte el mayor cuadrado que pueda quedándole una pieza rectangular. Verifique que dicha pieza es semejante a la de partida.

## Proporción

La teoría de la proporción nace de la creatividad arquitectónica: la relación de la parte con el todo; las relaciones del todo con todas sus partes,... Esta teoría, ya aplicada en Egipto y descrita literariamente por primera vez por el arquitecto romano Vitruvio, va unida a los trazados geométricos con regla y compás, y en ella conviven las proporciones estáticas inherentes a la modularidad ($1, 1/4, 1/2, 3/4, 1/3, 2/3, 1/5,...$) con las bellísimas proporciones dinámicas ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, (1+\sqrt{5})/2,...$). La teoría de la proporción ha perdurado a lo largo de la historia, buscando siempre euritmia, armonía entre partes, belleza derivada de las proporciones de los seres humanos... y ha sido siempre un método compositivo.

**Nota didáctica:** ¿Cómo define “la proporción” en una caja de aristas $a$, $b$, $c$?

## Inclinación estructural

La Arquitectura se basa esencialmente en la verticalidad. Para lograr edificios cada vez más altos y más profundos se han tenido que desarrollar técnicas constructivas y estructurales, recursos geométricos de apoyo y una constante investigación de materiales que permitiesen superar los límites naturales de cada caso.

Si bien hay casos de patología constructiva donde aparecen inclinaciones (la Torre de Pisa es emblemática), fue Gaudí el primero en trabajar con columnas inclinadas (Parque Güell, Colonia Güell,...) que adaptadas al terreno permitían una distribución óptima de cargas.

Otro tipo de inclinación interesante es el clásico de las cubiertas de desagüe, propias de países lluviosos o con nieve (los ángulos de dichas cubiertas van ligadas al clima).

**Nota didáctica:** Abran una lata de Coca-Cola y vayan bebiendo. Llegará un momento en que la lata medio llena se puede aguantar inclinada sobre la mesa, aprovechando la forma de la base.

### *Fractalidad*

El principio arborescente de las ramas de un árbol es un ejemplo natural bellísimo de "fractalidad". La fractalidad se corresponde con el principio de "dividir" iterativamente.

Principios de fractalidad proyectual se encuentran en obras de Frank Lloyd Wright, en las columnas de la Sagrada Familia,... y en modernos diseños de plantas de aeropuertos o agregados de viviendas.

**Nota didáctica:** Observen la estructura de un paraguas plegable al abrirse,... ¡una estructura fractal interesante!

### *Acústica*

La geometría de la sala (medidas y superficies en paredes, techo y suelo) influye en la buena acústica, con lo cual ésta puede modificarse geométricamente. Un caso extraordinario de acústica se halla en un castillo de Kyoto donde las propias vigas del suelo al andar sobre ellas producen tonos musicales. Un dueño desconfiado resolvió con ello sus temores.

**Nota didáctica:** ¿Por qué al poner la mano junto a la oreja se intenta mejorar la recepción del sonido?

### *Preparación para terremotos y desgracias*

La flexibilidad de la estructura (por ejemplo, madera), la colocación del edificio, sobre base flexible de arena y piedras que permite oscilación no destructiva, la presencia en la azotea de contrapesos oscilantes... hay diversos recursos para contrarrestar el efecto de un terremoto suave.

Para otras situaciones límite (avisos de bombas, incendios, inundaciones, viento,...) la geometría también ayuda a realizar un diseño de prevención eficiente (escaleras de evacuación, caminos óptimos de salida, carácter aditivo de las medidas de las puertas según se acercan a la salida, etc.).

### *Formas poligonales y circulares*

Si bien a nivel de edificio las formas poligonales no rectangulares son escasas (Pentágono en Washington; ciudades fortificadas, etc.), en el nivel de distribuir espacios, delimitar aberturas, etc., las formas circulares o poligonales son omnipresentes. Muchas formas curvas en Arquitectura se construyen mediante aproximaciones poligonales.

En algunos casos cabe destacar problemas de carácter simbólico motivadores del uso obstinado de determinadas formas. Así el carácter mágico del pentágono regular y su estrella, el carácter religioso de la figura "vesica piscis", el cuadrado representando a Alá, el trazado del heptágono en el semicírculo alrededor del altar en las grandes catedrales, etc., son ejemplos de presencias poligonales o circulares cargadas de simbolismo.

> **Nota didáctica:** ¿Sabría construir una buena aproximación al heptágono regular en una circunferencia?

### *Las curvas y los arcos*

Ventanas, puertas, claustros, patios, etc. han motivado desde siempre la creación de arcos sustentando o delimitando tales aberturas. Destacan los arcos semicirculares, elípticos, parabólicos, hiperbólicos, de media "vesica piscis" o gótico, de herradura, lobulados, etc.

La construcción en piedra de dichos arcos llevó a crear el "compás de la geometría" y obligó a crear sistemas exteriores de apoyo (contrafuertes) para aguantar determinados empujes.

El mejor arco del mundo (introducido por Gaudí) es el catenario ($y = a[\exp(x/a) + \exp(-x/a)]/2$), pues se aguanta a sí mismo al ser la simetrización especular de la forma de una cadena que cuelga por su propio peso de dos puntos fijos.

> **Nota didáctica:** Mantenga una cadena colgando de entre sus manos y coloque el conjunto encima de un espejo horizontal donde pueda ver el arco catenario.

### *Formas poliédricas*

Cubos y ortoedros son las formas poliédricas más omnipresentes en Arquitectura. Otras formas poliédricas han aparecido también en construcciones singulares, siendo destacables las cúpulas geodésicas. Muchas de ellas derivan del icosaedro por triangulaciones sucesivas proyectadas en la esfera que circunscribe al conjunto. Así, la gran esfera del Epcot Center en Orlando, la del Museo Dalí en Figueres o la del cine de La Vilette en París resultan sorprendentes edificaciones. El secreto de "la rigidez espacial" es siempre "la triangulación".

> **Nota didáctica:** Haga una visita a un gran web de poliedros como el de George Hart [http://www.georgehart.com].

### *Superficies quebradas*

Las superficies formadas por trozos rectangulares articulados en forma de zig-zag constituyen interesantes biombos, cubiertas de fábricas y escaleras.

Las inclinaciones de rampas y escaleras deben ser adecuadas. Si un escalón es de altura $C$ y huella $H$ normalmente se considera $H$+2$C$=63cm. Si recuerdan que 3 puntos de zapato son 2cm pueden discutir medidas óptimas para $H$ y luego calcular $C$. Pueden notar también que $(C{:}H)\cdot 100$ les dará el tanto por ciento de pendiente.

**Nota didáctica:** ¿Qué peso puede aguantar con una hoja de papel apoyada entre dos libros?... Muy poco, si no hace nada a la hoja. Mucho, si crea con ella una superficie quebrada.

### *Formas conoidales y cilíndricas*

Mientras las formas cónicas son arcaicas culminaciones de torres cilíndricas, las formas cilíndricas como paredes o como cubiertas siempre han tenido especial presencia. Son formas regladas simples y en ellas se pueden albergar escaleras de caracol. También hay rascacielos combinando formas cilíndricas, sin olvidar la forma cilíndrica fundamental en columnas, trazados de túneles, chimeneas, etc.

**Nota didáctica:** Marque varias rectas paralelas en un papel y forme con él un cilindro. Podrá observar en la superficie cilíndrica sus líneas geodésicas básicas: las hélices.

### *Esferas y paraboloides de revolución*

Dichas figuras forman parte de famosas cúpulas de piedra: la de San Pedro del Vaticano, la de Florencia, la del Capitolio en Washington, la del Palacio Güell de Gaudí, etc.

El valenciano Guastavino triunfó en Estados Unidos fabricando grandes cúpulas con la técnica rápida, barata y resistente de la "vuelta catalana".

Con porciones de una esfera (basándose en cortes de una manzana con un cuchillo) Utson diseñó la gran ópera de Sidney en Australia, no sin antes resolver grandes problemas técnicos para la construcción de dichas formas.

**Nota didáctica:** Si tiene un vaso medio lleno de agua y lo agita girando verá como la superficie del líquido forma un paraboloide de revolución.

### *Los hiperboloides de una hoja*

Estas superficies regladas (cuyas rectas unen puntos correspondientes entre circunferencias paralelas giradas entre sí) son las formas ideales para dar sonoridad a las campanas; diversos objetos de diseño tienen esta forma. Gaudí introdujo el uso de dichas superficies en columnas, chimeneas y grandes entradas de luz en la Sagrada Familia.

A nivel de ingeniería es una forma idónea para grandes chimeneas de centrales térmicas, al precisarse un mínimo grosor llegando a una gran altura.

**Nota didáctica:** Pueden disfrutar de hiperboloides de una hoja haciendo pasar (seguido) hilo elástico por los agujeros correspondientes en dos círculos agujereados.

## *El paraboloide hiperbólico*

Esta sorprendente superficie reglada nace al apoyar rectas entre puntos correspondientes de dos rectas que se cruzan en el espacio (situadas en dos planos paralelos), ortogonales a un plano paralelo a todas las rectas que se apoyan. Fué Gaudí el primero en usarla para techos, cubiertas y otros detalles, siendo un elemento clave en la espectacularidad de ciertos diseños gaudinianos. Félix Candela la usó en monumentales construcciones; Nervi, Calatrava, etc. también la han empleado.

**Nota didáctica:** Tome un lápiz en cada mano. Sitúelos paralelos y entre ellos apoye algunos lápices. Tendrá un plano. Si levanta ligeramente un lápiz de una mano verá surgir la figura.

## *La simetrización*

La teoría de la simetría con su juego de transformaciones isométricas en el plano o en el espacio ha dado lugar a ingeniosos recursos compositivos, considerados en muchos casos como referentes de belleza.

Un primer nivel e investigación es el de figuras con centro, con formas calidoscópicas.

Es la simetría con centro y rotaciones. Es la de la ciudad-estrella de Karlsruhe; es la de las fortificaciones poligonales medievales; es la de las plantas de templos circulares renacentistas dibujados por Leonardo da Vinci, es la de la Place de l'Etoile de París,... Los grupos cíclicos y diedrales que se corresponden con los polígonos convexos regulares orientados o no-orientados rigen la generación de estos espacios.

Los juegos de agua en los jardines, los módulos con espejos interiores, las distribuciones geometrizadas de flores y plantas en el jardín inglés... son exponentes de esta técnica simetrizadora central.

Los ejes de simetría en el plano y los planos de simetría en el espacio son elementos compositivos esenciales, sobre los cuales se basa el concepto de “equilibrio” arquitectónico y de ordenación.

Encontramos este efecto en las plantas de Palladio, en las fachadas y plantas de las grandes catedrales, en la mayoría de fachadas y distribuciones interiores de apartamentos, en grandes ejes viales, en los rascacielos... la parte izquierda se corresponde con la parte derecha... la simetrización como principio de la repetición.

La verticalidad de la Arquitectura y la obstinada horizontalidad de los estanques o lagos permiten crear un efecto visual curioso externo a la obra: el reflejo de las fachadas en el agua. De esta manera nace una bella imagen doble. Una es “real” y corpórea. La otra es virtual, reflejada, dependiente del reposo del agua o de su movilidad.

Podemos ver este efecto en la Alhambra de Granada con sus reflejos en estanques interiores, donde se ha logrado una magistral quietud de agua circulante. Tuduri usó este principio en el estanque adjunto a la Sagrada Familia de Barcelona. En grandes fachadas marítimas de ciudades costeras (Nueva York, Boston, San Francisco,...) también el mar actúa como espejo vivo.

Un tercer nivel de simetrización se encuentra en frisos, mosaicos y decoraciones del plano donde los conocidos grupos de simetría respectivos permiten la generación al infinito de grandes diseños partiendo de módulos muy simples.

Los 17 grupos de simetría del plano presentes en La Alhambra de Granada o en el mudéjar aragonés; los frisos griegos, romanos o de la cerámica valenciana; los mosaicos de todos los grandes palacios... son bellísimos ejemplos de simetría. Pero las tramas del diseño urbano en Nueva York o en el Ensanche de Barcelona son también el resultado de una simetría de la repetición puesta al servicio de las distribuciones urbanas.

**Nota didáctica:** Aprenda a recortar los 7 tipos de frisos con bandas de papel y tijeras.

### *Forma y función en Diseño*

El Diseño busca soluciones geométricas óptimas para dar formas y medidas a objetos que deben cumplir determinadas funciones. En esta búsqueda para dar respuestas a las relaciones formas-funciones surge la Geometría aportando figuras o transformaciones. Pero el diseño no se reduce a la creatividad geométrica, sino que debe conjugar la dimensión geométrica con las consideraciones ergonómicas, económicas, perceptivas, las texturas, los colores, etc. La Geometría cotidiana no es, en consecuencia, un corolario de la Geometría euclídea, sino una componente de un proceso creativo más complejo.

Entre las curvas más relevantes en diseño encontraremos las cónicas, las espirales, la catenaria, las hélices, las sinusoides… Entre las superficies las planas, las cuadráticas y ciertas superficies regladas, mínimas y de revolución. Las formas poliédricas también tienen su papel.

Podríamos citar, por ejemplo, las espirales en las mecedoras de Thonet, el uso de catenarias en arcos, el uso del triángulo de Reuleaux en motores, taladros y en las pastillas de menta SMINT®, conos para helados, espirales en discos de vinilo, hiperboloide de una hoja en gramófonos, campanas y trompetas, paraboloide hiperbólico en patatas fritas, etc., etc., etc.

El diseño minimalista, el tecnológico avanzado o el más creativo nos puede sorprender con soluciones (propuestas) inesperadas: las escaleras plegables telescópicamente, las estructuras plegables de mesas, los paraguas super-plegables, las nuevas llaves de habitaciones de hotel basadas en bandas magnéticas, la tecnología WIFI, los lápices digitales, etc.

Objetos como los clips, las pinzas de tender la ropa o las tradicionales hueveras contienen en su minimalismo, su economía y su funcionalidad duradera esta perfección de diseño donde se tiene una forma óptima para una solución estupenda.

La Geometría tiene aspectos curiosos e interesantes, y debemos contemplarla no como un producto del pensamiento puramente abstracto, sino como el resultado de un largo proceso histórico, social y cultural. Nos gustaría haber evidenciado que en los objetos de Diseño y toda la Arquitectura del mundo tenemos gratis, y para siempre, un magnífico laboratorio de Geometría.

## *Referencias*

**C. Alexander**: *La estructura del medio ambiente*. Tusquets, Barcelona, 1971.

**C. Alsina:** *Una matemática feliz y otras conferencias*. OMA, Buenos Aires, 1995.

**C. Alsina:** *Contar bien para vivir mejor*. Rubes, Barcelona, 1998.

**C. Alsina:** *Sorpresas geométricas*. OMA, Buenos Aires, 2000.

C. **Alsina:** *La matemática hermosa... y otras conferencias*. OMA, Buenos Aires, 2000.

**C. Alsina:** *Geometría y realidad*. En *Aspectos didácticos de matemáticas 8,* ICE de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza (2001), pp. 11-32.

**C. Alsina:** *Geometría cotidiana: placeres y sorpresas del diseño*. Rubes, Barcelona, 2005.

**C. Alsina, J.M. Fortuny, R. Pérez:** *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Síntesis, Madrid, 1997.

**C. Alsina, J. Gómez:** Gaudí engineer. *Crossing* **2** (2001), 72-80.

**C. Alsina, E. Trillas:** *Lecciones de álgebra y geometría*. Gustavo Gili, Barcelona, 1986.

**J. Bassegoda:** *Antoni Gaudí*. Edicions 62, Barcelona, 1992.

**J. Bassegoda, G. García:** *La cátedra de Antoni Gaudí: estudio analítico de su obra*. Edicions UPC, Barcelona, 1999.

**J. Bergós:** *Gaudí: l'home i l'obra*. Edicions UPC, Barcelona, 1974.

**B. Bolt:** *Mathematics meets technology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

**G. Boltyanskii:** *The decomposition of figures into smaller parts*. University of Chicago Press, Chicago, 1980.

**J. Bonet:** *L'últim Gaudí*. Pórtic, Barcelona, 2000.

**D. Burger:** *Sphereland: A fantasy about curved spaces and expanding universe*. Harper and Row, New York, 1983.

**M. Burry:** *Expiatory church of the Sagrada Familia: Antoni Gaudí*. Phaidon, Londres, 1993.

**G.R. Collins:** *Antonio Gaudí*. Braziller, Nueva York, 1960.

**T.A. Cook:** *The curves of life: Being an account of spiral formations and their applications to growth in nature, to science, and to art*. Dover Publications, New York, 1979.

**R. Courant, H. Robbins:** *What is Mathematics?* Oxford University Press, New York, 1941.

**H.S.M. Coxeter:** *Fundamentos de Geometría*. Limusa-Wiley, México, 1971.

**J. Estalella:** *Ciencia recreativa*. Gustavo Gili, Barcelona, 1920.

**S. Garfunkel et al.:** *Modelling our world (Arise Project)*. COMAP, Lexington, 1998-2000.

**M.C. Ghyka:** *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Poseidón, Barcelona, 1977.

**J. Gómez et al.:** *La Sagrada Familia: de Gaudí al CAD*. Edicions UPC, Barcelona, 1996.

**G. Guillén:** *Poliedros*. Síntesis, Madrid, 1990.

**R. Ibáñez:** *El vientre de un arquitecto (la búsqueda de la forma)*. En *Un paseo por la geometría,* Publicaciones del Departamento de Matemáticas UPV-EHU (2004), pp. 155-186.

**Le Corbusier:** *El Modulor* (vols. I, II). Poseidón, Barcelona, 1976.

**J. Malkevitch:** *Finding room in the curriculum for recent geometry*. En *Perspective on the teaching of geometry for the 21st Century: An ICMI study* (C. Mammana and V. Villani, eds.), Kluwer, Dordrecht, 1998, pp. 18-24.

**J. Malkevitch:** *Geometry and reality*. En *Perspective on the teaching of geometry for the 21st Century: An ICMI study* (C. Mammana and V. Villani, eds.), Kluwer, Dordrecht, 1998, pp. 85-99.

**J. Malkevitch:** *Geometry's future*. COMAP, Lexington, 1998.

**C. Mammana, V. Villani (eds.):** *Perspective on the teaching of geometry for the 21st Century: An ICMI study*. Kluwer, Dordrecht, 1998.

**L. March, P. Steadman:** *The geometry of environment*. RIBA, Londres, 1971.

**D. Pedoe:** *La geometría en el arte*. Gustavo Gili, Barcelona, 1979.

**N. Pennick:** *Sacred geometry*. Turnstone Press, Wellingborough, 1980.

**G. Plugh:** *Polyhedra, a visual approach*. University of California Press, Londres, 1976.

**G. Polya:** *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1985.

**L. Quaroni:** Proyectar un edificio: ocho lecciones de arquitectura. Xarait Ediciones, Madrid, 1980.

**M. Salvador:** *Why buildings stand up*. WW Norton, New York, 1990.

**M. Senechal, G. Fleck:** *Shaping space: A polyhedral approach*. Design Science Collection, Birkhauser, Boston, 1988.

**L.A. Steen (ed.):** *For all practical purposes*. COMAP, W.H. Freeman and Co., New York, 1994. [Versión española: *Matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley, Madrid, 1999].

**D. Thompson:** *On growth and form*. Cambridge University Press, Cambridge, 1961.

**J. Tokutoshi:** *El mundo enigmático de Gaudí*. Instituto de España, Madrid, 1983.

**E. Veloso:** *Geometria: Temas actuais*. Instituto de Inovação Educacional, Ministerio da Educação, Lisboa, 1998.