PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÒLICA DEL PERÚ

# HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

VOLUMEN 1

LA MATEMÁTICA EN LA ANTIGUEDAD

ALEJANDRO ORTIZ FERNANDEZ
Sección Matemática. PUCP

LIMA - PERÚ

Alejandro Ortiz Fernández (1936)
Profesor Principal. Sección Matemática. PUCP.
Ex-Profesor Principal y Profesor Emérito de la UNT
Ex-Profesor de la UNMSM

Historia de la Matemática. Vol.1.
Autor: Alejandro Ortiz Fernández
U.S.B.N.

Digitación y Diagramación en LaTeX:
Sr Carlos Ramón Deudor Gómez (**www.degoca.com**)
carlos@degoca.com
Lic. Shila Antuanett Neciosup Salas
neciosupshila@hotmail.com

Primera Edición: Junio 2005.


Printed in Lima - Perú. Impreso en Perú

A

la Memoria de mi Amigo

Miguel de Guzmán.

# PRESENTACIÓN

"La historia de la matemática debe ser, realmente,
el núcleo de la historia de la cultura".
George Sarton.

Este libro forma parte de un Proyecto mas ambicioso, escribir sobre la historia de la matemática desde la Antiguedad hasta algunos temas de los tiempos modernos. Soy conciente de lo difícil que es la tarea que nos estamos imponiendo y que debe exigir una entrega de total dedicación. Mi experiencia en los últimos treinta años de escribir monografías matemáticas y la coyuntura generacional a la que pertenezco, me estimula y me da cierta confianza en tratar de lograr gran parte del reto que nos trazamos. Como es sabido, tareas como la que presentamos hay que hacerlas en forma paralela a nuestras obligaciones como profesor pero he aprendido, con los años, a comprender que si anhelamos hacer algo que nos apasiona, ello hay que hacerlo poniendo mucha voluntad, dedicación y sacrificar aspectos que a mi edad, a veces, es difícil renunciar. Pero, no hay alternativa y reconozco lo difícil del camino que aún queda por recorrer, a lo que hay que agregar que me atrae también, escribir sobre temas puntuales de teorías matemáticas de cierta actualidad y que me es difícil renunciar a hacerlo.

Este primer volumen está dedicado a la matemática en la Antiguedad. Confieso que yo sabía muy poco de lo que se había hecho en aquellos tiempos en el campo de la matemática; me eran desconocidos varios nombres notables que contribuyeron con ideas muy ingeniosas, y en algunos casos profundas, en el campo de la geometría y de la aritmética. Es claro que sabía quienes fueron Tales, Pitágoras, Euclides, Arquímedes y Apolonio, pero es claro, ahora, que los conocía de nombre y de pequeñas referencias de sus personalidades, y no tenía conocimiento de los detalles de sus obras matemáticas y del tesoro que ellas contienen. Y aún, no termino por comprender bien lo aportado por aquellos geniales científicos, y de otros de aquella época.

Es estimulante conocer que en aquellos lejanos tiempos existieron seres que hayan tenido la genialidad de formular y obtener resultados de alto valor científico y en el caso de Arquímedes y Apolonio saber que fueron dos excepcionales mentes que iluminaron no solo a la matemática de entonces, sino a la de muchos siglos después. Pero también es muy constructivo conocer que aún, muchos siglos antes de la gloriosa cultura griega ya existieran otras civilizaciones que lograron significativos progresos matemáticos, como fue el caso de Babilonia y de Egipto, dos legendarias culturas que llegaron a poseer una geometría, una aritmética y un álgebra suficientemente avanzadas para lograr significativas aplicaciones.

La matemática hecha en aquellos lejanos tiempos, ¿es suficientemente conocida por nosotros en el siglo XXI? ... Al menos en nuestro país, conjeturo que de un modo general la respuesta es negativa. ¿Tiene algún interés o valor conocer lo hecho en esas remotas épocas? Creo que si, y mucho. Solo conociendo nuestras propias raices podremos comprender, posiblemente mucho mejor, las ideas esenciales de lo mucho logrado en los siglos que sucedieron. Además, es también parte de la cultura matemática que todo profesional, que esté relacionado con la matemática, debe poseer. Se puede afirmar que se podría ser un buen profesional ignorando tal conocimiento, pero, creo que lo sería mucho mejor, si fuera conciente de lo realizado por aquellos grandes Maestros de nuestra ciencia.

Escribir sobre esta etapa de la matemática, la Antiguedad, es una tarea nada fácil por la naturaleza de los datos que se disponen. Muchas originales, escritos antes de Cristo, se perdieron y solo se les conocen por referencias de otros investigadores que vivieron pocos siglos después. Esta dificultad se hace mayor en nuestro caso dado que no dispusimos de fuentes bibliográficas de cierta antiguedad. Las obras mas especializadas en la Antiguedad que dispusimos fueron [ALM] y [HEA] (ver la bibliografía). Tampoco la biblioteca de nuestra universidad posee alguna revista sobre historia de la matemática; en consecuencia nuestras fuentes de consulta fueron libros escritos en el período de sesenta años atrás. Es justo remarcar, por otro lado, que en los últimos años se han escrito excelentes libros sobre historia de la matemática o temas afines; por ejemplo, ver [KLI], [STI], entre otros. También, vía Internet se pueden encontrar muchos artículos sobre el tema, la matemática en la Antiguedad. El lector puede navegar y disponer de mucha información al respecto. Dentro de los libros, [BOY] y [EVE] son dos clásicos muy útiles para entrar a la historia de la matemática.

Al escribir el presente volumen hemos procurado respetar el estilo y forma de como fueron redactados los escritos por sus antiguos autores; es claro que la forma heredada por nosotros ha sufrido algunas sucesivas traducciones desde la lengua original.

Por esta razón, el lector encontrará diversos pasajes en este libro en donde **nos es difícil comprender el español** usado, dificultad que a veces se transmite a la comprensión matemática del tema en cuestión. Esto es parte de la historia que nos ocupa y debemos tener paciencia. Por ejemplo, al leer los libros de los Elementos de Euclides apreciaremos que los enunciados y las demostraciones son redactados en un estilo no comprensible del todo y nos cuesta dificultad asimilar el mensaje que se nos da.

Este volumen consta de dos capítulos; el primero trata sobre la matemática pre - griega (Babilonia y Egipto) y sobre la matemática griega, hasta Euclides. En el segundo capítulo fundamentalmente presentamos a Arquímedes, Apolonio y a Eratóstenes. Alrededor de tales personajes mencionamos a diversos otros, pocos conocidos en nuestro ambiente. Fue también conveniente considerar algunos aspectos sobre el nacimiento de la trigonometría. El primer capítulo comienza con algunas consideraciones generales y con algunos comentarios sobre la matemática en la Pre - Historia. Luego tendremos la oportunidad de ilustrarnos de los aportes hechos por dos importantes civilizaciones como fueron la babilónica y la egipcia, y podremos apreciar que ellos ya conocían diversos resultados en geometría, álgebra y aritmética; aún cuando esos resultados fueron no formales sin embargo nos demuestran que habían logrado un desarrollo mental que les permitió obtener abstracciones de mucho valor matemático, tanto en la teoría como en las aplicaciones. En cuanto a la matemática griega, tratada en este capítulo, se comienza con Tales de Mileto, figura legendaria que tuvo luz propia para iluminar el futuro matemático que se desarrollaría luego. Pitágoras y los Pitagóricos, es presentado con cierta amplitud pues lo aportado por ellos fue fundamental en el desarrollo posterior del pensamiento matemático. Euclides y su obra maestra, Los Elementos, tuvo un tratamiento especial por el significado que desempeñó en la cultura universal. Intencionalmente presentamos a los Elementos con un detalle quizás criticable. ¿Es justificable presentar el contenido de los Elementos con el detalle que lo hicimos? Posiblemente existan opiniones que afirmen que no lo es. En verdad, yo tuve duda sobre esta cuestión. Al final decidí hacer lo que exponemos en 1.2.5. Tratándose de una obra monumental considero que la información y/o el conocimiento de los Elementos debe formar parte de la cultura de todo profesional que haga uso de la matemática, sobre todo de los matemáticos.

Luego de transitar por la Antiguedad y de sentir el valor que significa como la matemática fue elaborada por sus propios autores, estoy mas convencido de la importancia del curso de Historia de la Matemática. Este sentimiento seguramente será mas fuerte conforme avancemos a través del tiempo (y de los volúmenes que vendrán). Sugerimos que en la formación de todo estudiante de matemática (y de todo futuro profesor de matemática) deba haber un bien meditado curso sobre tal área. Posiblemente un curso de cuatro horas semanales o dos cursos de tres horas cada uno, podría permitir dar una visión de como fueron evolucionando las ideas y las teorías matemáticas. El famoso matemático Henri Poincaré dijo:

> ≪ si nosotros queremos predecir el futuro de la matemática, nosotros tenemos que estudiar su historia y su presente situación ≫ .

Sabias palabras de un ilustre hombre de ciencia. Lamentablemente en nuestro pais creo que lo planteado no es bien comprendido; se confunde con algo que se obtiene leyendo libros de divulgación, de contenido popular y que sirve para “conseguir el sueño”. No! La idea es presentar teorías matemáticas, hacer su estudio matemático, probar los teoremas en la forma como fueron hechos por seres de gran inteligencia matemática; debemos sentir también las dificultades y las frustraciones que ellos tuvieron algunas veces. Algunas teorías modernas han surgido en el siglo XX leyendo, investigando acusiosamente trabajos realizados siglos atrás. En este sentido, la historia de la matemática no solamente es útil a los matemáticos sino a todo profesional con cierta curiosidad por conocer como surgieron lo que le enseñaron en el colegio, en la universidad, que ahora usa y pueda extrapolar todo ello en sus propios intereses y realizaciones.

La organización de este volumen es como sigue. Consta de dos capítulos. En el Capítulo 1, presentamos algunos aspectos sobre la matemática en la Antiguedad y consta de dos secciones; en la primera tratamos la matemática pre-griega y en la segunda a la matemática griega, de Tales a Euclides. Cada sección está dividida en subsecciones en que se desarrollan los distintos temas. Creimos conveniente incluir una subsección sobre algunos comentarios y otra sobre ejercicios y cuestiones generales a modo que el lector tenga una participación en su aprendizaje de lo leido. El Capítulo 2 conserva la misma estructura que el primer capítulo. Consta de seis secciones y abarca desde Arquímedes hasta la declinación de la matemática griega. Resaltamos, además de Arquímedes, a la figura de Apolonio, notable geómetra, autor de las Cónicas. El libro termina con un breve resumen de los Capítulos 1 y 2, la bibliografía y el índice alfabético.

Agradezco a las autoridades del área de Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, institución donde soy profesor, por haberme brindado las condiciones para poder realizar el presente trabajo. A mi esposa Luz Marina por su estímulo constante que significa muchos años de vida en común. Mis agredecimientos a la Lic. Shila Neciosup Salas y al Profesor Carlos Deudor Gomez por su excelente trabajo en el diseño y diagramación en LaTeX y apoyo en la redacción de esta edición de esta obra. A mi amigo, Prof. Thomas Gilsdorf por su motivación e interés en esta obra.

No puedo terminar sin mencionar la lamentable pérdida que tuvimos con la muerte de dos destacados profesores, ambos cultores de la historia de la matemática: **Roberto Velásquez y Miguel de Guzmán**. A ellos van mis recuerdos y mi gratitud de amigo.

Lima, Mayo 2005

A. O. F
jortiz@pucp.edu.pe

# CONTENIDO

## Capítulo 1

## LA MATEMÁTICA EN LA ANTIGUEDAD

# Capítulo 2

# DE ARQUÍMEDES A LA DECLINACIÓN DE LA MATEMÁTICA GRIEGA

# The Title

The Author

The Date

## 0.1. Preface

This is the preface.

# Parte I

# The First Part

# Capítulo 1

# LA MATEMATICA EN LA ANTIGUEDAD

## 1.1. MATEMATICA PRE-GRIEGA.

### 1.1.1. Aspectos Generales. (Etapas de la Matemática).

En esta sección daremos una breve visión sobre la evolución de la matemática, con énfasis en lo sucedido en la Antiguedad. En la siguiente sección daremos un panorama sobre la matemática en la pre-historia. Posteriormente estudiaremos a las dos grandes culturas pre-griegas:la babilónica y la egipcia.

Desde los tiempos mas remotos, el estudio de la matemática fue de gran importancia en el desarrollo del progreso humano. Esta característica perdura aún en nuestros días. El conocimiento matemático, en todos sus niveles, dió al hombre la dimensión de un ser pensante, un ser esclarecido y de creador de ideas abstractas. La matemática es una de las ciencias mas antiguas; las ideas de forma y de número surgieron posiblemente en las culturas más antiquísimas que tengamos conocimiento. En todas las épocas, la matemática constituyó la base de los conocimientos surgidos de la mente humana. Debida a su exactitud, ella está en la cima del conocimiento del hombre. El ideal de la perfección de la matemática llevó a los mas grandes filósofos de la Antiguedad a su estudio; asi Tales de Mileto, Pitágoras, Demócrito, Anaxágoras, Platón, Aristóteles, entre otros, dedicaron sus vidas a su estudio, logrando valiosos aportes a la cultura griega. Sócrates, el gran Maestro, exclamó:

> “ ¿Nunca notaste que aquellos que saben calcular naturalmente, y sin dificultades, son dotados de una inteligencia capaz de hacer progresos rápidos en todas las artes, y que las criaturas de espíritu tardío y pocos abiertos, se tornan, cuando son ejercitadas en la aritmética, mas ingeniosas y mas inteligentes?”

Hipócrates, ilustre médico de la Antiguedad, dijo:

> “ Por el conocimiento matemático, no solo alcanzarás mas gloria y utilidad en las cosas humanas, si no que además tornará a vuestro espíritu mas inteligente y mismo mas propio para los asuntos que dicen respecto a la medicina”.

El surgimiento de la matemática en las ciencias naturales ocurre como resultado de la aplicación de las teorías matemáticas existentes a problemas prácticos y de la elaboración de nuevos métodos para su solución. La aplicación de una teoría matemática en el campo objetivo no siempre tiene de inmediato una solución satisfactoria; a veces pasan años, decenios para lograr la solución. A su vez, conforme la tecnología progresó se abrieron nuevas posibilidades para resolver problemas mas complicados. Tal es el caso del surgimiento de las computadoras a mediados del siglo XX. Desde la época mas antigua hasta nuestros días, el campo de las aplicaciones de la matemática evoluyó notablemente. Es una relación mutua entre la creación abstracta y los problemas del mundo físico. El proceso de la creación de las ideas y métodos matemáticos para la solución de problemas, desde las mas elementales cuestiones, abarca un tiempo largo. El inicio de tal proceso data posiblemente de los tiempos remotos, cuando el hombre comenzó a usar instrumentos para obtener los medios para sobrevivir. Este período termina con el surgimiento de formas cualitativamente nuevas del pensamiento matemático, de nuevas ideas y métodos suficientemente maduras para constituir formas primarias de teorías matemáticas. Esto sucedió alrededor de los siglos VI-V A.C. (antes de Cristo) en la gloriosa Cultura Griega.

Como es natural pensar, los datos materiales que se tienen de la antiguedad son escasos e incompletos y están en continuo proceso de enriquecimiento conforme se hagan nuevos descubrimientos de documentos antiguos. Pareciera que las ideas matemáticas, desde las mas primitivas, son inherentes a la naturaleza mental del hombre. En consecuencia, la historia de la matemática está intimamente relacionada a la historia de la humanidad. Las ideas primarias de figura, forma, número, área,... surgieron en la convivencia del hombre con la naturaleza y fueron perfeccionándose con el transcurso de los siglos. Fue un largo desarrollo matemático-histórico. Según algunas investigaciones, hacia el año 40,000 A.C., época del hombre de Neandertal, el hombre comenzó a pensar y posiblemente al poco tiempo de aquel entonces, nuestros antepasados comenzaron a usar un lenguaje con vestigios de un sistema de números, asi como se hicieron algunas construcciones en donde aparecen ciertas relaciones geométricas.

Por otro lado, el hombre primitivo al observar su entorno seguramente fue concibiendo la idea de número, aún antes de que surgiera un lenguaje que le permitiera comunicarse. Posiblemente fue distinguiendo una sensación cuantitativa al observar un árbol y al observar tres árboles; en su cuerpo tuvo la oportunidad de ir concibiendo la noción de número al observar los dedos de una mano, los de las dos manos, de las manos y los pies. Las noches de Luna llena le irían moldeando la idea de redondez, al menos como un sentimiento.

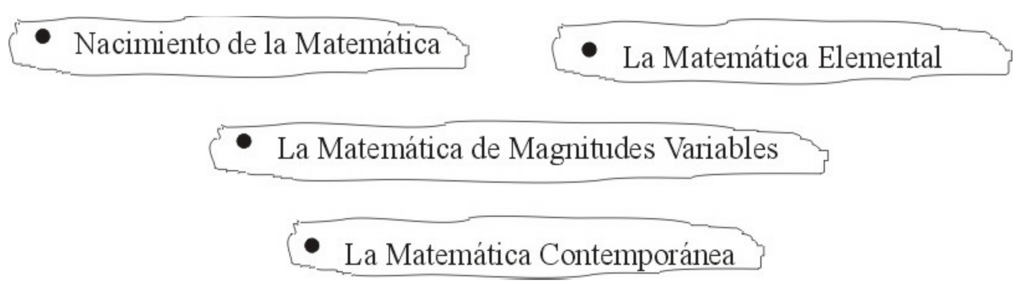
El nacimiento de las civilizaciones antiguas se produce con la llegada de la Edad de los Metales, y surgen a orillas de los grandes ríos como son el Eufrates, el Tigris, el Nilo y otros en la India y en la China. Nuestra vida familiar está fuertemente influenciada por el pensamiento matemático, desde los tiempos remotos hasta la actualidad, desde las ideas mas simples y triviales hasta las mas complejas de nuestros días. En los pueblos antiguos, de un modo progresivo, se fueron elaborando nuevas ideas o teorías matemáticas.

Posiblemente el hombre pueda vivir en un mundo donde no existan algunas de las profesiones conocidas (el derecho, la literatura,...) pero es dificil que pueda vivir en un mundo sin matemática, caso contrario estaría condenado a vivir en un mundo muy trivial. Ya en las culturas surgidas en las regiones geográficas citadas antes, la matemática había evolucionado lo suficiente para poder ser aplicada en diversas situaciones concretas. Los babilonios y los egipcios tuvieron conocimientos suficientemente avanzados para realizar, por ejemplo, trabajos de ingeniería, que aún ahora nos maravillan.

La matemática es un conocimiento que está en nuestra mente, surge de nuestra mente; la abstracción es una de sus características inherentes. Llegar, por ejemplo, a la abstracción del número "1" llevó mucho tiempo al hombre. Sin embargo, estos modelos abstractos fueron y son indispensables para resolver múltiples problemas del mundo físico; por ejemplo, gracias a la teoría de las funciones analíticas de Cauchy y de la representación conforme es que un avión vuela. Los físicos e ingenieros, a través del tiempo, conquistaron a la naturaleza o como dijo Descartes, "dominaron a la naturaleza". La matemática amplía constantemente su campo de aplicación; actualmente se la aplica en dominios muy especializados y con modelos matemáticos muy elaborados, de niveles avanzados. Los grupos de investigación multi-disciplinarios crecen día a día. Guardando la proporción, esta situación también era cierta siglos atrás.

La Historia de la Matemática nos ilustra de períodos gloriosos en que la humanidad, a través de los aportes de los matemáticos, lograron conquistas intelectuales y materiales de altísimo nivel. Ya hemos mencionado ligeramente a la cultura griega de los siglos VI a III A.C. Otro período glorioso fue lo logrado en los siglos XVII y XVIII con la creación de la geometría analítica y del cálculo, y de lo derivado de estas dos teorías. Desde la Antiguedad se buscaron métodos matemáticos universales que permitieran resolver diversos problemas. La abstracción surgida en la Antiguedad permitió demostrar diversos teoremas abstractos; en este sentido, y por su contenido, "Los Elementos" de Euclides es una obra monumental, que perdura hasta nuestros días. La geometría de Euclides y la de Apolonio (las "cónicas") fueron aplicadas con éxito en múltiples problemas surgidos en el mundo físico, como fue (por ejemplo) en la mecánica y en la mecánica celeste.

Según el prestigioso matemático ruso A.N. Kolmogórov, en la historia de la matemática se distinguen los siguientes **períodos** (ver [RIB]):




- **Nacimiento de la matemática:** este período se inicia en la s profundidades de la civilización primitiva y se prolonga hasta los siglos VI y V antes de Cristo.

  Comprende la etapa de la formación de las ideas mas primitivas de número y de forma hasta el momento en que la matemática adquiere cierta independencia, con objetivos y métodos propios. Pertenecen a este período las culturas egipcia y la babilónica. En esta etapa se formaron la aritmética y la geometría, las cuales estaban intimamente relacionadas. La matemática era una colección de reglas aisladas que provenían de la experiencia con el medio ambiente; no existía aún un sistema organizado ni unificado.

- **La Matemática Elemental:** este período se inicia entre los siglos VI y V A.C., con Tales y Pitagoras, cuando la matemática deja de ser un conocimiento solo al servicio de aplicaciones inmediatas, en donde existían resultados teóricos aislados y recetas numéricas, para luego pasar a constituirse en una ciencia altamente intelectual. Por ello, la denominación "elemental" es solo una expresión para ubicar a la matemática en el contexto general de lo que vendría siglos después. En efecto, los trabajos matemáticos de Arquímedes y de Apolonio son de alta profundidad matemática, inclusive no muy bien conocidos actualmente en nuestro medio. Asi mismo, como ya hemos mencionado, "Los Elementos" de Euclides constituye una obra singularmente original para su época y está escrita con un rigor que hace de ella una obra perdurable a través del tiempo. Sin embargo, toda esta matemática es, de algún modo, estática por las características históricas de la sociedad de entonces. Asi, hasta mediados del siglo XVI de nuestra era en que, gracias al renacimiento científico producido entonces, la humanidad entra en una revolucionaria etapa de cambios esenciales. Gracias a la física y al conocimiento de otras ramas, la matemática se hace dinámica, estudia los cambios existentes en la naturaleza; se inicia la etapa de las **magnitudes variables**, la que fue fuertemente estimulada por la creación de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal. En contraste, a este período también se le conoce como la etapa de las **magnitudes constantes**.

- **La Matemática de las Magnitudes Variables:** se inicia con los trabajos de Descartes, Newton y Leibniz, asi como con las múltiples contribuciones que se hicieron, antes y después de los citados científicos. La geometría analítica y el cálculo (diferencial e integral) fue el punto de partida de cambios fundamentales en la matemática pues ella se volvió capaz de resolver problemas nuevos que provenían del mundo físico. La humanidad entraba a la era de las máquinas; se construyeron máquinas y barcos de vapor, surgieron las locomotoras. El posterior desarrollo del cálculo permitió el surgimiento de las series y de las ecuaciones diferenciales, entre otras ramas del cálculo, lo que permitiría el desarrollo de la física-matemática.

Este período es particularmente muy rico en muchos talentos que impulsaron a la matemática a nuevos horizontes, tanto en aspectos teóricos como en las aplicaciones. La ciencia y la tecnología naciente han de motivar mas y mas investigaciones teóricas y también en el campo de las aplicaciones. El inicio de este período se ubica entre los siglos XVI y XVII, época en que se investiga a la matemática de las magnitudes variables. Las ciencias naturales condujeron a las ciencias exactas a mayores exigencias y retos; asi, las leyes generales de la naturaleza se estudian con nuevos modelos matemáticos. El éxito de la matemática pura de entonces, originaba muchas otras demandas en las aplicaciones. Por esa época surgieron algunas organizaciones científicas, como la Royal Society de Londres (1662); también se organiza la Academia de París (1666). Se fundan algunas Revistas sobre matemática.

Este período termina a mediados del siglo XIX, época en que se han de producir progresos esenciales que ampliaron la visión del mundo de la matemática. Se introdujeron muchas nuevas teorías; se clarificaron algunas inconsistencias existentes en el cálculo para de este modo surgir a la luz el análisis matemático. También en el álgebra y en la geometría han de surgir teorías revolucionarias. De alguna manera se estaba gestando un nuevo período que nos llevaría a nuevos universos matemáticos gracias al talento de muchos científicos.

- **La Matemática Contemporánea:** este es posiblemente el período mas difícil de precisar por la inmensidad de teorías nuevas, por la creación de nuevos métodos y nuevas ramas de la matemática. Hasta el siglo XIX podían haber genios matemáticos que conocieran bien la matemática de su época; ahora, siglos XX y XXI, ello es prácticamente imposible. El campo de las aplicaciones de la matemática es muy amplio en nuestros días; es casi todo el conocimiento humano. La era de las computadoras contribuye a que la información que obtengamos sobre las novedades nos abruma y tengamos que ser selectivos y puntuales en nuestros intereses matemáticos. Si bien esta etapa se inicia, mas o menos, a mitad del siglo XIX, no conocemos cuando termina; capaz ya estemos en un quinto período, el período de las computadoras, de las máquinas y robots. La matemática crece, día a día, al ritmo de esta era altamente científica y de especializada tecnología, y por ello, ahora mas que nunca, su conocimiento (al menos hasta ciertos niveles) es indispensable a todo profesional sensible a las actuales circunstancias y que aspire a ser lider en su campo profesional y de esta manera sobreviva dignamente en este siglo XXI que iniciamos.

Al inicio de este período se producen profundos cambios en el álgebra, en la geometría y en el naciente análisis matemático. Se introdujeron revolucionarias ideas que ampliaron al universo matemático de entonces; como se sabe estas ampliaciones no niegan las verdades matemáticas anteriores, desde la época de los Antigüos. Así, $2+2=4$ seguirá siendo cierto en el contexto de su formulación; la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo seguirá siendo igual a 180 (grados) mientras estemos en el universo de Euclides; lo que sucedió es que en universos mas generales, los matemáticos encontraron nuevas verdades adaptadas a tales universos. Esta relativización de la matemática, asi como entrar a dominios desconocidos (como lo hizo G. Cantor), produjo un fuerte impacto aún a reconocidos matemáticos.

### 1.1.2. La Matemática en la Pre-Historia.

Como es natural, exponer sobre lo habido sobre la matemática en la pre-historia es algo difícil; como se sabe, la información que se tiene sobre la matemática en la Antiguedad se debe, en gran parte, a descubrimientos arqueológicos, algunos producidos en los siglos XIX y XX. De esta manera, nuestro conocimiento sobre la evolución de la matemática en los tiempos remotos es un proceso que conforme se produzcan nuevos descubrimientos, iremos ampliando nuestro conocimiento de lo sucedido en los albores de la evolución de la humanidad. La tarea de los arqueólogos y de los historiadores de la matemática es reconstruir el pasado o la pre-historia de nuestra ciencia en base a piezas encontradas, muchas de ellas incompletas, escritas en un idioma antiguo y que están ilegibles. El gran problema, difícil problema, consiste en armar un todo en base a elementos muchas veces difíciles de interpretar.

¿Cómo conocer el legado matemático, si lo hubo por mas elemental que sea, del hombre de hace al menos cuarenta mil años?...

En esta etapa los historiadores de la ciencia se basan en conjeturas; la arqueología y la antropología son ciencias fundamentales en esta empresa.

¿Qué importancia tiene conocer lo que sucedió en la noche de los tiempos?...

Tabla de Cálculo del año 2004 A.C
Extraida de [MAN], pag 9

El hombre, como ser pensante, es inquieto en conocer a la naturaleza que lo rodea, aún en los mínimos detalles; conocer el pasado, por mas lejano que sea, es conocer mejor el presente y conocer el futuro vía extrapolación-aproximación. Conocer, de algún modo, como pensaba el hombre de las cavernas, el hombre que luchaba día a día su sobrevivencia, es algo fascinante porque es algo como si nos conociéramos asi mismos, en lo mas lejano de nuestra subconciencia.

En tal dirección se tiene una primera evidencia de un registro numérico en un hueso, el peroné de un babuino, que data de hace unos 35,000 años A.C. Este hueso fue encontrado en el Africa, en Swazilandia, y posee 29 marcas que se asemejan a un calendario de varillas. Otro hallazgo (también en Africa) es otro hueso con una antiguedad de 20,000 años A.C. en donde se sugiere las fases de la Luna; por razones prácticas, el cielo abierto era un gran reloj del tiempo para aquellos seres. Por esta época, la incipiente astronomía se mezclaba con aspectos religiosos y de astrología. Mas cerca, alrededor del año

3.500 A.C. ya existían escritos matemáticos de cierto nivel; por ejemplo, ello se produce entre los ríos Eufrates y el Tigris, en cuyas tierras florecen diversas culturas, cuyas ciudades mas importantes son Ur, Nínive y Babilonia.

Volviendo hacia atrás en el tiempo, es posible que hacia el año 40,000 A.C. (época del hombre de Neandertal) el hombre comenzara a pensar y a adquirir conciencia del mundo físico que lo rodea; se conjetura que por esta época surgen las dos primogenias ideas de la matemática: la **idea de número** y **la idea de relación espacial**. Esta conjetura se sustenta en el hecho de que actualmente existen tribus primitivas, que viven en la edad de piedra y que poseen un sistema de números muy limitado. La noción de número debe haber pasado por un proceso mental de muchísimos años; el hombre de las cavernas debe haber sentido la sensación de lo cuantitativo al ver una piedra y un montón de piedras, al observar a un hijo y a todos sus hijos; observaba (?) que solo había una sola Luna. En su evolución, el hombre seguramente tuvo curiosidad al ver que poseía dos manos, dos pies y dos ojos (noción de correspondencia biunívoca!) y que había algo en común en este sentimiento (?). El hombre de la Antiguedad aprendió, en algún momento, que la naturaleza de los objetos que cuenta no es lo importante, sino "ese algo" en común que poseen los conjuntos "dos manos", "dos pies", "dos ojos",... . Asi mismo, debe haber observado que el orden en que observa a los objetos tampoco influye en su resultado final; asi, el número de dedos en ambas manos es siempre 10, independiente del orden en que se cuente.

Conforme los pueblos primitivos fueron creciendo y evolucionando, nuevas necesidades surgían. Por ejemplo, ellos poseían rebaños con "muchos" animales, o poseían grandes extensiones de terreno de cultivo de donde cosechaban un "buen número" de frutas u otros alimentos. El saber la cantidad de objetos que poseían forzó la necesidad de tenerse un sistema de numeración, en realidad, diversos sistemas de numeración según las distintas comunidades, en diversas partes del mundo. El proceso natural para "contar" es a partir de un elemento, al cual se le agrega otro elemento; a éste, otro elemento, y asi sucesivamente, ¿hasta cuando?... esto es una pregunta complicada de responder pues ahí está el germen de la idea del infinito. Hay tribus primitivas que solo conocen hasta el número 4, 5 ó 6; si recurrimos a los dedos de las dos manos llegamos al número "10"; pero si se consideran, además, los dedos de los pies, se tuvo que considerar números "mayores" que 10.

Pareciera que la idea de número no es patrimonio del hombre; se han hecho experimentos que inducen que ciertos animales también tienen tal idea. A manera de ejemplo, de [COL], vol. I, pag. 13 extraemos la siguiente interesante historia:

"Se cuenta que un castellano había decidido matar una corneja que había fijado su domicilio en la torre de observación de su castillo. Lo había intentado varias veces, pero siempre, cuando el hombre se aproximaba, dejaba su nido y se dirigía a un árbol vecino fuera del alcance del fusil asesino. El castellano, decidido a terminar de una vez para siempre, optó por una artimaña. Una mañana se presentó en la torre con un amigo. Los dos hombres entraron y poco tiempo después salió sólo el castellano. La corneja esperó pacientemente la salida del segundo hombre. En los días que siguieron, la experiencia se repitió con tres e incluso con cuatro personas. Siempre al acecho, la corneja volvía a la torre una vez que había salido el último hombre. Por último, se enviaron cinco hombres; como en ocasiones anteriores, cuatro salieron de la torre, uno despues del otro, mientras que el quinto esperaba tranquilamente en el interior. Esta vez, la corneja, incapaz de distinguir entre cuatro y cinco, cayó en la trampa y volvió a su nido sin saber que el quinto hombre la aguardaba con el fusil apuntando a su nido. Es fácil adivinar la suerte que corrió la pobre corneja."

Similares experimentos se han hecho sobre la reacción del ave hembra cuando de su nido de huevos se retira un huevo, dos huevos,... . La leona que pone cuatro cachorros, por ejemplo, cuando los traslada de un lugar a otro, va y viene hasta llevar al último cachorro; ¿que sucederá si al regresar por su última cría, la leona no lo encuentra?

Un factor que distingue al hombre del resto de animales es su facultad de hablar, de poseer un lenguaje, lo que le permitió realizar las primeras primitivas abstracciones. Lentamente fueron surgiendo diversos símbolos para representar a los números. Esta evolución llevó miles de años; en la Antiguedad surgieron diversos sistemas de numeración, como sistemas en base 2, en base 3, en base 5,...; nuestro actual sistema es en base 10.

**La Geometría Primitiva.**

Como en el caso de la aritmética, visto anteriormente, el origen de la geometría se pierde en los tiempos remotos y por tanto es difícil precisarse fechas y acontecimientos. Se trabaja en base a conjeturas y a informaciones extraidas de otros campos, como por ejemplo, de la religión. En diversas pinturas y grabados encontradas en cavernas, se induce que los Antiguos conocían diversas figuras y técnicas de pintura.

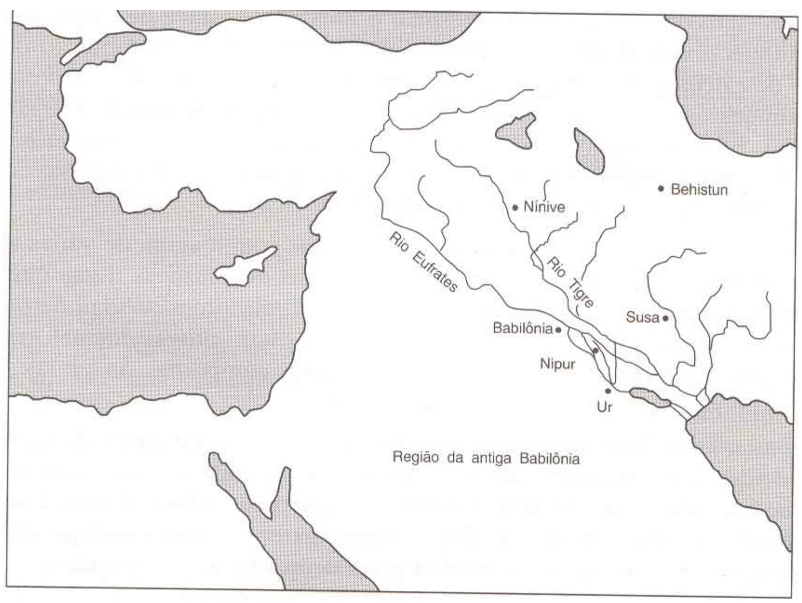
El historiador griego Herodoto sostenía que la geometría nació en el antiguo Egipto por razones prácticas al reconstruir periódicamente los lindes de las tierras luego de las inundaciones causadas por el río Nilo. En cambio, el pensador Aristóteles opinaba que el cultivo de la geometría se dió en Egipto gracias a la existencia de una clase sacerdotal ociosa. Pero, parece por las evidencias arqueológicas que la geometría es mas antigua que la cultura egipcia y de otras grandes culturas de la Antiguedad (babilónica, china, india, ...). Al menos en sus concepciones mas elementales, ya existían signos de un pensamiento geométrico en las antiquísimas comunidades humanas. Aún, se sostiene que el origen de la geometría y de la numeración están en relación con algunas prácticas rituales primitivas. Posiblemente, se conjetura, que las primeras cuestiones geométricas hayan surgido en la mente del hombre cuando su cerebro había evolucionado lo suficiente para lograr tal progreso mental. La observación de cosas simples y su habilidad lograda para reconocer las formas de las cosas que lo rodeaba, posiblemente hayan sido las primeras armas que tuvo el hombre para ir interpretando al mundo físico en que vivía. Este progreso, lento y que llevaría muchísimos siglos, era (posiblemente) algo subconciente.

No existen datos históricos que permitan conjeturar cuanto tiempo demandó al hombre para que se sienta capaz de llevar a la geometría a la condición de ciencia. Algunos historiadores de la matemática postulan que ello se produjo en el valle del Nilo en Egipto, pero también se acepta que tal condición se dió en los valles del Tigris y el Eufrates en Mesopotamia, en los de los ríos Indus y el Ganges del Asia sur-central, y del Hwang Ho y el Yangtze al este de Asia. Alrededores de las citadas cuencas se desarrollaron ciudades prósperas que alcanzaron niveles sociales, económicos y culturales que hicieron posible cultivar una matemática con fines utilitarios, con aplicaciones a la ingeniería (construcción de templos, puentes, ...) y a la contabilidad de lo que poseían. Asi va surgiendo una matemática mas organizada, en donde también existen ciertas significativas abstracciones o fórmulas matemáticas.

### 1.1.3. La Matemática Babilónica.

La civilización babilónica engloba un conjunto de pueblos que vivieron en Mesopotamia entre el 5,000 A.C. y los primeros tiempos del cristianismo. El conocimiento matemático babilónico procede de las excavaciones hechas a mediados del siglo XIX. Alrededor de 300 tablillas han sido identificadas como tablillas matemáticos, que contienen diversos problemas matemáticos y que pertenecen a diversos períodos de la historia de Babilonia; asi tenemos textos matemáticos que posiblemente datan de alrededor del 2100 A.C., otros de alrededor del 1600 A.C., y otros de antiguedad del 600 al 300 A.C. En estos textos se aprecia que los antiguos babilonios tenían un alto nivel de habilidad en el cálculo; su escala numérica fue en base 60. A ellos le debemos que 1 hora tenga 60 minutos.

Como hemos mencionado, el conocimiento que tenemos de la matemática en Babilonia, es relativamente reciente; en gran parte debemos tal conocimiento al trabajo de los arqueólogos quienes encontraron un promedio de medio millón de tablas-documentos; en Nipur se encontraron mas de 50,000 tablas. Toda esta valiosa información está distribuida en algunos museos europeos y la Universidad de Yale.




Como la información sobre las culturas antiguas provienen de excavaciones arqueológicas, la historia de la matemática en Babilonia no está cerrada; pueden surgir nuevas novedades sobre esta gran cultura oriental.

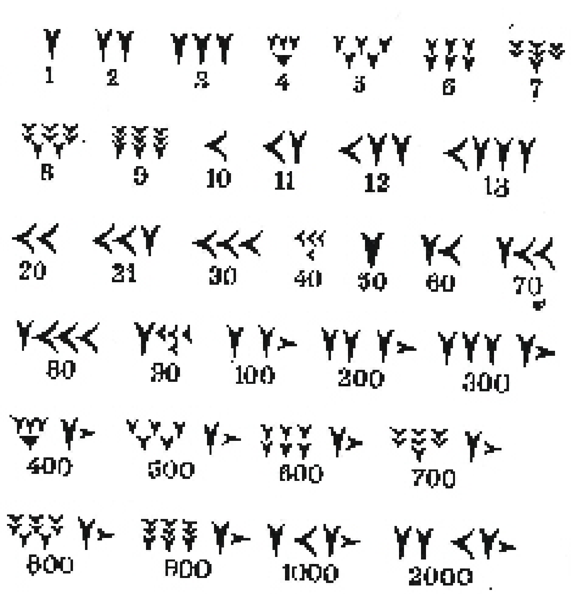
Veamos algunos aspectos de la matemática babilónica.

**Nota.** Debemos remarcar que con la palabra "matemática babilónica" nos referimos a la matemática cultivada en los pueblos existentes en el entorno de los ríos Tigris y Eufrates, conjunto que se llama la región de la antigua Babilonia.

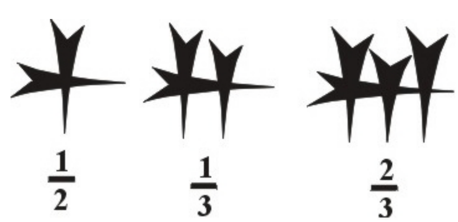
**Nota.** En el contexto de esta exposición, "tabla" es equivalente a "tablilla".

### (i) Sistema de Numeración.

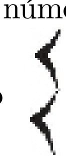
Las primeras formas de escritura aparecen hacia el tercer milenio A.C.; son símbolos estilizados para representar cosas. La figura adjunta exhibe una tabla de los números del 1 al 2000.

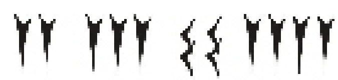



El mas alto desarrollo aritmético de los babilonios es el Akkadian, cuyos símbolos numéricos son muy similares a los de la anterior tabla. En su sistema numérico usaron la notación posicional y era ambiguo. Algunas fracciones tuvieron, en tal aritmética, símbolos especiales; asi, por ejemplo,

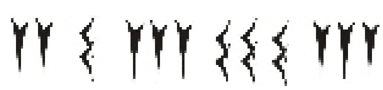


Para los babilonios estas fracciones era “el todo”, “el total” y no la división de la unidad en partes.

La información que se dispone sobre la aritmética mesopotámica provienen de una serie de tablillas que datan de los primeros siglos del segundo milenio A.C. y de los últimos siglos del primer milenio A.C. En tal período los babilonios hicieron contribuciones significativas a la numeración posicional, sin embargo, no conocieron al número cero, es decir, no tuvieron un simbolo para expresar al “espacio vacío”, lo que produjo ciertas ambiguedades en la representación de ciertos números. En vez del cero, los babilonios empleaban un espacio blanco (de cierta amplitud). Por ejemplo, los símbolos  pueden significar al número 11, al número 11,60, al número $11{,}60^2, \ldots$ Posteriormente, para el lugar del cero usaban al símbolo . Como ejemplo, veamos la siguiente representación en base 60,

$$7424_{(60)} = 2{,}60^2 + 3{,}60 + 44 =$$ 

Posteriormente (conquista de Alejandro Magno) tuvo la siguiente representación,

$$7424_{(60)} =$$ 

**La Raíz Cuadrada.** Es interesante mencionar que los babilonios estudiaron al número $\sqrt{2}$, lo que está en una tablilla de la época babilónica antigua. Tal número lo representaron en la forma . Los babilonios encontraron el valor aproximado de 1.414222 para $\sqrt{2}$. Ellos tuvieron buenas técnicas para lograr buenas aproximaciones. Veamos algunos detalles. Se desea calcular algunas aproximaciones para $\sqrt{b}$, donde $b$ es un número apropiado. Sea $x = \sqrt{b}$ la raíz buscada y sea $b_1$ una aproximación de esta raíz. Supongamos que $a_1$ es otra aproximación tal que $a_1 = \dfrac{b}{b_1}$. Si $b_1$ es demasiado pequeño, entonces $a_1$ es demasiado grande. Elegimos entonces la media aritmética $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Si $b_2$ es demasiado grande, entonces $a_2 = \dfrac{b}{b_2}$

será demasiado pequeño. Luego, será suficiente tomar la media aritmética $b_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$, y así sucesivamente...

De otro modo, sea $a_1$ el mayor entero menor que $\sqrt{b}$. Para $n = 1, 2, 3, ...$ se calcula $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{b}{a_n}\right)$ (método de **Herón**). De esta manera $a_1, a_2, a_3, ...$ es una sucesión de cada vez mejores aproximaciones de $\sqrt{b}$.

**Ejemplo.** *Calcular* $\sqrt{2}$
**Solución** (babilónica). Se procede de la siguiente forma

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2},$$

$$a_3 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{17}{2}, \qquad a_4 = \frac{\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}}{2} = \frac{577}{408},$$

$$a_5 = \frac{\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}}{2} = \frac{665,857}{470,832},$$

y asi sucesivamente. En una de las tablillas de la Universidad de Yale se lee:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}41423.$$

En la tablilla se aprecia un cuadrado de lado 30, y se da la diagonal $30\sqrt{2} = 30{,}1; 24, 51, 10 = 42; 25, 25$. De esto se deduce que los babilonios ya conocían al Teorema de Pitágoras.

Observemos que el ejemplo dado nos muestra que los babilonios fueron capaces de crear algoritmos nada triviales; el método exhibido tiene cierta profundidad considerando la época en que fue concebido. Es un algoritmo en que se usa el método iterativo. De tal idea se puede hallar un camino para calcular una aproximación, por ejemplo, de $\sqrt{a^2 + b}$. En efecto, la aproximación $a_1 = a$ conduce a $b_1 = \dfrac{a^2 + b}{a}$ y $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{a^2 + a^2 b}{2a} = a + \dfrac{b}{2a}$. Vemos que $a_1$ y $a_2$ concuerdan con los dos primeros términos del desarrollo de $(a^2 + b)^{\frac{1}{2}}$ (según el "algoritmo de Newton"). Estas aproximaciones aparecen en los textos de los antiguos babilonios. Asi,

$$(a^2+b)^{\frac{1}{2}} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Observemos que el sistema usado por los babilonios tiene dos símbolos fundamentales: la cuña , con el valor numérico 1, y el gancho , con el valor numérico 10. Repitiendo estos símbolos se pueden escribir otros números. Un número se escribe de izquierda a derecha, en la base 60, en la forma

$$N = a_0 60^0 + a_1 60^1 + a_2 60^2 + \ldots.$$

En cuanto a las operaciones con números, existían tablas de multiplicación; asi la siguiente figura nos ilustra la multiplicación por 9

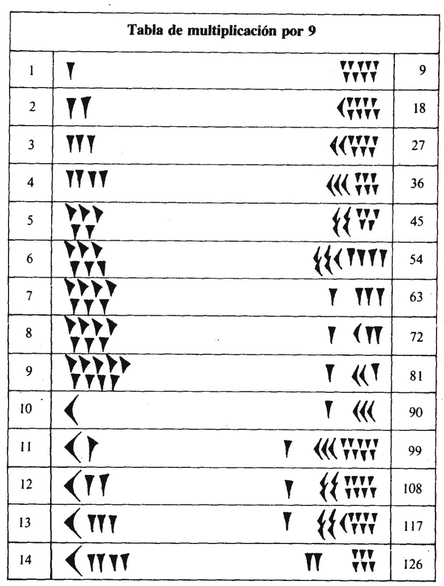


**Tabla de multiplicación por 9**

| | |
|---|---|
| 1 | 9 |
| 2 | 18 |
| 3 | 27 |
| 4 | 36 |
| 5 | 45 |
| 6 | 54 |
| 7 | 63 |
| 8 | 72 |
| 9 | 81 |
| 10 | 90 |
| 11 | 99 |
| 12 | 108 |
| 13 | 117 |
| 14 | 126 |

Los babilonios también tenían otras tablas numéricas, como la de los cuadrados de números enteros, de los cubos; tablas de raices cuadradas, tabla de números de la forma $n^3+n^2$; también consideraron cálculos sobre tanto por ciento, sobre división proporcional. Como observamos, los babilonios tenían una aritmética con aportes significativos.

### (ii) El Algebra Babilónica.

Los babilonios podían resolver ecuaciones lineales y cuadráticas (por completación del cuadrado o por substitución). Aún podían resolver complicados sistemas, como por ejemplo

$$\begin{cases} x^8 + x^6y^2 & = & (3{,}200,000)^2 \\ xy & = & 1,200 \end{cases}$$

Como es de suponer, los problemas algebraicos se enuncian y se resuelven sin los recursos notacionales de la era moderna. Veamos algunos casos concretos.

**Ejemplo 1. Problema.** *"Conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870".*

Esto equivale a resolver la ecuación $x^2 - x = 870$.

**Solución Babilónica.**

Trabajan en base 60. Toman la mitad de 1, que es 0;30. Luego realizan la multiplicación $(0;30)\,(0;30)$, que es $0;15$ (significa 0,15). Luego suman $(14;30 + 0;15) = 14;30;15$. Pero, $14;30;15$ es el cuadrado de $29;30$. Finalmente suman: $0;30$ y 29,30, lo que queda 30 como el lado del cuadrado. Esto coincide con la solución obtenida con los métodos actuales.

■

Muchos problemas contenidos en los textos babilónicos eran del tipo $x^3 + x^2 = b$, cuya solución se basaba en la utilización de una tabla, en la que se daban las combinaciones de la forma $n^3 + n^2$ para $1 < n < 30$. Por otro lado, los babilonios podían resolver sistemas de ecuaciones de varios tipos, con dos incógnitas, que incluían usualmente una ecuación lineal y una ecuación de segundo grado.

**Ejemplo 2.** *"He sumado el área de mis dos cuadrados, lo que me da* $21,15$ *y el lado de uno es mas pequeño que el lado del otro".*

**Solución.**

Los datos corresponden a las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 21,15 \tag{$\alpha$}$$

$$y = \frac{6}{7}\,x. \tag{$\beta$}$$

La substitución de $(\beta)$ en $(\alpha)$ da (en base 10),

$$x^2 + \frac{36}{49}\,x^2 = \frac{85}{4}.$$

De esta manera, $x^2 = \dfrac{49}{4}$ y $x = \dfrac{7}{2}$. [Se tiene $y = 3$ y $\dfrac{49}{4} + 9 = \dfrac{85}{4}$, que es $21, 15$ en la base 60].

■

**Nota.** Se ha encontrado un problema que contiene a las ecuaciones

$$xy = a, \qquad \frac{mx^2}{y} + \frac{ry^2}{x} + b = 0,$$

cuya solución lleva a una ecuación de sexto grado, cuadrática en $x^3$.

**Los Triples Pitagóricos.**

Los babilonios, mucho tiempo antes que Pitágoras, estudiaron los llamados "triples pitagóricos". Los enteros positivos $x, y, z$ donde $x$ e $y$ son menores que $z$, constituyen un **triple pitagórico** $(x, y, z)$ si: $x, y, z$ son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$.

En la **tablilla Plimpton** 322, los babilonios estuvieron interesados en cierta clase de triples pitagóricos. Asi, $(x, y, z)$ es llamado un "triple pitagórico" si longitud de $x = 2uv$, longitud de $y = u^2 - v^2$ y longitud de $z = u^2 + v^2$, donde $u$ y $v$ son enteros positivos relativamente primos, que tienen como únicos factores primos a $2, 3$ y $5$ (que son precisamente los divisores primos de 60, la escala babilónica). $u$ y $v$ se llaman los "**números generadores**". Observemos que se tiene

$$(2uv)^2 + \left(u^2 - v^2\right)^2 = \left(u^2 + v^2\right)^2 \tag{+}$$

De esta manera, $(56, 90, 106)$ es un triple pitagórico con generadores $u = 9$ y $v = 5$, en tanto que $(28, 45, 53)$ no es un triple pitagórico pues en este caso $u = 7$ y $v = 2$ aún cuando $u$ y $v$ satisfacen $(+)$.

**Ecuaciones Algebraicas.**

Los babilónicos tuvieron un buen conocimiento de la solución de diversas clases de ecuaciones, como son,

$$ax = b, \quad x^2 \pm ax = b; \quad x^3 = a, \quad x^2\,(x + 1) = a.$$

También conocieron sistemas de ecuaciones, como son

$$\begin{cases} x \pm y & = a \\ xy & = b \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x \pm y & = a \\ x^2 + y^2 & = b \end{cases} \text{, entre otras.}$$

Es útil saber que los babilonios ya tenían conocimiento de las fórmulas:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

y

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Neugebauer encontró en una tablilla (300 A.C.), de la época del imperio de Nabucodonosor, dos interesantes igualdades:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

y

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \left[1\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{2}{3}\right)\right] 55 = 385.$$

Estas igualdades nos motivan preguntarnos: ¿conocían los babilonios a las fórmulas

$$\sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}\ , \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{2n+1}{3}\ , \quad \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ?$$

Una respuesta afirmativa sería algo admirable en una matemática cultivada muchos siglos antes de Cristo.

Es oportuno remarcar que la tablilla (o tabla) Plimpton 322, ya mencionada anteriormente, es un documento de un gran valor histórico-matemático; ella está en la Universidad de Columbia, en la colección G.A. Plimpton. Ella fue escrita entre los años 1900 y 1600 A.C. aproximadamente y fueron descritas por los científicos Otto Neugebauer y A.J. Sachs en el año 1945.

**Ejemplo 3.** *"Multiplicando el largo por el ancho he obtenido un área de 600. He multiplicado por si misma la diferencia entre el largo y el ancho, y ese resultado multiplicado por 9 da una superficie equivalente al cuadrado del largo. ¿cuáles son el largo y el ancho?"*

**Solución babilónica.**

La raíz (cuadrada) de 9 es 3, toma 3 como el largo, entonces el ancho será 2. El producto de 3 por 2 es 6. Divide 600 por 6, obtendrás 100. La raíz de 100 es 10; como se tomó 3 para el largo, éste será 10 por 3, es decir 30, y por tanto el ancho será 20.

**Nota.** El lector puede resolver este problema con la notación moderna. Deberá resolver el sistema

$$\begin{cases} xy & = & 600 \\ 9\,(x-y)^2 & = & x^2 \end{cases},$$

y observará que el método usado por los babilonios es mas simple en cálculos numéricos, de algún modo, a lo que hacemos actualmente.

También se ha encontrado un problema que consiste en determinar dos números conociendo el producto de ellos y su diferencia. Asi, se tiene: "se conoce el área de un rectángulo ($= 375$) y se sabe que el lado menor es igual a 30 veces esa caña acortada de un codo (lo que significa, 5 unidades menos que el doble del otro lado). Calcular la longitud de la caña y de los lados". Actualmente este problema se resuelve por métodos conocidos; el proceso hecho en la tablilla no es muy claro. Sin embargo, todos estos problemas exhibidos, y muchos otros, nos muestra lo avanzado que estuvieron los babilonios en álgebra, cuyas reglas también lo relacionaban con problemas geométricos.

Como hemos mostrado anteriormente, los babilonios aprendieron a resolver sistemas de ecuaciones con varias variables; sabían resolver ecuaciones cuadráticas completas (lo que fue descubierto por Neugebauer en 1930); resolvieron también ciertas ecuaciones cúbicas, para lo que usaban la tabla de valores para números de la forma $n^3 + n^2,\ n = 1, 2, ..., 30$. Otra muestra de los hábiles que fueron los babilonios en álgebra es el hecho de que consideraron ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^2 = c$ y $ax^8 + bx^4 = c$, y aún mas, se dieron cuenta de que esas ecuaciones pueden ser consideradas, la primera como una ecuación cuadrática en $x^2$, y la segunda en $x^4$.

### (iii) Geometría Babilónica.

La geometría en Babilonia está aún en la etapa de un conjunto de reglas para efectuar medidas prácticas; asi, entre los años 2000 a 1600 A.C. ya les era familiar algunas reglas generales para calcular: el área de un rectángulo, de un triángulo rectángulo, de un triángulo isósceles; el área de un trapezoide teniendo un lado perpendicular a los lados paralelos; el volumen de un paralelepípedo rectángular, el volumen de un prisma recto con base trapezoidal.

Sabían que la circunferencia de un círculo era tres veces su diámetro; el área del circulo lo calculaban con la fórmula $A = \dfrac{c^2}{12}$, donde $c$ es la longitud de la circunferencia, y de donde se obtiene la "tosca" aproximación $\pi = 3$. Mas recientemente se ha descubierto una tablilla con una mejor aproximación, $\pi = 3\dfrac{1}{8}$. Los babilonios sabían que el volumen de un cilindro circular recto era el producto del área de la base por su altura; incorrectamente determinaban el volumen de un cono truncado multiplicando la altura por la semi-suma de las áreas de las bases.

En aquella época, los babilónicos sabían que los lados correspondientes de dos triángulos rectángulos similares, son proporcionales; conocían que la perpendicular bajada del vértice de un triángulo isósceles, bisecta a la base. Conocían también el teorema (¿Tales?): "el ángulo inscrito en un semicírculo, es recto". Como hemos mencionado, conocían al teorema de Pitágoras. Al respecto, en 1945, Neugebauer y Saks publican un trabajo en que descifran una tablilla en donde aparecen enumerados los triángulos rectángulos con lados racionales, es decir, los triples de números pitagóricos $x^2+y^2=z^2$. La reconstrucción del método de la elección de estos triples parecen conducir a las fórmulas, ya mencionadas,

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = u^2 + v^2.$$

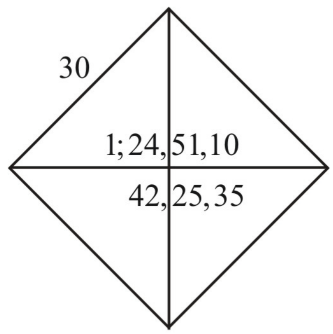
El citado trabajo está relacionado a la tablilla Plimpton 322 ya mencionada anteriormente.

En relación a los triples de números pitagóricos, la tabla de Plimpton permite construir triples pitagóricos. Asi, (ver [EVE], pag 65) tenemos,

| $x$ | $y$ | $z$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 119 | 169 | 12 | 5 |
| 3456 | 3367 | 4825 | 64 | 27 |
| 4800 | 4601 | 6649 | 75 | 32 |
| 13500 | 12709 | 18541 | 125 | 54 |
| 72 | 65 | 97 | 9 | 4 |
| 360 | 319 | 481 | 20 | 9 |
| 2700 | 2291 | 3541 | 54 | 25 |
| 960 | 799 | 1249 | 32 | 15 |
| ... | ... | ... | ... | ... |

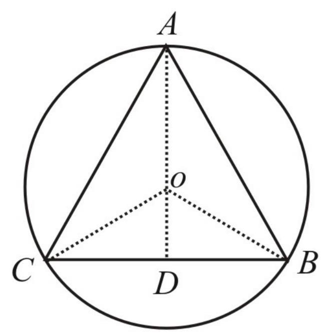
En general, la geometría babilónica aún no alcanza el nivel de una ciencia organizada (lo que se alcanzaría en Grecia, varios siglos después); ella está orientada a medir figuras planas (motivadas por necesidades prácticas); algunas pocas mediciones tratan sobre sólidos. La información sobre la matemática babilónica provienen fundamentalmente de cuatro tablillas: la de Yale, la de Plimpton 322, la de Susa y de la tablilla de Tell Dhibayi. En la tablilla de Yale existe un cuadrado como se muestra en la figura adjunta. El número 1;24,51,10 convertido al sistema decimal es 1.414212963, que es aproximadamente $\sqrt{2}$. En tanto el número 42,25,35 es obtenido vía la multiplicación

$30\,(1;24,51,10)$, es decir, la diagonal de un cuadrado de lado 30 es hallado multiplicando 30 por una aproximación de $\sqrt{2}$.




Tablilla de Yale

En la tablilla Susa existe un problema sobre un triángulo isósceles con lados 50,50 y 60. El **problema** consiste en encontrar el radio de una circunferencia que pase por los tres vértices.




Tablilla de Susa

Veamos la solución usando la metodología actual. Sea el $\Delta ABC$ y la circunferencia circunscrita de centro $O$. Sea $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. En el triángulo rectángulo $ABD$, por el teorema de Pitágoras, tenemos $AD^2 = AB^2 - BD^2$, de donde $AD = 40$. Sea $r$ el radio de la circunferencia. Asi, $AO = OB = r$ y $OD = 40 - r$. También, en el $\Delta OBD$ se tiene $r^2 = OD^2 + DB^2$, es decir, $r^2 = (40 - r)^2 + 30^2$, de donde $80r = 2500$. Asi $r = 31{,}25$ ($r = 31;15$ en el sistema sexagesimal).

■

Según Eves, [EVE], la geometría babilónica se caracteriza por su caracter algebraico; los problemas geométricos son llevados al lenguaje algebraico, muchas veces de un modo no-trivial. Asi, por ejemplo, en una tablilla de Yale ($\pm$1600 A.C.) se discute los volumenes de troncos de pirámides a los cuales se les asocia el sistema

$$z\left(x^2+y^2\right)=A, \quad z=ay+b, \quad x=c,$$

de donde surge una ecuación cúbica general, ecuación no trivial de resolver.

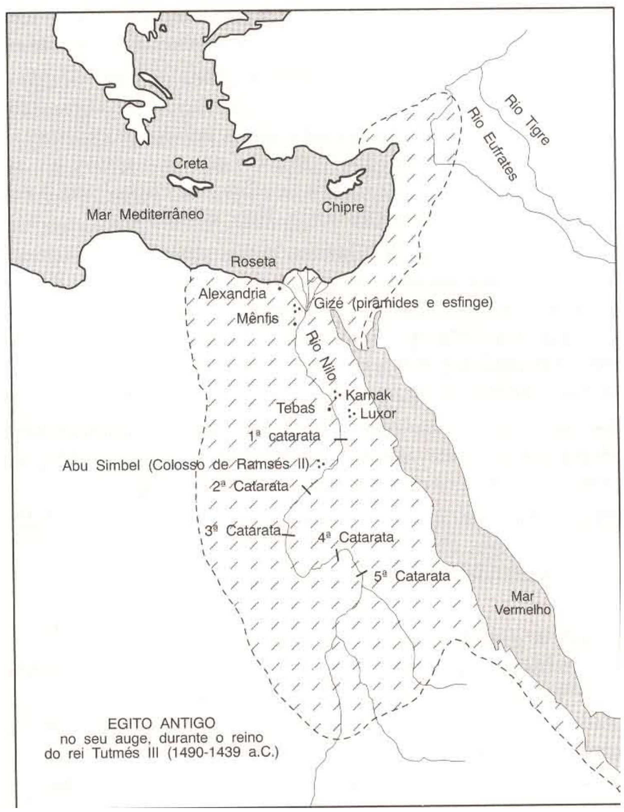
Debemos, también, a los babilonios la división de la circunferencia en 360 partes iguales; esto fue posiblemente influenciado por el progreso de la astronomía en la Antigua Babilonia.

## 1.1.4. La Matemática en el Antiguo Egipto.

### (i) Algunos Datos.

Los antiguos egiptos tuvieron el sentimiento de que la matemática provenía de una fuente divina. Las informaciones que se tienen sobre esta antiquísima cultura, en particular de su matemática, son obtenidas de un conjunto de tablillas y de ciertos restos arqueológicos. Esta civilización surge, posiblemente, de la unión de pequeñas comunidades que fueron evolucionando y dieron origen a dos reinos, el Alto y el Bajo Egipto. Esto se produce en el período promedio entre los años 10,000 y 7,500; el escenario es la región del río Nilo. Los griegos creyeron que la matemática se originó en el lejano Egipto; Aristóteles pensó que tal surgimiento se debió a los sacerdotes pues ellos eran una clase que disponía del tiempo necesario para pensar en matemática. Herodoto predicaba que la geometría apareció en Egipto como consecuencia de los continuos desbordes del río Nilo. Ellos pensaron que los matemáticos eran descendientes de un reino divino.

La matemática egipcia la conocemos gracias a dos tablillas muy importantes




(entre otras) que son: el papiro de Rhind (±1650 A.C.) y el papiro de Moscú (±1850 A.C.). Ubiquemos a estas tablillas dentro del siguiente panorama tiempo-espacio (ver [EVE], pag. 67, para otros detalles).

- 3100 **A.C.** De esta época es un cetro real egipcio (que está en el museo de Oxford) en donde se aprecian algunos grabados de números muy grandes (algunos llegan a las centenas de millar) y que posiblemente tengan que ver con el número de soldados que disponían los egipcios en una guerra.

- 2600 **A.C.** Por esta época se construye la Gran Pirámide de Gizé, lo que significa el empleo de ideas matemáticas y de ingeniería en tal colosal construcción, la que contiene mas de dos millones de bloques de piedras y fue realizada por unos cien mil trabajadores durante treinta años.

- 1850 **A.C.** A esta época pertenece el **papiro de Moscú**, un texto matemático que contiene 25 problemas que ya eran antiguos cuando fueron escritos; estamos en la época de Abraham. En 1893 este papiro fue adquirido en Egipto por el coleccionista ruso Golenischev y ahora se encuentra en el Museo de Bellas Artes de Moscú. Entre tales problemas, el problema 10 contiene el primer ejemplo sobre la determinación del área de una superficie curva (se calcula el área de la superficie lateral de un semicilindro de altura igual al diámetro de la base). En el problema 14 se calcula correctamente el volumen de la pirámide truncada de base cuadrada. Posteriormente veremos este y otros problemas. A esta época también corresponde el mas antiguo instrumento astronómico que existe.

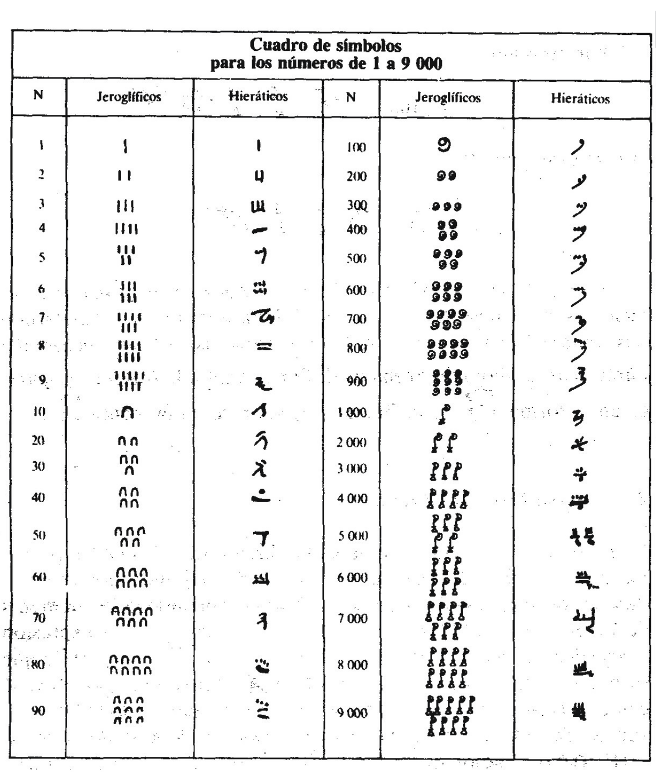
- 1650 **A.C.** Por esta época se escribió el **papiro de Rhind** (llamado asi pues el papiro fue comprado en 1858 en Luxor por el abogado Henry Rhind) cuyo autor es el escriba Ahmés; fue hallado en Tebas en 1855. Este papiro es una colección de 84 problemas en donde se realizan operaciones con fracciones; se calculan las áreas del rectángulo, del triángulo, del trapecio y del círculo (establecieron que esta área es $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, $d$ es el diámetro, y que corresponde a la aproximación $\pi = 3{,}1605...$). Asi mismo, en este papiro se encuentran los volúmenes del paralelepípedo, del cilindro; se calculan las dimensiones de la pirámide. Contiene también problemas sobre división proporcional; en la solución de un problema se encuentra la suma de una progresión geométrica. El papiro de Rhind fue publicado en 1927. Remarcamos que su autor expresó que este papiro es una copia de un texto mas antiguo (entre 2000-1800 A.C.).

- 1350 **A.C.** El papiro de Rollin fue elaborado por esta época y contiene numeraciones sobre alimentos; se muestra la utilidad práctica de algunos números grandes.

- 1167 **A.C.** Corresponde a la época en que fue escrito el papiro de Harris; en donde se exhiben ejemplos de numeraciones prácticas.

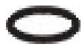
### (ii) Sistemas de Numeración y Aritmética.

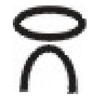
En el antiguo Egipto existieron, al menos, dos sistemas de numeración: el sistema **jeroglífico** y el sistema **hierático**. El siguiente cuadro (ver [COL], vol. I) nos muestra los números del 1 al 9000 en ambos sistemas de numeración.

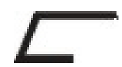


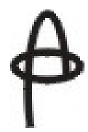

El sistema jeroglífico es un sistema de base diez y que permite escribir cualquier número, en donde los símbolos se pueden repetir de ser necesario.

El símbolo

 se usó para representar fracciones con numerador 1.

Asi, $\frac{1}{6}$ se escribe  $\frac{1}{10}$ en la forma  , ...

$\frac{1}{2}$ se escribe en la forma  ó también  ;

$\frac{2}{3}$ en la forma 

El sistema hierático o sagrado (pues lo utilizaban los sacerdotes) es también un sistema decimal pero el principio de repetición del sistema jeroglífico es reemplazado con la introducción de algunos signos especiales. Asi, 36 en el sistema jeroglífico se escribe  , en tanto en el sistema hierático en la forma  . En este sistema  es substituido por $\bullet$. Asi, $\frac{1}{8}$ se escribe en el sistema jeroglífico en la forma  , en tanto que en el hierático en la forma $\underset{\bullet}{=}$ .

En cuanto a la aritmética, los egipcios tenían la habilidad de multiplicar y dividir por 2; asi mismo, calculaban los dos tercios de cualquier número, ya sea entero o fraccionario. La multiplicación de dos enteros se efectúa mediante operaciones sucesivas de desdoblamiento, lo que depende de que cualquier número se puede expresar como una suma de potencias de 2. Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** *Calcular* $24 \times 37$.

**Solución.** $24 = 16 + 8$ : Ahora calculamos múltiplos de 37, en la forma

$$\begin{array}{cc}
1 & 37 \\
2 & 74 \\
4 & 148 \\
8 & 296 \\
16 & 592 \\
\hline
24 & 888
\end{array}$$

Conclusión: $24 \times 37 = 888$.

$\blacksquare$

**Ejemplo 2.** *Calcular* $847 \div 33$.
**Solución.** Como en el ejemplo 1,

$$\begin{array}{cc}
1 & 33 \\
2 & 66 \\
4 & 132 \\
8 & 264 \\
16 & 528 \\
\hline
25 & 825
\end{array}$$

Lo hecho motiva la descomposición:

$$\begin{aligned}
847 &= 528 + 319 = 528 + 264 + 55 \\
&= 528 + 264 + 33 + 22.
\end{aligned}$$

Luego, $847 \div 33$ da como cociente 25 y como residuo, 22.

$\blacksquare$

**Ejemplo 3.** *Verificar que* $\dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{4}$.
**Solución.**

$$\begin{aligned}
\frac{3}{10} &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{2}{10} = \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{10}\right) \\
&= \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20} + \frac{4}{20}\right) = \frac{1}{20} + \frac{5}{20} = \frac{1}{20} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ahmes observó que:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} &= \frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{1}{15}+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\right)\\ &= \frac{1}{15}+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

De un modo general, respecto al ejemplo 3, en el papiro de Ahmés (Rhind) se encuentra una tabla de descomposiciones de fracciones de la forma $\frac{2}{2n+1}$, con $n < 50$, en una suma de fracciones con numerador 1. Asi, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}; \quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}; \quad \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}; \quad \frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30};\\ \frac{2}{29} &= \frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}; \quad \frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}\\ \frac{2}{97} &= \frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}; \quad \frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}; \ldots\end{aligned}$$

Respecto a las anteriores descomposiciones y considerando factores primos en los denominadores, se tiene de un modo equivalente:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}; \quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 5}; \quad \frac{2}{13}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2\times 13}+\frac{1}{2^3\times 13};\\ \frac{2}{15} &= \frac{2}{3\times 5}=\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{2\times 3\times 5};\\ \frac{2}{29} &= \frac{1}{2^3\times 3}+\frac{1}{2\times 29}+\frac{1}{2\times 3\times 29}+\frac{1}{2^3\times 29};\\ \frac{2}{89} &= \frac{1}{2^2\times 3\times 5}+\frac{1}{2^2\times 89}+\frac{1}{2\times 3\times 89}+\frac{1}{2\times 5\times 89};\\ \frac{2}{97} &= \frac{1}{2^3\times 7}+\frac{1}{7\times 97}+\frac{1}{2^3\times 97};\\ \frac{2}{99} &= \frac{2}{3^2\times 11}=\frac{1}{2\times 3\times 11}+\frac{1}{2\times 3^2\times 11}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.** *Verificar que* $\frac{5}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{13}$

**Solución.**

$$\begin{aligned} \frac{5}{13} &= \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{1}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} + \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} + \frac{1}{13} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{13}. \end{aligned}$$

■

En el papiro de Rhind existe un problema que nos da la regla para calcular los dos tercios de cualquier fracción unitaria impar (significa que el denominador es impar). Concretamente, "calcular los $\frac{2}{3}$ de una fracción impar". ≪ Si se te dice: "Qué es $\frac{2}{3}$ de? Haces 2 veces el denominador, y 6 veces su denominador; $\frac{2}{3}$ de la fracción, es esto ≫

**Ejemplo 5.** *Calcular los* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{3}$.

**Solución.** Aplicando la anterior regla, tenemos $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \quad \left(= \frac{2}{9}\right)$. ■

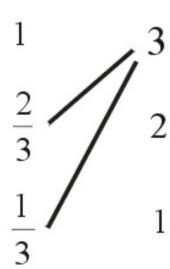
**Ejemplo 6.** *Hallar los* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{8}$.

**Solución.** $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.

■

**Ejemplo 7.** *Hallar* $\frac{1}{3}$ *de* 3.

**Solución.** El autor del papiro calcula primero los $\frac{2}{3}$ de 3, luego calcula $\frac{1}{3}$ de 3 para obtener el resultado. Si 1 es el "todo", se tiene el esquema



Luego, $\dfrac{1}{3}$ de $3 = 1$.

■

**Ejemplo 8.** *Hallar* $\dfrac{1}{3}$ *de* $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$.
**Solución.** Según la regla dada en el ejemplo 7, tenemos en este caso

$$\begin{array}{ll}
1 & 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \\[2ex]
\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} + \left[\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{18}\right] + \dfrac{1}{6} \\[2ex]
 & \dfrac{2}{3} + \left[\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}\right] + \dfrac{1}{18} \\[2ex]
 & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{18} \\[2ex]
 & 1 + \dfrac{1}{18} \\[2ex]
\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{36}
\end{array}$$

Luego, $\dfrac{1}{3}$ de $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{36}$.

■

**Ejemplo 9.** *Hallar* $\dfrac{2}{3}$ *de* $16 + \dfrac{1}{56} + \dfrac{1}{679} + \dfrac{1}{776}$.
**Solución.** En el papiro, la solución consta sólo de dos líneas,

$$\begin{array}{ll}
1 & 16 + \dfrac{1}{56} + \dfrac{1}{679} + \dfrac{1}{776} \\[2ex]
\dfrac{2}{3} & 10 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{84} + \dfrac{1}{1358} + \dfrac{1}{4074} + \dfrac{1}{1164}.
\end{array}$$

■

Para comprender mejor las operaciones efectuadas, y de un modo general, se tiene la:

**Regla de la fracción** $\frac{2}{3}$ ([COL], vol. I). ≪Los dos tercios de cualquier fracción impar (o par) es igual a 2 veces el denominador de la fracción mas 6 veces el denominador de la fracción≫ .

De esta regla se obtiene la: **Regla de la fracción** $\frac{1}{3}$. ≪El tercio de cualquier fracción impar (o par) es igual a 4 veces el denominador de la fracción mas 12 veces el denominador de la fracción≫ .

**Nota.** Los egipcios empleaban fracciones con numeradores unitarios, con excepción $\frac{2}{3}$; pero sabían que $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. La fracción $\frac{2}{3}$, en escritura jeroglífica se representa con  , y en escritura hierática con  .

Los egipcios elaboraron una tabla para números de la forma $\frac{2}{n}$, con $n$ impar y $n = 3, 5, ..., 101$. Según Collette ([COL], vol. I, pag. 51), R.J. Gillings (en 1972) opina que los escribas egipcios posiblemente tuvieron las siguientes reglas respecto al problema (no fácil) de reducir las fracciones $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, ..., \frac{2}{101}$ a partir de reglas conocidas en relación con $\frac{2}{3}$. Se tiene,

≪ 1. De todas las igualdades posibles, se aceptan aquellas que poseen el menor número de fracciones, pero ninguna fracción debe tener un denominador mayor que 1000.

2. Se prefiere una igualdad de dos términos a una de tres, y una igualdad de tres términos a una de cuatro; de mas de cuatro términos es inadmisible.

3. Las fracciones unitarias se colocan por orden decreciente sin que se repitan nunca.

4. La primera fracción es la menor posible, pero se aceptará una fracción ligeramente superior si esto permite reducir considerablemente la última fracción.

5. Las fracciones pares se prefieren, en general, a las impares.≫

**Ejemplo 10.** *Expresar* $2 \div 45$.

**Solución.** Según Collete, $\frac{2}{45}$ tiene siete descomposiciones con dos términos; ciento treinta y cuatro tienen tres términos, y mil ochocientos veinte y seis tienen cuatro términos. Por el precepto 2, se prefiere a las descomposiciones con dos términos que son:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{24}+\frac{1}{360},\qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{25}+\frac{1}{225},\qquad \text{(iii)}\ \frac{1}{27}+\frac{1}{125},\qquad \text{(iv)}\ \frac{1}{30}+\frac{1}{90},$$

$$\text{(v)}\ \frac{1}{35}+\frac{1}{63},\qquad \text{(vi)}\ \frac{1}{36}+\frac{1}{60},\qquad \text{(vii)}\ \frac{1}{45}+\frac{1}{45}.$$

En base a los cinco preceptos dados, se hace el siguiente descarte. Se eliminan (ii), (iii), (v) y (vii) pues contienen números impares en los denominadores. Descartamos (i) por tener 360 en el denominador. Ahora, ¿cuál elegir, (iv) o (vi)?... El escriba elige (iv), ¿cuál fue su argumento?...

Conclusión: $2 \div 45 = \frac{1}{30} + \frac{1}{90}$.

■

**Ejemplo 11.** *Determinar* $2 \div 49$.

**Solución.** $\frac{2}{49} = \frac{2}{7}.\frac{1}{7}$. Según Ahmés,

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} &= \frac{1}{7}+\frac{1}{7} = \frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7} = \frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}\\ &= \frac{1}{28}+\left(\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{28}+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Luego,

$$2 \div 49 = \left(\frac{1}{28}+\frac{1}{4}\right).\frac{1}{7} = \frac{1}{196}+\frac{1}{28} = \frac{1}{28}+\frac{1}{196}.$$

■

Veamos algunos ejemplos que nos ilustran como multiplicaban y dividían los egiptos con fracciones unitarias. (Ver [COL], vol. I).

**Ejemplo 12.** Calcular el producto $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}+\frac{1}{14}$.

**Solución.** Discutamos el siguiente esquema

$$
\begin{array}{ll}
1 & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{14} \\[2ex]
\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28} \\[2ex]
\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{56} \\
\hline
1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{56}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8} \\[2ex]
 & =\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1.
\end{array}
$$

Luego, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=1.$

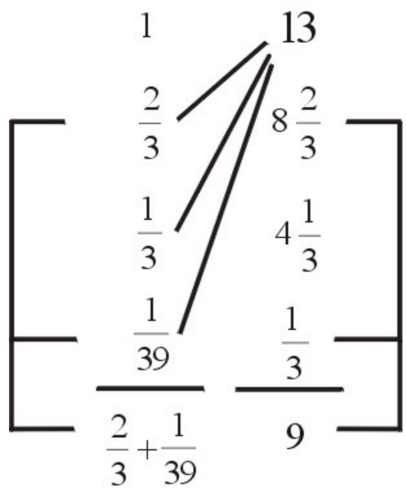
■

**Nota.** El escriba conocía que:

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}=\frac{1}{8}.$$

**Ejemplo 13.** *Calcular la división* $9\div 13$. *(Ver ejemplo 1).*

**Solución.** En la división, el método de desdoblamiento se invierte; es el divisor el que debe ser doblado sucesivamente. Asi tenemos el esquema




De esta manera
$$9 \div 13 = \frac{2}{3} + \frac{1}{39}.$$

■

**Nota.** Diversos problemas encontrados en el papiro de Ahmes nos indica que los egipcios conocían, de algún modo, la "regla de tres".

## (iii) Algebra en Egipto.

Muchos de los 110 problemas contenidos en los papiros de Rhind y de Moscú son de carácter práctico, relacionados a la vida cotidiana. Ellos generalmente se resuelven vía la aritmética o utilizando ecuaciones lineales de la forma
$$x + ax = b, \quad x + ax + cx = b.$$
A la incógnita "$x$" la llamaban ≪aha≫ ó ≪h≫. Existen problemas de proporcionalidad, de regla de tres, de repartición proporcional; existen cuestiones que llevan a progresiones aritméticas y geométricas. En diversos casos se usa el método de la "falsa posición".

**Ejemplo 1.** *Resolver* $x + \dfrac{x}{5} = 30.$
**Solución.**

Se asume $x = 5$; luego, $x + \dfrac{x}{5} = 6$. Desde que $(5)(6) = 30$, el valor correcto de $x$ fue encontrado multiplicando $(5)(5) = 25$. Asi, $x = 25$.

■

**Ejemplo 2. [Una progresión aritmética].** *Distribuir 100 hogazas de pan entre 5 personas de manera que* $\dfrac{1}{7}$ *del total de las tres primeras sea igual al total de las dos últimas. ¿Cuál es la diferencia?*
**Solución.** Sean las personas $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ y $P_5$. Por hipótesis

$$\frac{1}{7}(P_1 + P_2 + P_3) = P_4 + P_5.$$

Supongamos que $P_1$ tenga 1 hogaza de pan, y sea $5\frac{1}{2}$ la diferencia (o razón aritmética). Entonces tendremos

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 6\frac{1}{2} & 12 & 17\frac{1}{2} & 23 \end{array}.$$

En este caso, la suma de las hogazas de pan es 60. Quisiéramos que la suma sea 100. Falta 40 panes, que es los $\dfrac{2}{3}$ de 60. Entonces, a cada término de la anterior distribución agregémosle sus $\dfrac{2}{3}$. Se tendrá,

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \dfrac{5}{3} & \dfrac{65}{6} & 20 & \dfrac{175}{6} & \dfrac{115}{3} \end{array}$$

La suma de estas cantidades es 100, como se desea.

■

**Nota.** Observemos que Ahmés usa la "regla de falsa suposición" en la solución del problema del ejemplo 2; asi, él escoge la diferencia común $d = \left(5\ \dfrac{1}{2}\right)$ y realiza un argumento aritmético.

En el papiro de Ahmés (Rhind) existen problemas que implican variables desconocidas, comparables a las actuales ecuaciones lineales con una incógnita. Las soluciones de tales problemas eran mas aritméticas que algebraicas, como hemos visto en los anteriores ejemplos 1 y 2; los problemas eran establecidos verbalmente y las soluciones se obtenían sin explicación alguna; aún no existía un método general. Por ejemplo, el problema 31 en el citado papiro dice: "Una cantidad, sus $\frac{2}{3}$, su $\frac{1}{2}$, su $\frac{1}{7}$, su todo, es 33". En nuestro actual lenguaje algebraico esto se traduce con la ecuación

$$\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} + x = 33.$$

Los egipcios usan argumentos aritméticos para resolver esta ecuación.

El problema 63, en el mismo papiro, contiene la siguiente cuestión: "distribuir 700 panes entre cuatro personas, $\frac{2}{3}$ para una, $\frac{1}{2}$ para la segunda, $\frac{1}{3}$ para la tercera y $\frac{1}{4}$ para la cuarta".

En nuestro lenguaje tenemos

$$\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 700.$$

Históricamente, Ahmés procede como sigue. "Agrege $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; esto da, $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Divida 1 por $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$; esto da, $\frac{1}{2}\frac{1}{14}$. Ahora encuentre $\frac{1}{2}\frac{1}{14}$ de 700. Esto da 400".

Los egipcios solo consideraron ecuaciones de segundo grado del tipo simple, $ax^2 = b$, aún cuando también existen sistemas de la forma $x^2 + y^2 = 100$, $y = \frac{3}{4}x$, pero al eliminar la variable $y$ se reduce al tipo anterior.

Como hemos observado, el álgebra en Egipto no empleó casi símbolo alguno, al menos como concebimos al álgebra actualmente. La adición la representaron con el símbolo  y la substracción con .

La raíz cuadrada se denotaba con .

Un ejemplo que actualmente conduce a un sistema de grado superior a 1 surge de la cuestión: "descomponer una figura cuya área es de 100 unidades, en dos cuadrados cuyos lados están en la razón 1 a $\frac{3}{4}$". La solución egipcia de este problema usa el método de falsa posición al admitir que los cuadrados tienen lados de longitudes 1 y $\frac{3}{4}$; en este caso su suma es $\frac{25}{16}$, que es a su vez cuadrado de $\frac{5}{4}$ (acá usan el signo ). Como el lado del cuadrado suma debe ser 10, es decir, 8 veces mayor que $\frac{5}{4}$, se obtiene la solución final (?) (en esta parte el papiro está mutilado): $8 \cdot 1 = 8 \quad \text{y} \quad 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

■

A esta altura puede surgir la pregunta: ¿existió el álgebra en el antiguo Egipto?; pero, ¿qué es el álgebra? Sobre estas y otras cuestiones se ha debatido en el siglo XX. Posiblemente, en el contexto actual, si hubo álgebra en Egipto ella estaba aún en su estado inicial.

### (iv) La Geometría Egipcia.

Muchos de los problemas contenidos en los papiros de Moscú y de Rhind conciernen a la geometría; hay 26 problemas geométricos, los que hacen referencia a fórmulas de medición y que son necesarias para evaluar áreas de figuras planas, asi como ciertos volúmenes. El área del triángulo isósceles se obtiene multiplicando la mitad de la base por la altura. Sabían calcular el volumen de cilindros y prismas. El área del círculo lo calculaban con la fórmula $\left(\frac{8}{9}\text{ diámetro}\right)^2$.

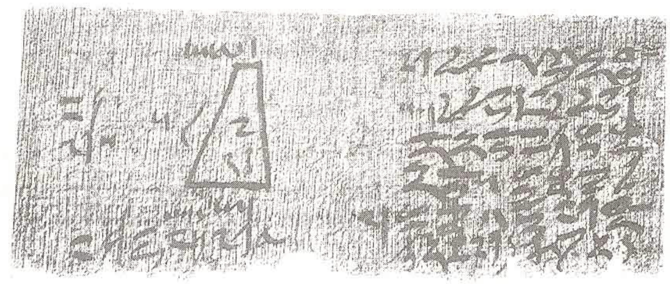
El estudio de la Gran Pirámide nos lleva a muchas conclusiones sobre la geometría en Egipto. El área de un cuadrilátero arbitrario, con lados sucesivos de longitudes $a, b, c$ y $d$ lo determinaban con la fórmula incorrecta

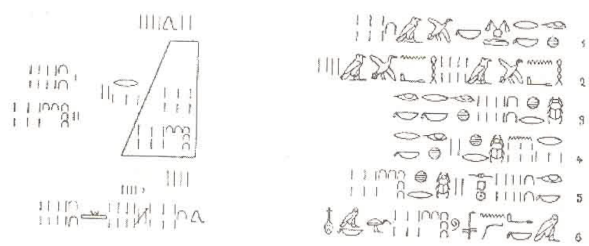
$$A = \frac{(a+c)\,(b+d)}{4}.$$

Los egipcios conocían y usaban la regla: "la razón entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que entre el área del cuadrado circunscrito al círculo y su perímetro".

En el papiro de Moscú existe un interesante resultado geométrico, que es el siguiente

**Problema 14.** [2600 A.C.] "Calcular el volumen de la pirámide truncada, de base cuadrada con lado $a$, con cuadrado superior de lado $b$, y altura $h$".





**Solución.** Los egipcios usaron la fórmula

$$V = \frac{h\left(a^2 + ab + b^2\right)}{3}.$$

¿Cómo obtuvieron los egipcios tal fórmula? ... Por otro lado, si $b = 0$ se obtiene el volumen de la pirámide completa.

En relación al problema 14 y a la fórmula mencionada ahí, se tiene la sentencia:

"Si se os dice: una pirámide truncada de $h = 6$ y de base 4 y 2; debeis tomar el cuadrado de 4 que es 16, después doblar 4 para obtener 8, tomar el cuadrado de 2 que es 4, sumar 16, 8 y 4 para obtener 28; calcular $\frac{1}{3}$ de 6 que es 2, multiplicar 28 por 2, que da 56".

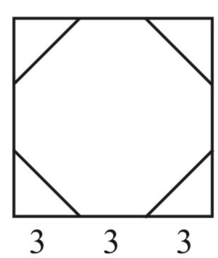
Lo dicho describe nítidamente a la fórmula

$$V = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Esta fórmula es genuina en la matemática egipcia; no dieron su demostración y es curioso pensar que en ella está la idea del cálculo integral; tal resultado es un caso de extraordinaria inducción; por algo la citada fórmula está relacionada a la "gran pirámide egipcia". Es oportuno remarcar que la matemática egipcia, y la de los babilonios, **no** es empírica del todo aún cuando tampoco es una matemática organizada en demostraciones; habrá que esperar unos siglos para que llegue a este nivel. Existe una gran extensión y diversidad en los problemas que se estudiaron con éxito, a pesar de su cierto grado de empirismo. Es sorprendente que con métodos empíricos se puedan descubrir resultados matemáticos de gran valor formal.

La mayoría de los problemas geométricos encontrados en los papiros de Rhind y de Moscú están relacionados con medidas para calcular áreas de terrenos y volúmenes de graneros. Algunas investigaciones revelan que los egipcios posiblemente conocían que el área de un triángulo es dado por la mitad del producto de la base por la altura. Aún se vislumbra la idea de la cotangente cuando tratan al ángulo diedro entre la base y la cara de la pirámide. No hay evidencia de que los egiptos hubieran conocido al teorema de Pitágoras pero de que si conocían que cuando los lados de un triángulo miden $3, 4$ y $5$ entonces se trata de un triángulo rectángulo, lo que conocían muy bien los babilonios.

Respecto al "misterioso" número $\pi$, se tiene el siguiente argumento. Sea un cuadrado cuyo lado mide 9 unidades. Se construye un octógono de modo que el área de cada uno de los triángulos isósceles de las esquinas es $4\frac{1}{2}$. Asi, el área del cuadrado es 81 y área del octógono=área del cuadrado-suma de las áreas de los citados triángulos$= 81 - 18 = 63$.




Consideremos ahora el área del círculo inscrito en el cuadrado dado. Se observa que el área del octógono difiere poco del área del círculo. Luego, (considerando $r = \dfrac{9}{2}$) $\pi r^2 \simeq 63$, esto es, $\dfrac{81}{4}\pi \simeq 63$, de donde $\pi = 3\frac{1}{9}$ $(\simeq 3{,}111...)$.

Dos figuras dibujadas en las paredes de una habitación, donde se encuentra la tumba de Seti I, son similares pero de distintos tamaños lo que nos induce a pensar que los egipcios tuvieron alguna idea sobre la proporcionalidad y la semejanza entre figuras geométricas. Por otro lado, no existe mucha información sobre las propiedades geométricas de las pirámides de base cuadrada.

Como hemos visto sabían calcular el volumen de una pirámide, y también la pendiente de los lados. Usaron la palabra "seqt" para expresar la razón entre la base horizontal y la altura en una pirámide. Los egipcios calcularon los "seqts" de diversas pirámides rectas. El valor de la "seqt" era un dato importante para los constructores de pirámides.

**COMENTARIOS 1.1.**

1. El conocer la historia de la evolución de las ideas matemáticas, desde los tiempos remotos es algo que enriquece al pensamiento moderno. Estamos en una época que busca conocer el pasado con la ayuda de nuevas tecnologías; por ejemplo, se está investigando sobre la vida de los dinosaurios en base a nuevos descubrimientos arqueológicos; posiblemente esto deba ayudar a comprender la evolución de la vida en nuestro planeta. De igual modo, el descubrimiento de nuevos posibles documentos matemáticos de la Antiguedad va a contribuir a conocer mejor la evolución de nuestra ciencia, con proyecciones a los tiempos mas modernos.

   Un objetivo de la Historia de la Matemática es enriquecer y motivar la visión que tengamos sobre como nacieron las diferentes teorías existentes, desde las mas primitivas, luego las empíricas y finalmente como una ciencia formal, en donde el rigor del pensamiento es una de sus características. Es sorprendente que antes de la Era Cristiana ya existiera una matemática con las características básicas de la matemática contemporánea. Debemos ser concientes de esa realidad histórica y debe ser parte de la cultura de toda persona amante de la matemática.

   En aquellos lejanos tiempos se usaba el rigor lógico del pensamiento, complementado de una belleza intrínseca en donde también existen diversas aplicaciones, muy ingeniosas y que contribuyeron a conocer mejor al mundo físico.

2. Un hecho característico de las antiguas culturas es que ellas estaban ligadas a grandes ríos, y en general al mar Mediterráneo. Esto fue esencial para las comunicaciones entre las diferentes comunidades de entonces, y por tanto para intercambiar las culturas existentes. Posiblemente el conocimiento matemático de Babilonia y de Egipto fue exportado a

otros pueblos, y que muchos interesados viajaran a tales lugares en busca del conocimiento matemático.

3. Los números primos, ya conocidos en la Antiguedad, fueron parte de la matemática antigua. Asi, los egipcios posiblemente conocían que $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$, y de esto se deduce que conocían $\frac{4}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{40}$ y $\frac{4}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60}$. La idea general es expresar $\frac{a}{b}$ como una suma de fracciones unitarias; para ello es suficiente examinar el caso cuando $b$ es un número primo (solo divisible por la unidad y el mismo). Los primeros números primos son: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...$ Los antiguos conocieron a estos números, inclusive se conjetura de que sabían diferenciar entre un número primo y un número compuesto. Como veremos en la proxima sección, los griegos fueron capaces de probar que el número de (números) primos es infinito.

4. Es interesante observar, a través de los documentos históricos encontrados, el esfuerzo del hombre por encontrar símbolos apropiados para representar la idea de cantidad, la idea de número. Los símbolos usados por las distintas culturas (de las que solo hemos visto dos, la babilónica y la egipcia) evolucionaron en el tiempo hasta llegar a la forma actual de representar a los números. Es oportuno mencionar que los antiguos peruanos, a través de los **quipus**, tuvieron su propia forma de representar a los números; llegaron a números muy grandes.

5. En otra oportunidad presentaremos a otras antiquísimas culturas, como son la China y la India. La matemática le debe significativos aportes hechos por los matemáticos de tales culturas, a las cuales hay que agregar a la matemática cultivada en el antiguo Japón. Un estudio integral de la matemática cultivada en estas tres regiones es algo atrayente por la riqueza de ideas y resultados que manejaron, y que (creemos) son pocos conocidos en nuestro pais, y posiblemente en otros paises vecinos. También hay que mencionar a la matemática arábiga; los árabes hicieron notables contribuciones, en particular al álgebra; además, a ellos les debemos mucho de la información que se tiene de la matemática antigua.

6. Respecto a la matemática babilónica existen algunas tablillas (de Yale), de alrededor 1600 A.C., en donde se encuentran diversos problemas no-

resueltos, que implican ecuaciones simultáneas y que llevan a ecuaciones bi-cuadráticas. Algunas son,

$$\begin{aligned} xy &= 600, \qquad 150\,(x-y)-(x+y)^2=-1000; \\ xy &= a, \qquad \frac{bx^2}{y}+\frac{cy^2}{x}+d=0. \end{aligned}$$

7. Existen ciertas evidencias de que los babilonios llegaron a conocer algunas fórmulas notables. Ya hemos planteado la interrogante si ellos conocieron las fórmulas,

$$\sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right)\sum_{j=1}^{n} j.$$

   Ciertas investigaciones (de Neugebauer) llevan a la conclusión de que los babilonios habrían conocido a la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

   para varios valores de $n$.

8. ([EVE]). Remarcamos el carácter algebraico de los problemas geométricos en la antigua Babilonia. En una tablilla, de mas o menos 1800 A.C., se encuentra el siguiente problema: "un área $A$, que consiste de la suma de dos cuadrados, es 1000. El lado de uno de los cuadrados es 10 menos de que los $\frac{2}{3}$ del lado del otro cuadrado. ¿Cuáles son los lados del cuadrado?".

   Otro problema afirma: "un trapecio isósceles de bases 14 y 50, y de lados 30 tiene área 12.48". Es interesante indagar por la fórmula que estaban usando.

   Aún, los antiguos babilonios nos dicen: "un cateto de un triángulo rectángulo es 50. Una paralela al otro cateto y a una distancia 20 de ella, corta al triángulo formando un trapecio rectángulo de área 5,20. Determine las longitudes de las bases del trapecio".

9. ([EVE]). En el papiro de Rhind se encuentran los siguientes problemas:

   (*a*) "Si le preguntan lo que es $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$, tome el doble y el séxtuple; eso es $\frac{2}{3}$ de él. Se debe proceder asi para cualquier otra fracción".

   (*b*) "Una cantidad, sus $\frac{2}{3}$, su $\frac{1}{2}$ y su $\frac{1}{7}$, sumados, valen 33. ¿Cuál es la cantidad?".

**EJERCICIOS 1.1.**

**1.** Reflexione sobre las siguientes situaciones hipotéticas.

   (a) ¿La matemática surge con la aparición del hombre?, ¿pueden haber situaciones matemáticas sin el hombre?

   (b) Supongamos que aún no surge el hombre en la Tierra; por azar dos delgadas ramas se cruzan al caer al suelo, ¿existe ahí, ya, la idea de ángulo?, la propiedad que dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes, ¿ya existía?, ¿es cuestión que la mente humana la extraiga para que recien tenga "vida" esa propiedad?

   (c) En un planeta de un lejano sistema planetario existe cierto tipo de vida inteligente; esos seres al ver la redondez de su "sol", ¿qué sensación geométrica podrían tener?; si dos palos se cruzan, ¿qué podrían inducir?. La matemática, ¿es patrimonio de la mente del hombre?; y si la Tierra evolucionara de modo que surja otro tipo de vida, superior a la inteligencia del hombre, ¿cómo sería la matemática que surja de estos nuevos seres?

2. Mencione algunas evidencias ambientales o de experiencias locales que puedan haber sugerido o motivado algunas ideas matemáticas al hombre de la pre-historia.

3. ¿Cuáles serían sus comentarios respecto a los símbolos usados por los babilonios y los egipcios para representar a los números?; ¿cuál de ellos, usted considera mejor?

4. ¿Existe alguna correspondencia entre el nivel cultural de una comunidad humana y el nivel de la matemática que poseen?

5. Vía la lectura de otros textos (ver Bibliografía), redacte un breve informe sobre los períodos que tiene la Historia de la Matemática según Kolmogórov.

6. ¿Cuál es su opinión sobre la conjetura de que ciertos animales tienen alguna idea de número?; ¿tiene usted algunas evidencias de ello?

7. ¿Porqué se tiene poca información sobre la matemática en la prehistoria?

8. Redacte un estudio crítico sobre la matemática en Babilonia y en Egipto.

9. Vía su intuición, ¿cuáles serían las primeras figuras geométricas, tanto planas como sólidos, que surgieron en la mente del hombre en sus inicios como ser pensante?.

10 ¿Cuáles podrían ser las motivaciones para el surgimiento de la geometría empírica? Según su criterio, ¿habría alguna mas importante que las otras?

11. Mencione algunos resultados matemáticos conocidos en la Antiguedad y que según opinión sean importantes, tanto en su contenido teórico como de sus aplicaciones.

12. En relación al ejercicio 10, ¿qué significa etimológicamente la palabra "geometría"?; ¿tiene tal palabra alguna relación con el surgimiento de la geometría?

13. La astronomía es una ciencia que desde sus orígenes estuvo relacionada con la matemática. Vía la consulta de otros libros, redacte una breve evolución de la astronomía en la Antiguedad.

14. Usando la tabla numérica de los babilonios, escriba los números:

$$14, \;\; 25, \;\; 62, \;\; 86, \;\; 401 \;\; \text{y} \;\; 920$$

15. Según los egipcios,

    (a) calcule $26 \times 3 \quad \text{y} \quad 753 \div 26$;

(b) resuelva $x + \frac{x}{7} = 24$;

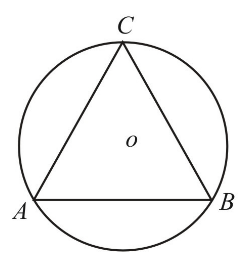
(c) calcule: $424 \times 137$ y $1043 \div 28$;

(d) exprese $\frac{2}{103}$ como una suma de fracciones unitarias.

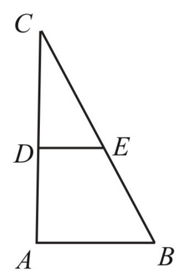
16. Interprete y resuelva, al estilo egipcio: "Una dada superficie de 100 unidades de área será representada como la suma de dos cuadrados cuyos lados están en la relación $1 : \frac{3}{4}$".

17. [Babilonia].

(a) (1,800 A.C.) Encontrar el radio $x$ de la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles $ABC$ sabiendo que $AB = 60$ y que $AC = BC = 50$. (Los babilonios ya conocían al "Teorema de Pitágoras").




(b)




Según una tablilla, se sabe que $AB = 30$, área de $ABED-$área de $DEC = 420$, y que $CD - DA = 20$. Calcular $DE$, $CD$ y $DA$.

18. (Egipto)

(a) En el papiro de Rhind repetidamente el área de un círculo es tomada igual a la de un cuadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ del diámetro. ¿A qué valor de $\pi$ lleva tal argumento?

(b) Pruebe que de todos los triángulos que tienen un par de lados dados, el mayor es aquel en que esos lados son perpendiculares.

(c) Denote las longitudes de los lados $AB$, $BC$, $CD$ y $DA$ de un cuadrilátero por $a$, $b$, $c$ y $d$, y sea $K$ el área del cuadrilátero. Pruebe que

$$K \leq \frac{ad + bc}{2}.$$

La igualdad vale si y solo si los ángulos $A$ y $C$ son rectos.

19. (a)Una tabla babilónica da los valores de $n^3 + n^2$ para $n = 1, 2, ..., 30$. Haga tal tabla para $n = 1, 2, ..., 10$.

(b) Encuentre, por medio de la anterior tabla, una raíz de la ecuación cúbica

$$x^3 + 2x^2 - 3136 = 0.$$

(c) Un problema babilónico cuya data es aproximadamente de 1800 A.C. parece pedir una solución del sistema de ecuaciones $xyz + xy = \frac{7}{6}$, $y = \frac{2}{3}x$, $z = 12x$. Resuelva este sistema usando la tabla de (a).

20. (Egipto)Resolver el sistema de ecuaciones $x^2 + y^2 = 100$, $y = \frac{3}{4}x$.

21. Obtenga la fórmula egipcia para el volumen del tronco de pirámide cuadrada, de una manera algebraica, a partir de la conocida fórmula del volumen de una pirámide utilizando proporciones que se demuestran en geometría elemental.

¿Piensa usted que los egipcios pudieron haber obtenido su fórmula de esta manera? Redacte sus argumentos.

22. Explique porqué los egipcios prefirieron la descomposición $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ a la descomposición $\frac{2}{15} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$.

23. Considera usted que los egipcios conocieron la fórmula para calcular el área del círculo. ¿Porqué?

24. Pruebe que si $n$ es un múltiplo de 3, entonces $\frac{2}{n}$ puede descomponerse en suma de dos fracciones unitarias, una de las cuales es la mitad de $\frac{1}{n}$.

25. (Babilonia antigua)El área de dos cuadrados juntos es 1000 y el lado de uno de ellos es 10 unidades menos que los $\frac{2}{3}$ del lado del otro. Calcular los lados de los dos cuadrados.

26. Recordemos que en la tabla Plimpton 322 (ver (iii) Geometría Babilónica para la tabla respectiva) los egipcios exhibieron un buen número de triples pitagóricos. Comprobar que los parámetros $u = 9$ y $v = 4$ llevan a los valores de la línea 5 en la mencionada tabla.

27. (Egipto) Comprobar las igualdades:

    (a) $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$;

    (b) $\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$;

    (c) $\frac{2}{57} = \frac{1}{38} + \frac{1}{114}$.

28. (Egipto) Calcular:

    (a) $121 \div 16$;

    (b) $2 \div 51$;

    (c) $12 \div 13$.

29. (Egipto) Efectuar:

    (a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{16}$;

    (b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

30. Si $m$ es un entero positivo, pruebe que $\dfrac{4}{4m+3}$ puede ser escrito como la suma de tres distintas fracciones unitarias. (Egipto).

31. Use el método babilónico para calcular las cinco primeras aproximaciones de $\sqrt{3}$.

32. Redacte un breve estudio comparativo sobre la matemática en Babilonia y en Egipto, remarcando las analogías y las diferencias que usted encuentre. (Sugerencia: leer algunos textos que aparecen en la bibliografía; por ejemplo, [BOY], [COL] vol. I, [EVE], entre otros.)

33. (Papiro de Moscú). Resolver:

    (a) El área de un rectángulo es 12, y el ancho es $\dfrac{3}{4}$ del largo, ¿cuáles son las dimensiones?

    (b) Un cateto de un triángulo rectángulo es $2\frac{1}{2}$ veces el otro, el área es 20, ¿cuáles son las dimensiones?.

## 1.2. MATEMATICA GRIEGA.

### 1.2.1. Surgimiento de la Cultura Griega. Tales de Mileto.

Luego de las culturas Egipcias y Babilónica, el poder de los Persas cedió el paso a un nuevo pueblo, los **Griegos**, quienes vinieron del Asia y se establecieron en la Hélade y en las costas e islas del mar Egeo. Este pueblo evolucionó extraordinariamente y formaron una civilización que iluminó a la humanidad por varios siglos, y de alguna manera, su influencia es reconocida en los tiempos actuales. Estamos entre los sigos XII, VII, VI antes de Cristo; luego de algunas guerras, las civilizaciones caldea, egipcia, y en general el antiguo oriente, dieron origen a una fusión que constituyó la ci-vilización griega. Las mas grandes personalidades de la ciencia helénica se nutrieron del conocimiento de las legendarias cunas del Oriente, en parti-cular de Egipto, a donde fueron a estudiar diversas áreas del conocimiento; en particular, de la matemática aprendieron la geometría y la aritmética, asi como los conocimientos astronómicos que los egipcios habían acumulado por siglos.


En el siglo VII A.C., Mileto era una de las mas florecientes ciudades jónicas de la Antigua Grecia. En esta ciudad nació la matemática griega. Otras ciudades que tuvieron también gran desarrollo fueron: Samos, Chios, Fócea, Téos, Rodes, Egina, entre otros. Los Helenos se informaron, a través de los egipcios, de la historia de los mas remotos tiempos, lo que seguramente fue una valiosa documentación en sus propios desarrollos. Entre los historiadores helénicos se destaca Herodoto (484 - 425 A.C.). El período promedio de tres siglos, desde el nacimiento de la matemática griega en Mileto hasta el surgimiento de Euclides ($\pm$30 A.C.) es lo que se conoce como el "Período de la Matemática Pre-Euclideana". De esta Escuela Jónica, el primer matemático griego fue Tales de Mileto.

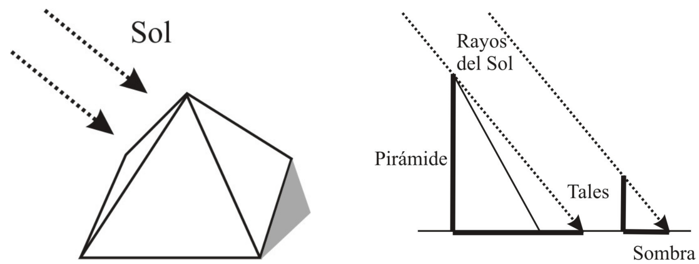
**Tales de Mileto (¿640-550? A.C.).**

Debemos a Eudemo, un discípulo de Aristóteles, la historia mas antigua de la matemática griega (siglo IV A.C.); su obra se perdió pero la conocemos por un escrito de Proclo en el siglo VI D.C. En ella se cita a Tales de Mileto como el fundador de la geometría griega. Los datos sobre las fechas de su nacimiento y muerte son un tanto inciertos; las fechas dadas arriba son aproximaciones asumidas por diferentes autores. Tales en sus inicios fue un sagaz negociante y un buen político; estando en Egipto estudia geometría y astronomía; al regresar a Mileto, luego de un tiempo, se dedica exclusivamente a la astronomía, a la matemática y a las reflexiones filosóficas.

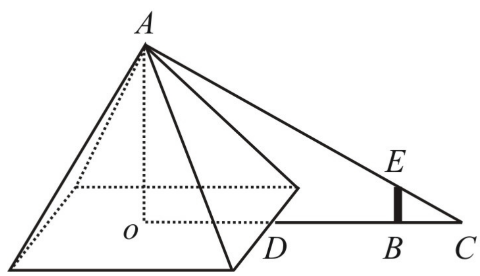
Aristóteles identificó a Tales como el primer pensador y fundador de la filosofía natural; fue un científico con un pensamiento universal pues hizo aportes esenciales a la filosofía, historia, ciencia, ingeniería, astronomía, geografía y sobre todo a la matemática. Fue un audaz pensador que se adelantó a su tiempo. Su vida de sabio está adornada de diversas anécdotas. Tales funda la mas antigua escuela filosófica, la Escuela Jónica, y llega a ser famoso en el mundo heleno sobre todo por su predicción de un eclipse de Sol, el que ocurrió aproximadamente el 28 de Mayo de 585 A.C. Se debe a Tales el traslado de la geometría egipcia a Grecia y del desarrollo de esta disciplina como una ciencia. Según Proclo, Laercio y Plutarco, se atribuye a Tales el descubrimiento y la demostración de algunas proposiciones aisladas sobre paralelas, triángulos y propiedades de la circunferencia. Posiblemente sea la primera vez en la historia de la matemática en que dan demostraciones rigurosas de los enunciados matemáticos.

**Su obra Matemática.**

Recordemos que los antiguos egipcios desarrollaron una habilidad práctica para medir las tierras luego de las inundaciones del Nilo; este fenómeno físico fue descrito por Herodoto. Muchísimos años después, Tales en sus viajes al viejo Egipto heredó y aplicó muchas de esas reglas prácticas a las que él puso su genio e ingenio para obtener nuevos resultados, los mismos que los demostró con un rigor matemático digno de admiración en la actualidad. Por ello Tales es considerado el primer matemático de la historia de nuestra ciencia.




Estando en Egipto, Tales calculó la altura de la pirámide de Keops vía una ingeniosa idea de semejanza de triángulos; aprovechó la sombra que la pirámide producía en un determinado momento, aquel en que la longitud de la sombra sea igual a la de la pirámide; en este momento los rayos del Sol tienen una inclinación de 45°.




Mas explicitamente, Tales conocía la longitud $BE$; esperó el momento en que la longitud de la sombra $BC$ de $BE$ fuera igual a la longitud de $BE$. En ese instante la longitud de $AO$, la longitud de la altura de la pirámide, es igual a la longitud de $OC$, que es conocida pues la parte $OD$ se puede medir externamente y la parte $DC$ es medible. Se afirma que el Rey Amasis quedó maravillado de la genialidad de este científico que ordenó el mayor de los respetos a Tales por parte de la corte.

Por los trabajos históricos de Proclo, se atribuye a Tales los siguientes resultados geométricos:

**(a).** **"Los triángulos equiángulos tienen sus lados proporcionales"** (Euclides VI.4); este teorema lo aplicó Tales para determinar la altura de la pirámide de Keops conociendo las dimensiones de su sombra, aunque existen dudas de que Tales conociera el llamado precisamente "Teorema de Tales".

**(b). "El ángulo inscrito en una semi-circunferencia es un ángulo recto"** (Euclides III.31); este resultado es considerado como el mas notable de sus trabajos geométricos. Asi, Tales sería el primer matemático en inscribir un triángulo rectángulo en una semi-circunferencia. Aristóteles quedó intrigado por este resultado; en uno de sus trabajos se preguntó: ¿porqué el ángulo en una semi-circunferencia siempre es un ángulo recto?

**(c). "Cuando dos rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales"** (Euclides I.15). Proclo manifiesta que Eudemo atribuye a Tales el descubrimiento de este resultado pero fue Euclides el primero en demostrarlo.

**(d). "Si un triángulo tiene dos ángulos iguales a dos ángulos de otro triángulo, y un lado de uno igual a un lado del otro, entonces tendrán también iguales los otros dos lados que se corresponden, asi como también el tercer ángulo"** (Euclides I.26). Según Eudemo, Tales habría empleado este resultado para determinar la posición de un navío en el mar.

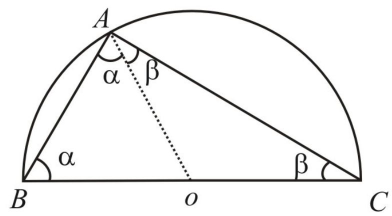
**(e). "El diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales"**.

**(f). "Son iguales entre si los ángulos de la base de cualquier triángulo isósceles"** (Euclides I.5).

**(g). "La suma de los ángulos en un triángulo es igual a dos ángulos rectos"**.

En base a lo conocido por Tales, la demostración de **(b)** sería hecha en la forma siguiente. Según el gráfico tenemos que $\triangle AOB$ es isósceles, luego

$\measuredangle ABO = \measuredangle BAO \equiv \alpha$; similarmente, $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA \equiv \beta$.




Por tanto en el triángulo $ABC$ se tiene:

$$2 \text{ ángulos rectos } = \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2\,(\alpha + \beta)\,,$$

de donde,

$$\text{un ángulo recto } = \alpha + \beta = \measuredangle BAC.$$

■

Tales fue uno de los primeros filósofos que razonó con una mentalidad matemática; usaba la razón. ¿De qué está hecho el universo?; según él, la tierra estaba sobre el agua.

Afirmó que "todo es agua"; asi su punto de vista es que el agua era el elemento básico de la realidad física, el principio de todas las cosas. Posiblemente esta afirmación la heredó de su conocimiento sobre la mitología oriental o capaz, según otros historiadores, por su aguda observación de su entorno físico. Tales fue un filósofo que explicaba las cosas vía un razonamiento lógico; él no recurre a argumentos religiosos ni de la mitología. Los fenómenos físicos tienen una causa física (el agua, según él). Fue un constante viajero por el mundo de entonces, algunas veces como comerciante, otras por motivos de estudios. Estos viajes dieron a Tales mucha visión para elaborar sus propias concepciones. Por su sabiduría fue considerado miembro de los legendarios Siete Hombres Sabios. Como tal, fue un hombre distraido y se le atribuye algunas anécdotas, de las que citamos dos.

- Sus contemporáneos le criticaron que siendo un hombre inteligente no haya ganado mucho dinero. Tales, molesto por estas críticas se propuso hacerse rico haciendo uso de su razón; consiguió controlar el precio de la aceituna en el momento adecuado y de esta manera tuvo el control de la cosecha obteniendo una buena ganancia en una sola cosecha. Habiendo demostrado que si podía ganar dinero con su talento, dejó los negocios para dedicarse a la matemática y a sus reflexiones filosóficas.

- Cierta noche vagaba por el campo, sumido en sus pensamientos astronómicos, y al andar no se dió cuenta de un charco de agua, al que cayó. Una anciana al acudir en su ayuda, al reconocerlo le dijo: "entonces tu quieres hablar sobre las estrellas y no sabes lo que pasa bajo tus pies".

Como hemos mencionado, con Tales se inicia una Escuela filosófica y una manera razonada de estudiar a la matemática; si bien las obras atribuidas a él, algunos dudan de su veracidad, es con los griegos de su época que se inicia un período glorioso de investigación científica, en donde Tales debe haber tenido una contribución importante. Sus alumnos, sin embargo, no se ocuparon de la matemática pura, mas si a las aplicaciones, a la física y a la astronomía; esto perduró hasta cerca del año 400 A.C. Entre sus sucesores mencionemos a Mamerco (un notable geómetra), a Anaximandro (611-545 A.C.), a Anaxímenes (540-480 A.C.), quien consideraba al aire como el principio de las cosas. Para Anaximandro lo era la materia.

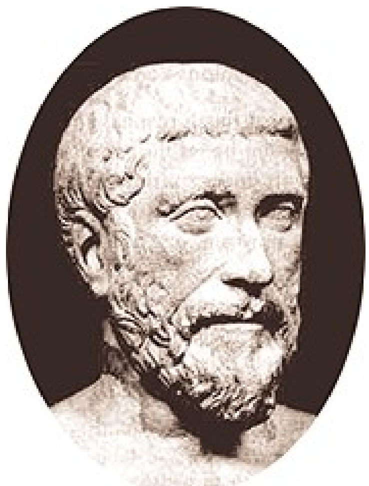
En la isla de Samos surgiría un personaje que, junto con su Escuela, contribuiría al engrandecimiento del pensamiento matemático y filosófico de los griegos. Su nombre es, Pitágoras.

### 1.2.2. Pitágoras y su Escuela.

**(i) Aspectos Generales.**

La figura de Pitágoras se confunde entre la realidad y lo mítico; es considerado un semidios. Sobre su personalidad y su obra se ha escrito mucho; sabemos de ello por los escritos de Herodoto en el siglo V A.C., de Diógenes Laercio y Porfirio en el siglo III A.C., entre otros. Nació en la isla de Samos, muy cerca a Mileto. El año de su nacimiento no está bien definido, asi, Eratóstenes señala al año 600 A.C., en tanto que Aristoxeno al año 570 A.C. Su padre fue un rico comerciante que posiblemente brindaría a su hijo las condiciones favorables para el estudio. Se afirma que Pitágoras viajó por el mundo de entonces; estuvo en Egipto, en Fenicia y en Babilonia, en donde bebería los conocimientos de tan celebradas civilizaciones. Regresa a Samos en donde estuvo un tiempo, para luego viajar al sur de Italia.

Se afirma que Pitágoras visitó a Tales en Mileto, algo que seguramente influyó mucho en su vocación y producción matemática. Sus viajes al oriente, en especial a Egipto y a Babilonia, debe haber sido de mucho estímulo en la madurez de su pensamiento filosófico-matemático. Estando en la Magna Grecia, al sur de Italia, mas concretamente en Crotona funda una secta de carácter místico y religioso. Los integrantes de esta agrupación vivían juntos y seguían estrictas reglas de vida. Pitágoras, se afirma, ofreció grandes discursos en Crotona que encerraban recomendaciones morales sobre la conducta del hombre y que entusiasmó a los pobladores no solo de Crotona si no de Italia en general despertando una gran admiración por el afamado filósofo.



En la Escuela de Pitágoras, una especie de academia, se estudiaba filosofía, matemáticas y ciencias naturales.

Dada la complejidad de muchos de los temas que se estudiaban, hubo una división en dos clases de miembros: los matemáticos (que eran los conocedores) y los acusmáticos (que eran los oidores). A los primeros, Pitágoras les revelaba los conocimientos científicos que poseía, y los segundos participaban de las creencias y de los conocimientos, sin que tengan que conocer profundamente los temas que enseñaba el maestro.

Según Van der Waerden, los pitagóricos matemáticos desarrollaron las teorías y el pensamiento del maestro por mucho tiempo, entre los años 530 y 360 A.C., y se destacan cinco generaciones que son:

- Primera Generación, 530-500, Pitágoras.
- Segunda Generación, 520-480, Hipaso de Metaponto, Alcmeon.
- Tercera Generación, 480-430, conjunto de matemáticos anónimos.

- Cuarta Generación, 440-400, Filolao, Teodoro.
- Quinta Generación, 400-360, Arquitas de Tarento.

Aristóteles se refiere a los matemáticos de la tercera generación con mucha admiración, ya que se les atribuye la fundación de una matemática rigurosa y madura, que poseía una exactitud admirable en sus argumentos. De un modo general, los pitagóricos estaban interesados en investigar la armonía del cosmos. Para Pitágoras y sus seguidores, el universo es un cosmos, un todo ordenado, con mucha armonía. Los números, las figuras y las notas musicales son ideas básicas en tal armonía cósmica. Para los pitagóricos, el número entero era la base de la filosofía que predicaban; "todo es número" era una sentencia fundamental en la escuela pitagórica. Afirmaban que "el que llega a comprender la armonía en términos de números se vuelve divino e inmortal".

Debido a que el conocimiento que Pitágoras confiaba a los matemáticos debía conservarse en estricto secreto, y que los acusmáticos custodiaban tal secreto, no se conoce con exactitud cuales fueron efectivamente los aportes de Pitágoras y de los pitagóricos en general.

Hay historiadores que sostienen que con Pitágoras realmente nace la matemática formal, en que se prueban las afirmaciones, inclusive se les atribuyen descubrimientos dados a Tales.

Los pitagóricos debían cumplir un juramento que les prohibía revelar los descubrimientos de la Escuela. Ellos usaron al pentágono estrellado como una señal de alianza entre ellos. Se narra la siguiente historia de un pitagórico que enfermo y pobre, muere en una desconocida posada. ≪Cierta noche de hace 500 años antes de Cristo, un viajero llegaba a una casa de hospedaje de la Antigua Grecia; el viajero, que era pobre y desdichado, se sintió mal durante la noche; el dueño de casa trató de aliviarlo sin conseguirlo. El enfermo, al presentir su muerte, le pidió una losa sobre la cual, con su mano trémula, trazó un pentágono estrellado; devolvió la losa a manera de pago y le pidió que la ponga en la puerta de su casa. Luego murió. Después de un tiempo, un viajero que pasaba por el lugar descubrio la señal, indagó su origen y en compensación a la bondad del dueño de la posada, le entregó una buena cantidad de dinero.≫

Pitágoras murió en Metaponto en el año 500 A.C., posiblemente de modo violento. A su muerte, y por cerca de tres siglos, sus discípulos difundieron la doctrina filosófica y la matemática hecha en la Escuela; los alumnos siempre mantuvieron un gran respeto y admiración por el Maestro. A la desaparición física de éste, la Escuela Itálica fue dirigida por Hipaso, quien reveló por primera vez los elevados conocimientos de la Escuela como, por ejemplo, la inscripción del dodecaedro en la esfera, asi como el descubrimiento de los números irracionales por Filolao, quien en su obra expone la doctrina pitagórica. A fines del siglo V, a Hipaso le sucede Arquitas de Tarento (entre 430-365 A.C.), quien tuvo entre sus discípulos a Platón y fue un estadista-filósofo que tuvo gran influencia en su época. Existieron muchos otros científicos notables quienes tuvieron directa o indirectamente influencia de Pitágoras y de los pitagóricos, como fueron: Hipócrates, Zenón, Demócrito de Abdera, Anaxágoras (500-428), quien fué el último representante de la Escuela Jónica, ... Asi se va construyendo el camino hacia los grandes progresos de la matemática en las Escuelas atenienses.

Pitágoras dividía la ciencia matemática en cuatro partes: la aritmética, la música, la geometría y la astronomía, lo que se llamó el "**quadrivium**" y que fue adoptado por Platón. La teoría de números, que fue estudiada substancialmente por los pitagóricos, fue diferenciada en la Aritmética (estudio abstracto de los números) y en la Logística (el arte de calcular). Por otro lado, a Pitágoras se le atribuye que elevó la geometría a la categoría de dignidad moral de una ciencia. Para este afamado filósofo, el "espacio" es un ente continuo e ilimitado. Estudiando las propiedades de los números en relación con la geometría, los pitagóricos llegaron a las grandezas inconmensurables. Pitágoras, según algunos investigadores de su obra, tuvo la idea de que la Tierra es redonda, como una esfera que gira en torno de un eje que pasa por su centro. Afirmaba también que el Sol era una esfera, así como la Luna; opinaba que las estrellas eran soles que iluminaban a astros habitados. Las ideas astronómicas de Pitágoras, y de los pitagóricos, fueron continuados por los siglos siguientes y en este camino está el surgimiento de la trigonometría.

A continuación presentamos algunos aspectos matemáticos de la Escuela Pitagórica, fundamentalmente sobre la teoría de números y sobre geometría. En realidad, es difícil separar ambos campos por la estrecha relación que los pitagóricos encontraron en tales áreas matemáticas.

### (ii) Teoría de Números.

La teoría de números se inicia con los trabajos de los pitagóricos; estos estudios fueron muy importantes en la evolución de la matemática pues lo hecho ya tiene las características de una matemática pura. Para los pitagóricos, los números constituyen la materia misma de los objetos. Veamos. El número 1 es indivisible e inmutable que satisface $1 \times 1 = 1$. $2 = 1 + 1$. El 3 es interpretado como la imagen del triángulo y el 4 es la imagen del sólido y representa la materia compuesta con los cuatro elementos básicos: fuego, aire, tierra y agua. Si se observa la distribución $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, se observa que el número 5 es la media aritmética de los pares equidistantes de 5. El número 6 tiene la siguiente interesante propiedad:

$$6 = 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3,$$

y por ello se llama un número **perfecto**. Si consideramos la primera década de números, del 1 al 10, vemos que 7 es el único número que no es divisor ni múltiplo de ninguno de los otros números.

"Todo es número" fue una frase esencial para los pitagóricos; el número 10 era considerado un número divino; ellos conocían la división de números pares e impares, asi como la de primos y compuestos.

Se atribuye a los pitagóricos el descubrimiento de algunos números especiales, como son,

- dos números son **amigos** si cada uno es la suma de los divisores del otro. Por ejemplo, 284 y 220 son números amigos pues

  $$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

  y

  $$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

  Los números amigos fueron relacionados con la astrología y con la brujería.

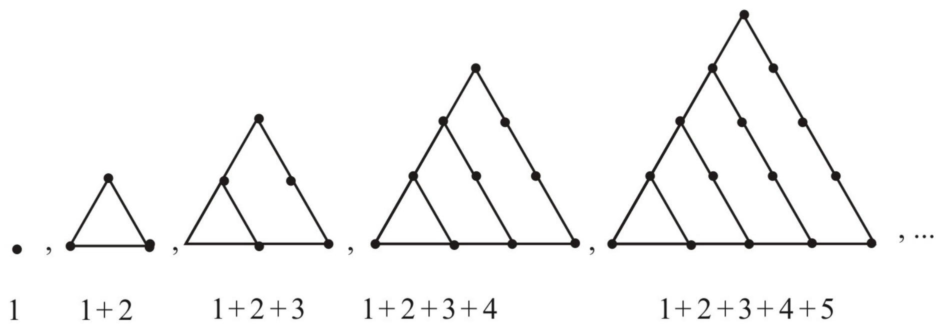
- Un número es llamado **perfecto** si es la suma de sus divisores propios; $6 = 1 + 2 + 3$.

- Un número es llamado **deficiente** si es mayor que la suma de sus divisores propios; $8 > 1 + 2 + 4$; es llamado **abundante** si tal suma es mayor que el número; $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$.

A Nicómaco le debemos cuatro números perfectos: 6, 28, 496 y 8128.

También le debemos el siguiente resultado "si la suma $1+2+2^2+...+2^n = p$ es un número primo, entonces $2^n p$ es un número perfecto". Se afirma que Pitágoras conocía este resultado.

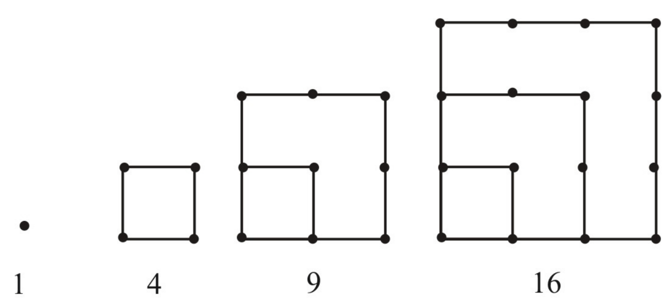
Los pitagóricos encontraron una curiosa relación entre los números y la geometría; es lo que se conoce como "representación geométrica de los números". De un modo general, construyeron los números poligonales. Comenzamos con los números triangulares.



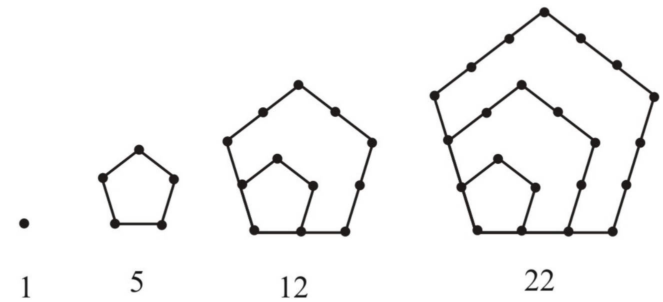

Como observamos, estos números triangulares forman precisamente triángulos y representan geometricamente la suma de los números naturales, y algebraicamente se tiene:

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Luego tenemos a los números cuadrados,

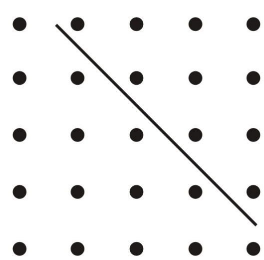


También a los números pentagonales,



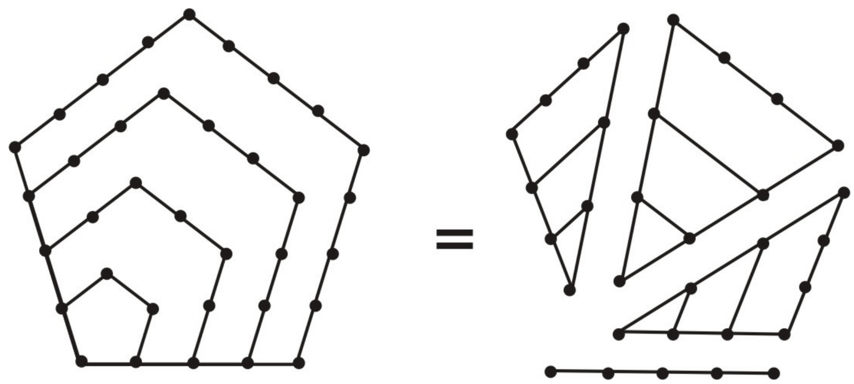

De un modo general se tiene a los **números poligonales**, que fueron conocidos por Nicómaco, que representan geometricamente progresiones a-ritméticas, cuyo primer término es 1 y la razón es un número arbitrario. Asi, el número triangular que corresponde a $n = 4$ es $\dfrac{(4)\,(5)}{2} = 10$. Es interesante observar que vía estos números geométricos se obtienen algunas interesantes relaciones, cuyas pruebas se pueden visualizar fácilmente. Asi tenemos ([DUN.1]),

**Teorema 1.** *Cualquier número cuadrado es la suma de dos números triángulares sucesivos.*



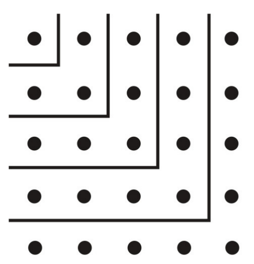
**Teorema 2.** *El número n-pentagonal es igual a $n$ mas el triple de $(n-1)$*

*números triángulares.*



**Teorema 3.** *La suma de cualquier número de enteros impares consecutivos, comenzando con 1, es un cuadrado perfecto. Asi:*

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \frac{n\,(2n)}{2} = n^2.$$



Observemos la ingeniosidad de los pitagóricos para establecer estas, y otras, propiedades de los números desde una visualización geométrica. Es notable la simplicidad de como se puede comprobar tales teoremas.

A los pitagóricos le debemos (o se les atribuye) también el estudio de la teoría de las **proporciones** y de las **progresiones**. Las proporciones fueron investigadas antes del descubrimiento de la inconmensurabilidad de líneas correspondientes a cantidades irracionales. Pitágoras y sus discípulos, consideran las proporciones solo para magnitudes conmensurables. Probablemente se debe a Pitágoras la siguiente definición sobre proporcionalidad, la que aparece en los Elementos de Euclides (definición 20, Libro VII): "Los números son proporcionales si el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto".

Los pitagóricos estudiaron a las proporciones: aritmética $a - b = b - c$, geométrica $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ y la armónica $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, de donde se obtienen: la media arítmética $\frac{a+b}{2}$, la media geométrica $\sqrt{ab}$ y la media armónica $\frac{2ab}{a+b}$. En la Antiguedad se llegó a establecer algunas relaciones entre la música y la matemática; este estudio se inició con los egipcios, los babilonios y los caldeos, y fue continuado por los pitagóricos quienes recurrieron a una cuerda vibrante tensa en sus extremos, a la que hicieron vibrar; de esta manera se produce un sonido con un cierto tono. Si solo se hiciera vibrar la mitad de la cuerda, el tono aumenta un octavo; si se vibra los $\frac{2}{3}$ de la cuerda, el tono estará $\frac{1}{5}$ mas de lo producido al inicio. Asi, los pitagóricos construyeron las escalas musicales. La relación entre la porción vibrante de la cuerda y la cuerda entera fue expresada usando razones. Se dice que cuatro números forman una **progresión musical** cuando están entre si como

$$a : \frac{2ab}{a+b} :: \frac{a+b}{2} : b,$$

proporción conocida por los babilonios y que fue llevada a Grecia por Pitágoras. Por ejemplo, los números $6, 8, 9$ y $12$ forman una progresión musical pues

$$6 : \frac{2\,(6)\,(12)}{6+2} :: \frac{6+12}{2} : 12,$$

lo que es equivalente a $6 : 8 :: 9 : 12$ (cierto ya que $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$).

Volvamos a los números poligonales: triangulares, cuadrados, pentagonales, ... Ellos son llamados también "números figurativos" y pueden ser establecidos formalmente en la forma siguiente. Sea $m$ un entero positivo y $t$ un entero no-negativo; se define al número natural, $(m+2)$ −**poligonal**, vía:

$$m\,\frac{t^2 - t}{2} + t.$$

Entonces, si $m = 1$ se tienen los números $3-$poligonales o números triangulares $1.\frac{t^2-t}{2} + t$. Luego, si $t = 0$, se obtiene al número triangular 0; si $t = 1$, al número triangular 1; si $t = 2$, al triangular 3, y asi sucesivamente.

Si $m = 2$, se obtienen los números cuadrados $0, 1, 4, 9, 16, ...$; y si $m = 3$, se obtienen a los números pentagonales $0, 1, 5, 12, 22, ...$ Y asi sucesivamente.

**Magnitudes Inconmensurables.**

Por la tablilla Plimpton 322, ya los babilonios conocían al "teorema de Pitágoras" pero fue Pitágoras o los pitagóricos quienes dieron la primera demostración del teorema. En la Antiguedad se estudió al siguiente **problema**: "encontrar enteros $a, b, c$ los cuales representan los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo". La terna $(a, b, c)$ se llama un "**triple pitagórico**". Por Plimpton 322 sabemos que los antiguos babilonios conocían como calcular tales triples. Los pitagóricos conocieron la fórmula

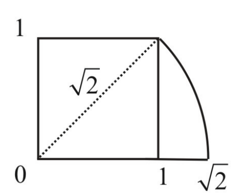
$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2$$

para $m$ impar, y también a la fórmula

$$(2m)^2 + \left(m^2 - 1\right)^2 = \left(m^2 + 1\right)^2$$

para $m$ impar o par. Sin embargo, ninguna de tales fórmulas producen todos los triples pitagóricos. En los Elementos de Euclides se encuentra una solución completa de este problema.

Por el Teorema de Pitágoras se llega al siguiente crucial problema: "estudiar la razón entre la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados". Por simplicidad, consideremos un cuadrado de lado con longitud 1; entonces por el Teorema de Pitágoras, la diagonal mide $\sqrt{2}$. ¿Es $\sqrt{2}$ conmensurable con 1? Según el historiador Proclo, los pitagóricos llegaron a la idea de un número irracional. $\sqrt{2}$ puede ser ubicado en la recta (ver figura adjunta); sin embargo, $\sqrt{2}$ **no es** un número racional.

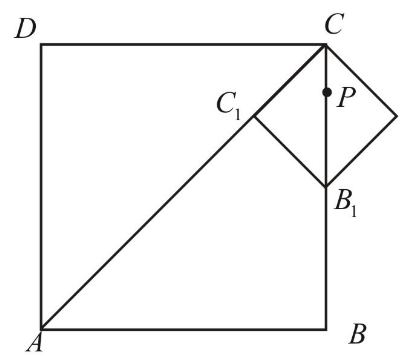



**En efecto**, supongamos que $\sqrt{2}$ fuera un número racional, es decir, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, donde $m$ y $n$ son primos entre si. Entonces, $m^2 = 2n^2$; luego, $m^2$ es par y también lo es $m$. Como $\dfrac{m}{n}$ es irreducible, $n$ sería impar. Pero, si $m$ es par, $m^2$ es divisible por 4 y por tanto $n^2$ es divisible por 2, y asi $n$ sería par.

**Conclusión:** si $\sqrt{2}$ fuera un número racional, $n$ sería a la vez par e impar. Luego, $\sqrt{2}$ es un número irracional $\bullet$

Una prueba geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ es como sigue.

Vamos a probar que un lado y la diagonal son inconmensurables. Supongamos lo contrario, es decir, que fueran conmensurables, lo que significa que existe un segmento $CP$ tal que $CA$ y $CB$, del cuadrado $ABCD$, son ambos múltiplos enteros de $CP$. Sobre $AC$, sea $C_1$ tal que $AC_1 = CB$ y tracemos $C_1B_1$ tal que $C_1B_1 \perp CA$. Entonces, $B_1B = B_1C_1 = CC_1$.




Luego, $CB_1 = CB - CC_1$ y $CC_1$ son conmensurables con respecto a $CP$. Pero, $CB_1$ y $CC_1$ son una diagonal y un lado de un cuadrado de dimensiones menores que la mitad de aquellos del cuadrado original.

Repitiendo este proceso, podemos obtener finalmente un cuadrado cuya diagonal $CB_n$ y lado $CC_n$ son conmensurables con respecto a $CP$ y $CB_n < CP$, lo que es un absurdo. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es irracional.

$\blacksquare$

Esta prueba, por reducción al absurdo (atribuida a Aristóteles), causó una crisis en la teoría de las proporciones de los pitagóricos debido a que tal teoría se fundamentaba en la conmensurabilidad de las magnitudes geométricas. En este escenario aparece la gran obra matemática de Eudoxo, quien substituye la antigua teoría por una nueva. Según Platón, el pitagórico Teodoro de Cirene (450 A.C.) probó que los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \sqrt{7}, ..., \sqrt{17}$

son inconmensurables con la unidad. Como comprenderemos, todos estos resultados, y otros, junto con sus respectivas demostraciones, nos indican el gran nivel matemático alcanzado por los antiguos griegos.

**Números Perfectos.** Hemos dicho que un número es perfecto si el es igual a la suma de sus divisores propios; por ejemplo, 28 es un número perfecto ya que

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Los pitagóricos estuvieron interesados en estudiar este tipo de números. Es claro que todo número perfecto es amigo consigo mismo. Si $\sigma(n)$ denota la suma de todos los divisores de un entero positivo $n$ (incluyendo $n$), entonces $n$ es un número perfecto **si y solo si** $\sigma(n) = 2n$. En el caso $n = 28$, $\sigma(28) = 2(28)$. Euclides, en el Libro IX, probó la

**Proposición 36.** IX. *Todo número entero positivo de la forma*

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

*es un número perfecto si* $2^m - 1$ *es un número primo.*

**Nota.** Este resultado fue probablemente descubierto por los pitagóricos.

**Prueba.** ([ANG-LAM])

Por hipótesis, $p = 2^m - 1$ es primo, luego los divisores de $2n = 2^m p$ ó $n = 2^{m-1}p$ son:

$$1, 2, 2^2, ..., 2^{m-1}, p, 2p, 2^2p, ..., 2^{m-1}p.$$

Luego, la suma de los divisores de $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ es:

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{m-1} + p + 2p + 2^2p + ... + 2^{m-1}p \\
&= (1 + p) + 2(1 + p) + 2^2(1 + p) + ... + 2^{m-1}(1 + p) \\
&= \left(2 + 2^2 + ... + 2^{m-1}\right)(1 + p) \\
&= (2^m - 1)(1 + p) = (2^m - 1)2^m = 2(2^m - 1)2^m - 1 = 2p2^{m-1} \\
&= 2n.
\end{aligned}$$

Por tanto, $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ es un número perfecto.

$\blacksquare$

**Nota.** Si $2^m - 1$ es primo, entonces $m$ es primo, ya que si $m = xy$, con $x > 1,\ y > 1$, entonces

$$2^{xy} - 1 = (2^x - 1)\left[(2^x)^{y-1} + (2^x)^{y-2} + ... + 2^x + 1\right],$$

donde los dos factores son mayores que 1. Sin embargo, respecto al recíproco, si $m = 11$ (un número primo) se tiene que $2^{m-1}$ no es un número primo ya que $2^{11} - 1 = 2047 = (23)\,(89)$.

**Definición.** *Los números primos de la forma* $2^m - 1$ *se llaman* ***primos Mersenne*** *en honor al Padre Marín Mersenne (1588-1648), quién estableció que los ocho primeros números perfectos son encontrados con* $m = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ *y* $31$.

### (iii) Algebra Pitagórica.

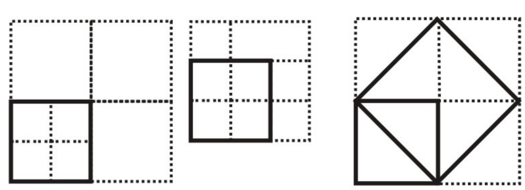
El descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, por parte de los pitagóricos, trajo muchas consecuencias interesantes. Por ejemplo ([BEK]), ¿**Cómo duplicar un área**? Platón narra el siguiente diálogo:

> “ Sócrates señala un dibujo de un cuadrado que tiene de lado 2 pies (con área 4 pies cuadrados), y pide al esclavo de Menon que le muestre un cuadrado con el doble de área-8 pies cuadrados”. El dice: “Muéstreme exactamente el lado de este cuadrado. Si no puede decírmelo con números, muéstreme entonces la longitud en el dibujo”.

El esclavo propone enseguida uno con el lado de 4 pies por consiguiente el doble del lado. Cuando Sócrates dibuja la figura (1), el esclavo se da cuenta que esta área será 4 veces más grande, y corrige la proposición a uno con el lado de 3 pies.

Sócrates dibuja la figura (2) que muestra que este cuadrado también es demasiado grande - 9 pies cuadrados.

Al final Sócrates propone la figura (3).”

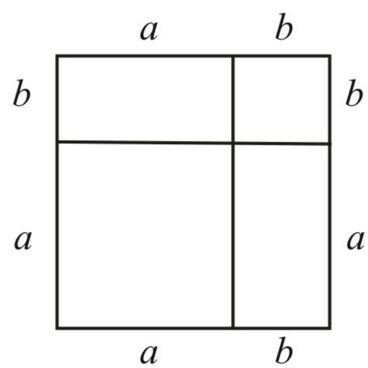


(1) (2) (3)

Observe que el lado del cuadrado construido mide $\sqrt{8}$, y el área del cuadrado será 8, como se pide.

Asi se tiene el problema de resolver la ecuación $x^2 = 8$. En el lenguaje de los antiguos griegos, la longitud del lado del cuadrado no es un número racional. Desde que la idea de número irracional no estaba bien puesta, el problema dado, de duplicar un área, llevó a una situación crítica. Esta interpretación geométrica de un número "irracional" los condujo a geometrizar algunas identidades algebraicas. En el Libro II de los Elementos de Euclides tenemos algunos resultados al respecto.

**Proposición 4.** *"Si una línea recta es dividida en dos partes cualquiera, el cuadrado de la línea total es igual a la suma de los cuadrados de las dos partes junto con el doble del rectángulo contenido por las dos partes".*




**Prueba.** Según el gráfico adjunto, se tiene la identidad

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

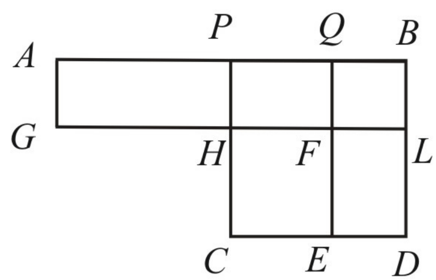
■

**Proposición 5.** *"Si una línea recta es dividida en partes iguales, y también en partes desiguales, el rectángulo contenido por las partes desiguales, junto con el cuadrado sobre la línea entre los puntos de sección, es igual al cuadrado sobre la mitad de la línea".*

**Interpretación.**

Sea $AB$ la línea recta (segmento) dada, la que es dividida en partes iguales por $P$, y en partes desiguales por $Q$. Entonces, la proposición 5 dice:

$$(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2 .$$




**Prueba.** Se tiene que $PCDB$ y $QFLB$ son cuadrados. Entonces,

$$\begin{aligned}(AQ)(QB) + (PQ)^2 &= AGFQ + HCEF = AGHP + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + HCEF \\ &= (PB)^2 .\end{aligned}$$

■

**Casos Particulares.**

- Si $AQ = 2a$ y $QB = 2b$, entonces

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2 .$$

- Si $AB = 2a$ y $PQ = b$, entonces

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

La proposición 5 está relacionada al siguiente argumento. Los pitagóricos estudiaron la solución geométrica de la ecuación de segundo grado $x^2 + px + q = 0$, en los casos en que hay raices reales. Estos casos corresponden a las ecuaciones

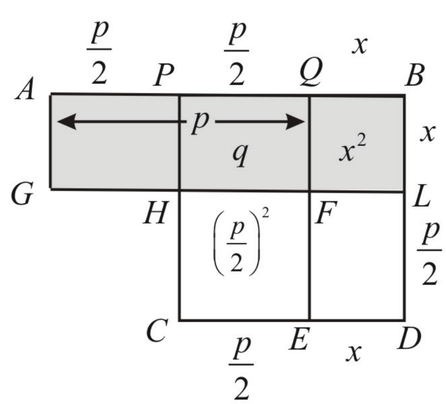
$$(\alpha) \qquad x^2 + px = q \ ;$$

$$(\beta) \qquad x^2 = px + q \ \ ;$$

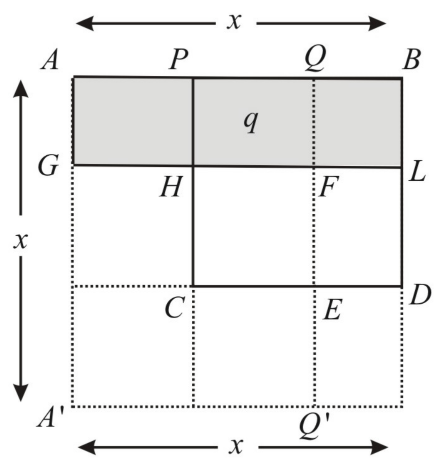
$$(\gamma) \qquad px = x^2 + q \ \ .$$

**Caso** $(\alpha)$**.** La estrategia consiste en construir sobre el segmento dado $AQ = p$ un rectángulo $AGLB$ igual a una área dada $q$, y tal que la diferencia entre él y el rectángulo de base $AQ$ y de la misma altura sea un cuadrado $QFLB = x^2$ (asi, $QB = x$). Siendo $P$ el punto medio de $AQ$, el cuadrado $PCDB$ resuelve el problema, tomando $B$ en la prolongación de $AQ$; esta transformación geométrica corresponde a la solución algebraica

$$q \;=\; x^2 + px = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 .$$



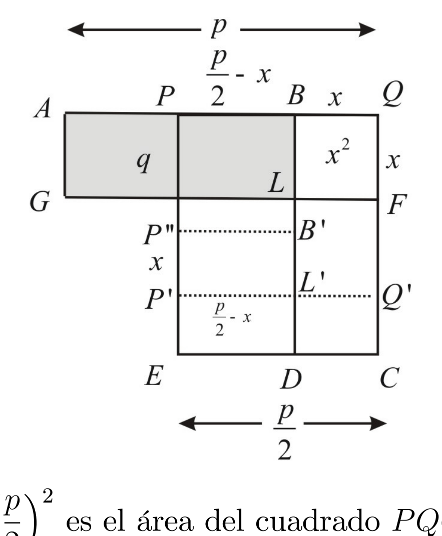

**Caso** $(\beta)$**.** Observemos que se tiene $x^2 - px = q$, un caso análogo a $(\alpha)$; ahora hay que tomar $x = AB$ y proceder como antes en $(\alpha)$. Según la figura adjunta, observamos que si al área del cuadrado de lado $x$ le quitamos el área del rectángulo $AQQ'A'$, igual a $px$, nos queda exactamente el área del rectángulo $ABLG$, que es $q$.




**Caso** $(\gamma)$**.** Se considera el punto $B$ entre $A$ y $Q$, y a la transformación geométrica le corresponde la solución algebraica

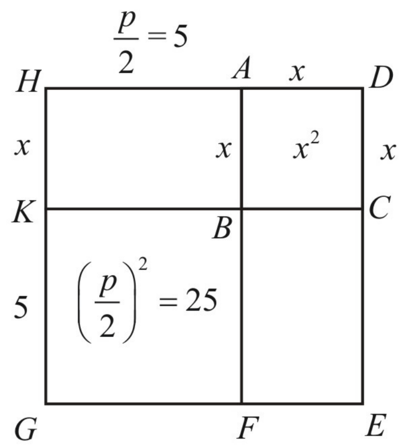
$$px - x^2 = q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2.$$

donde se tiene $AQ = p$, $PQ = \dfrac{p}{2}$, $AGLB = q$ y $QBLF = x^2 \quad (x = BQ)$.




Observemos que $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado $PQQ'P'$; $\left(\frac{p}{2} - x\right)^2$ es el área del cuadrado $PP''B'B$. Luego,

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = x\left(\frac{p}{2} - x\right) + x\left(\frac{p}{2}\right) = xp - x^2 = q.$$




■

**Ejemplo.** [Mohammed ibn Musâ Alkhwarizmi (830 D.C.)].

Resolver $x^2 + 10x = 39$

**Solución.**

Sea $AD$ que representa $x$; construyamos el cuadrado $ABCD$ y prolonguemos $DA$ hasta $AH = 5$ $\left(= \frac{p}{2}\right)$ y $DC$ hasta $CE = 5$.

Sea el cuadrado $HGED$ y los rectángulos $AHKB$ y $BFEC$. Observemos que

$$x^2 + 10x = x^2 + 2\,(5x) = 39.$$

Pero, área cuadrado $KGFB = 25$, entonces: área cuadrado $HGED$ será igual a $39 + 25 = 64$, luego el lado del cuadrado mide 8, que excede en 5 al valor incógnita $x$; asi, $x = 3$.

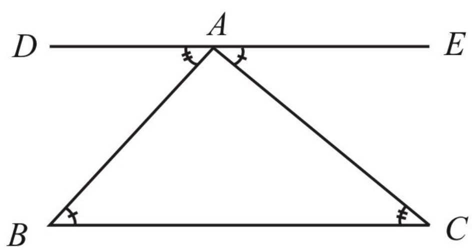
■

## (iv) Geometría Pitagórica.

Acabamos de ver los ingeniosos métodos geométricos para representar ciertas identidades, asi como la representación geométrica de números y la solución geométrica de ecuaciones algebraicas. Se debe a los pitagóricos gran parte de esos resultados, asi como los siguientes.

(•) **La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.**

Se conjetura, como hemos visto antes, que Tales descubrió el teorema que afirma: "todo ángulo inscrito en un semi-círculo, es un ángulo recto"; este resultado pudo haberle sugerido que en un triángulo rectángulo la suma de los tres ángulos es igual a dos rectos. El paso al caso general fue atribuido a los pitagóricos por Eudemus. La interesante idea es la siguiente. Sea $\triangle ABC$ un triángulo arbitrario. A través de $A$, sea $DE$ paralela a $BC$, luego los ángulos alternos $\measuredangle EAC$ y $\measuredangle ACB$ son iguales. Similarmente, los ángulos alternos $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle ABC$ son iguales. Luego, la suma de los ángulos $ABC$ y $ACB$ es igual a la suma de los ángulos $DAB$ y $EAC$. Agreguemos a cada suma el ángulo $BAC$; luego, la suma de los tres ángulos $ABC$, $ACB$ y $BAC$, es igual a la suma de los ángulos $DAB$, $BAC$ y $CAE$, que es igual a dos rectos.



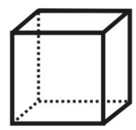

Posiblemente los pitagóricos conocieron una generalización del anterior resultado para el caso de un polígono con $n$ ángulos ($n$ lados): "la suma de los ángulos interiores de un polígono de $n$ ángulos es igual a $(2n-4)$ ángulos rectos"; asi mismo podrían haber conjeturado que la suma de los ángulos exteriores (suplementos de los respectivos ángulos interiores) es igual a cuatro ángulos rectos. También se atribuye a los pitagóricos el descubrimiento del siguiente resultado: "los únicos tres polígonos regulares tal que sus ángulos, puestos conjuntamente alrededor de un punto común, como vértice, llenan todo el espacio (la suma igual a cuatro rectos) son el triángulo equilátero, el cuadrado y el exágono regular".

(•) **Poliedros Regulares.**

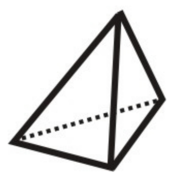
Remarcamos que un **poliedro** es un sólido cuya superficie consiste de caras que son regiones poligonales (cuyas fronteras son polígonos).

Un poliedro es llamado **regular** (o **poliedro Platónico**) si sus caras son regiones poligonales regulares congruentes y sus ángulos poliedros son todos congruentes. Existen cinco (y solo cinco) poliedros regulares diferentes, de los cuales los pitagóricos conocieron cuatro, que son:

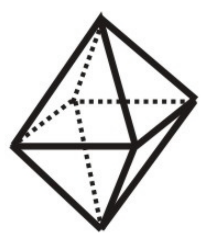
el **cubo**, que es limitado con 6 cuadrados, con 3 cuadrados con vértice común;



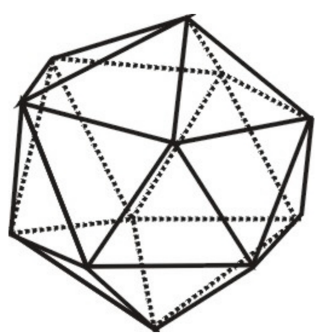
el **tetahedro**, que es limitado con 4 triángulos equiláteros, con 3 triángulos con vértice común;



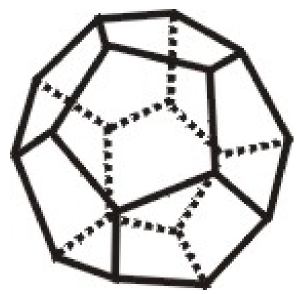
el **octahedro**, limitado con 8 triángulos equiláteros, con 4 triángulos con vértice común; y



el **icosahedro**, limitado por 20 triángulos equiláteros, con 5 triángulos con vértice común.



El quinto poliedro regular es el **dodecahedro**, el que fue descubierto por **Hipaso** (470 A.C.). Se afirma que Hipaso fue expulsado del grupo pitagórico por no haber atribuido el descubrimiento al maestro Pitágoras.



El tratamiento matemático de tales poliedros se inició con el Libro XIII de los Elementos de Euclides; en esta obra aparece la demostración de que solo hay cinco poliedros regulares. La prueba es basada en el siguiente argumento. Hemos mencionado antes de que la suma de los ángulos (interiores) de un polígono regular de $n$ lados es igual a $(2n-4)$ ángulos rectos, esto es, igual a $(n-2)\,180$. Luego, cada ángulo del polígono es $\dfrac{(n-2)\,180}{n}$. Luego, si en un punto (vértice) hay $q$ de tales ángulos se tendrá (los ángulos juntados, “llenan al espacio”)

$$\frac{q\,(n-2)\,180}{n} = 360.$$

Podemos verificar que esta relación es equivalente a $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2}$, una interesante relación conocida en el Antiguo Egipto.

Viendo los polígonos de los poliedros citados, observemos que $n$ y $q$ son enteros mayores que 2 y por tanto se tendrá: si $n = 3,\ q = 6$, si $n = 4,\ q = 4$ y si $n = 6,\ q = 3$. Esto significa que solo se deben usar polígonos de 3, 4 y 6 lados, esto es, triángulos equiláteros, cuadrados y exágonos regulares. Remarcamos que para que se forme un ángulo (diedro) se debe tener:

$$\frac{q\,(n-2)\,180}{n} < 360$$

y por tanto se tendrá

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{q};$$

de esta manera solo habrá 5 posibilidades para $n$ y $q$. Tenemos, si:

- $p = 3$ y $q = 3$, obtenemos el tetahedro;
- $p = 3$ y $q = 4$, obtenemos el octahedro;
- $p = 4$ y $q = 3$, conseguimos el cubo;
- $p = 3$ y $q = 5$, conseguimos el icosahedro;
- $p = 5$ y $q = 3$, se obtiene el dodecahedro.

Platón, en su obra “Timeo”, describe a los cinco poliedros regulares y muestra como construir modelos de esos poliedros juntando triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos para formar sus caras. **Timeo de Locri** fué un pitagórico que conoció a Platón y posiblemente intercambiaron ideas sobre los citados poliedros regulares. Timeo asocia el tetahedro con el fuego, el octahedro con el aire, el icosahedro con el agua y el cubo con la tierra; le fue difícil encontrar el asociado con el dodecahedro; al final lo asoció con el universo que nos limita. Es oportuno mencionar que casi mil años mas tarde, J. Kepler (1571-1630) construyó un modelo astronómico usando los cinco poliedros regulares, algo que ya (de algún modo) Platón había conocido en su época. El encuentra la siguiente “ecuación química”

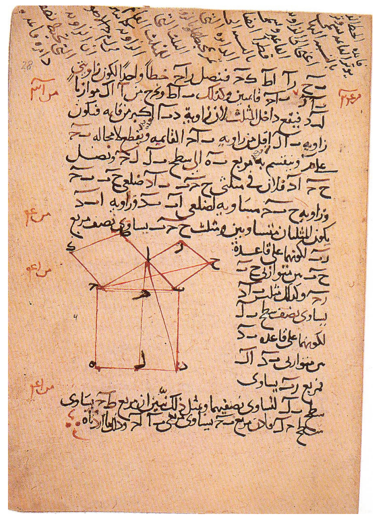
$$f_4 + a_{20} \to 2\bar{a}_8 + 2f_4,$$

donde $f$ denota al fuego, $a$ el agua y $\bar{a}$ el aire; tal ecuación se lee: fuego con cuatro caras combinado con agua con veinte caras produce 2 átomos de aire, cada uno con ocho caras y 2 átomos de fuego, cada uno con cuatro caras. Se observa que se tiene la igualdad:

$$4 + 20 = 2 \times 8 + 2 \times 4.$$

(•) **El Teorema de Pitágoras.**

Posiblemente el teorema de Pitágoras sea el resultado geométrico mas conocido por el común de la gente. Es tradición histórica asociar el nombre del Maestro a tal teorema; sin embargo, existen conjeturas de que ello no sea cierto, es decir, de que Pitágoras haya probado a la proposición. El teorema de Pitágoras es un profundo resultado relacionado a los triángulos rectángulos y tuvo ocupado a los matemáticos durante muchos siglos; se obtuvieron muchísimas demostraciones. Un profesor llegó a reunir 367 pruebas del teorema, muchas muy parecidas entre sí. Para los griegos, el teorema es un resultado sobre áreas de cuadrados. Viendo el documento histórico adjunto, se observa que dado un triángulo rectángulo, se construyen cuadrados sobre la

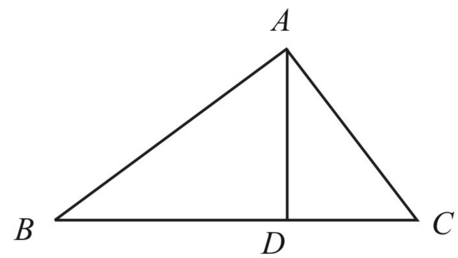


hipotenusa y sobre los catetos. El teorema establece que: "el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos". La idea de fondo es que se descompone un cuadrado en otros dos cuadrados mas pequeños.

Remarquemos que si $c$ denota a la hipotenusa (su longitud) y $a$, $b$ a los catetos, muchos siglos después (con el advenimiento del álgebra) el teorema de Pitágoras es conocido con la relación $c^2 = a^2 + b^2$, algo que los antiguos griegos no lo hubieran reconocido ya que ellos no conocían a los símbolos algebraicos ni a fórmulas con exponentes.

Según Vitruvius (primer siglo A.C.), Pitágoras primero descubrió al triángulo $(3, 4, 5)$ y posiblemente el teorema fue sugerido al descubrirse que este triángulo es un triángulo rectángulo, información que fue traida a Grecia de los antiguos Egipcios y de los babilonios. Es un interés histórico el conocer el método utilizado por Pitágoras y por los pitagóricos para demostrar al "teorema de Pitágoras". Es posible que se haya seguido una de las dos formas siguientes ([HEA], vol. I):

(•) Sea el triángulo $ABC$, recto en $A$; $AD$ es perpendicular a $BC$; entonces los triángulos $DBA$ y $DAC$ son semejantes al triángulo $ABC$.




Luego (por los teoremas 4 y 17 del Libro VI. Elementos Euclides) se tiene: $BA^2 = BD.BC$ y $AC^2 = CD.BC$. Por tanto,

$$BA^2 + AC^2 = (BD + CD)\,.BC = BC^2.$$

■

(••) Observemos que en los triángulos semejantes, $DBA$, $DAC$ y $ABC$, los correspondientes lados opuestos al ángulo recto son $BA$, $AC$ y $BC$. Se tiene, $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$, esto es, $BD$, $AB$ y $BC$ son proporcionales. Luego,

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BD^2}{AB^2} = \frac{BD}{BC}.$$

Analogamente, $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{CD}{BC}$. De esta manera,

$$\frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BD + CD}{BC} = 1,$$

de donde se tiene la tesis.

■

Se sugiere también que el teorema de Pitágoras haya sido probado considerando un cuadrado de lado $a+b$, el cual es dividido en dos cuadrados mas pequeños, de lados $a$ y $b$, y en dos rectángulos con lados $a$ y $b$. (Figura $(*)$). Dividiendo cada uno de estos rectángulos en dos triángulos iguales, coloquemos los cuatro rectángulos alrededor del cuadrado de lado $(a + b)$ (Figura

($**$)).

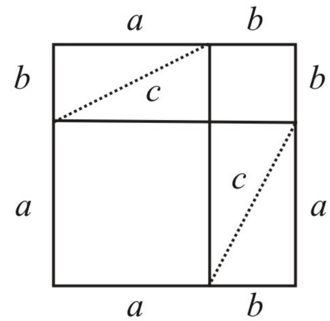


Figura (*)

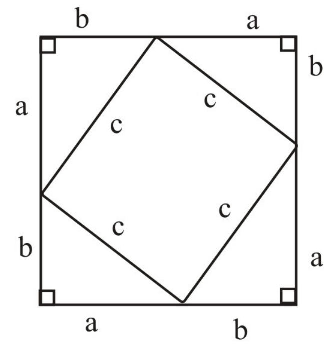


Figura (**)

De ello se deduce que el área del cuadrado de lado $c$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre $a$ y $b$. Esto es, se tiene $c^2 = a^2 + b^2$.

Una de las aplicaciones mas notables del teorema de Pitágoras, en las raices mismas de la matemática, fue la que nos llevó a las cantidades inconmensurables, esto es, a los números irracionales muchos siglos después de que los antiguos griegos construyeran un cuadrado de lado 1, y cuya diagonal mide $\sqrt{2}$. En realidad, la formulación matemática de número real solo fue conseguido en la segunda mitad del siglo XIX.

Las siguientes figuras nos inducen otras demostraciones del teorema de Pitágoras.

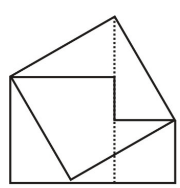


Figura 1

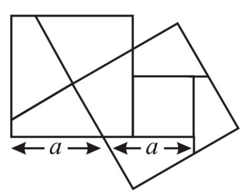


Figura 2

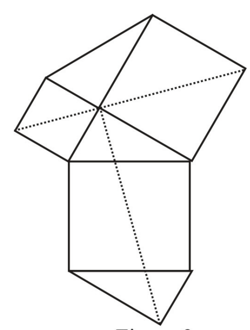


Figura 3

En la sección 1.2.6.($ii$) presentaremos algunos resultados contenidos en los Elementos de Euclides; en esa oportunidad presentaremos la demostración del teorema de Pitágoras según Euclides, la que es muy ingeniosa. También presentaremos una generalización del Teorema de Pitágoras asi como su inverso.

### 1.2.3. Hipócrates de Quíos; Arquitas de Tarento.

**(i) Hipócrates de Quíos (440 A.C.).**

El historiador Proclo afirmó: "Hipócrates fue el primer autor de "Elementos ". En efecto, Hipócrates fue reconocido en su época como un matemático de prestigio. Dejó su tierra, Quíos, para trasladarse a Atenas como mercader; llegó a acumular cierta riqueza la que perdió por razones no claras (se afirma que fue asaltado por piratas). Como consecuencia de este hecho, Hipócrates se dedicó al estudio de la geometría, llegando a obtener éxitos. Es así como escribió unos "Elementos de Geometría" (un poco mas de un siglo antes que los Elementos de Euclides), el que lamentablemente se perdió pero se conoce de su existencia por una Historia de la Matemática de Eudemo. Famoso como era, intentó probar la cuadratura del círculo (que presentaremos posteriormente) probando la cuadratura de ciertas lúnulas. Estudió también el problema de la duplicación del cubo.

**Cuadratura de Lúnulas ("Lunas")**

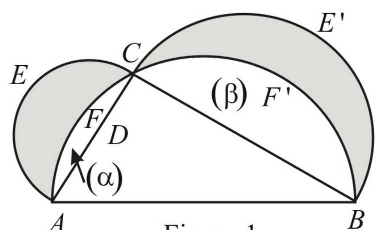
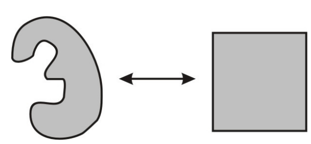


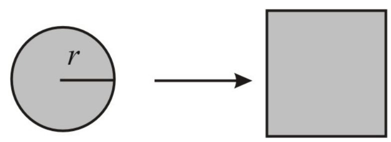
Figura 1

Uno de los famosos problemas de la Antiguedad fue la "cuadratura del círculo". De un modo general, la **cuadratura** de una figura plana consiste en la construcción, usando **solamente** regla y compás, de un cuadrado que tenga área igual a la de la figura dada.



Si tal construcción fuera factible, decimos que la figura es **cuadrable**.

Dado un círculo de radio $r$, ¿existe un cuadrado cuya área sea igual al área del círculo dado? Hipócrates investigó este tipo de problemas, obteniendo cuadraturas de superficies limitadas por curvas.

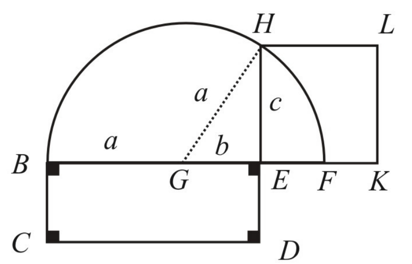



En esta dirección se tiene el:

**Teorema [H]**. (En la Figura 1) *"La suma de las áreas de las lúnulas $AECF$ y $BE'CF'$ es equivalente al área del triángulo rectángulo $ACB$"*.

El teorema [H] nos dice que la parte sombreada (Figura 1) es cuadrable, ya que todo triángulo lo es. Pasemos a precisar esta última afirmación. Comenzamos estudiando la **cuadratura del rectángulo**.

**En efecto**, sea $BCDE$ un rectángulo arbitrario. Con regla extendemos $\overline{BE}$; con compás construimos $\overline{EF}$ tal que $EF = ED$. Bisectamos $\overline{BF}$ en $G$. Con centro $G$, radio $BG$, describamos un semi-círculo. Construyamos $\overline{EH}$ tal que $\overline{EH} \perp \overline{BF}$.




Construyamos el cuadrado $EKLH$.

Se tiene,

$$\text{área } BCDE = \text{área } EHLK.$$

**En efecto**, llamando

$$a = HG, \quad b = EG, \quad c = EH,$$

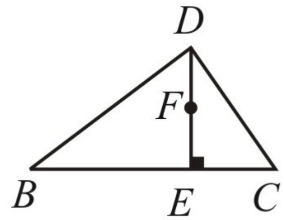
tenemos $a^2 = b^2 + c^2 \quad$ ó $\quad c^2 = a^2 - b^2$.

Luego,

$$\begin{aligned} \text{área } BCDE &= BE \times ED = BE \times EF = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = c^2 \\ &= \text{área } EKLH. \end{aligned}$$

■

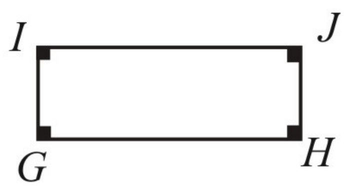
Veamos ahora la **cuadratura del triángulo**.
**En efecto**, sea $BCD$ un triángulo arbitrario. Construyamos $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \perp \overline{BC}$




. Se tiene,

$$\text{área } \triangle BCD = \frac{1}{2}(BC)(DE).$$

Sea $F$ punto medio de $\overline{DE}$. Construyamos un rectángulo con $GH = BC$ y $HJ = EF$.

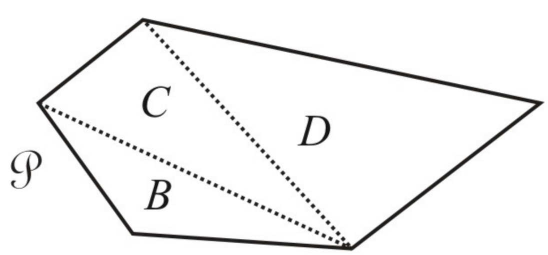



Se tiene entonces,

$$\begin{aligned} \text{área rectángulo } GHJI &= (HJ)(GH) = (EF)(BC) = \frac{1}{2}(DE)(BC) \\ &= \text{área } \triangle BCD. \end{aligned}$$

∎

De un modo general, veamos la **cuadratura de un polígono**.
Sea $\mathcal{P}$ un polígono. Dividimos $\mathcal{P}$ en triángulos.



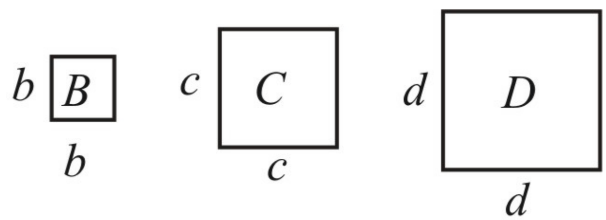

Entonces,

$$\text{área polígono} = B + C + D,$$

donde $B, C, D$ son las áreas de los triángulos respectivos. Remarcamos que "área polígono" significa "área de la región poligonal" respectiva.

Similarmente, "área triángulo", ...

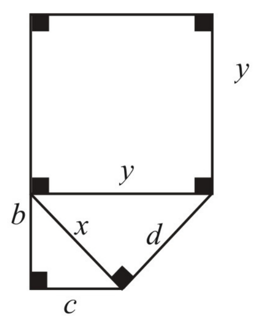
Sabemos ya que cada triángulo es cuadrable, por tanto existen cuadrados de lados $b, c, d$, con áreas $B, C, D$ respectivamente.




Construyamos un triángulo rectángulo con catetos $b$ y $c$, e hipotenusa $x \quad (x^2 = b^2 + c^2)$.

Ahora construimos un triángulo rectángulo con catetos $x, d$ e hipotenusa $y \quad (y^2 = x^2 + d^2)$.

Finalmente construyamos un cuadrado de lado $y$.




Tenemos,

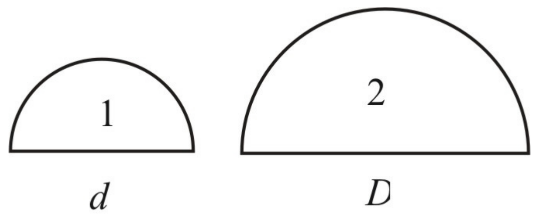
$$y^2 = x^2 + d^2 = \left(b^2 + c^2\right) + d^2 = B + C + D.$$

■

Veamos ahora la **cuadratura de lúnulas**. Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos circulares (ver figura L). Hipócrates "cuadró" lúnulas del tipo de la figura L. Para ello, él necesitó de los siguientes resultados:

- Teorema de Pitágoras;
- El ángulo inscrito en un semi-círculo es recto;

- $\dfrac{\text{área semi-círculo 1}}{\text{área semi-círculo 2}} = \dfrac{d^2}{D^2}$ .




**Prueba del Teorema [H]**. (Ver Figura L). Dado el $\triangle ABC$ (rectángulo en $C$) se construyen los semi-círculos $AEC$, $CE'B$ y $ACB$ sobre los lados $AC$, $CB$ y $AB$ del triángulo rectángulo $BAC$. Por el teorema de Pitágoras tenemos $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Luego,

$$\text{área semi-círculo} ACB = \text{área semi-círculo} AEC + \text{área semi-círculo} CE'B \qquad (+)$$

**En efecto**,

$$\frac{\text{área semi-círculo} AEC}{\text{área semi-círculo} ACB} = \frac{AC^2}{AB^2} \quad \therefore \quad AC^2 = \frac{\text{área semi-círculo} AEC}{\text{área semi-círculo} ACB}.AB^2$$

$$\frac{\text{área semi-círculo } CE'B}{\text{área semi-círculo } ACB} = \frac{CB^2}{AB^2} \quad \therefore \quad CB^2 = \frac{\text{área semi-círculo } CE'B}{\text{área semi-círculo } ACB}.AB^2$$

Sumando estas dos igualdades,

$$AB^2 = (\text{área semi-círculo } AEC + \text{área semi-círculo } CE'B).\frac{AB^2}{\text{área semi-círculo } ACB} ,$$

de donde se obtiene (+).

Observemos que:

$$\text{área semi-círculo } ACB = (\alpha) + \text{área } \triangle BAC + (\beta)$$

$$\text{área semi-círculo } AEC = (\alpha) + \text{área lúnula } AECF$$

$$\text{área semi-círculo } CE'B = (\beta) + \text{área lúnula } CE'BF'$$

Luego, por (+),

$$\begin{aligned}(\alpha) + \text{área } \triangle BAC + (\beta) &= (\alpha) + \text{área lúnula } AECF + (\beta)\\ &\quad + \text{área lúnula } CE'BF'.\end{aligned}$$

Simplificamos se obtiene:

$$\text{área } \triangle BAC = \text{área lúnula } AECF + \text{área lúnula } CE^{'}BF^{'}$$

■

Desde que todo triángulo es cuadrable, entonces:

$$\text{lúnula } AECF \cup \text{ lúnula } CE^{'}BF^{'}$$

es cuadrable.

Boyer afirma que las cuadraturas logradas por Hipócrates revelan el gran nivel matemático logrado por los griegos. Posiblemente Hipócrates creía poder cuadrar a todas las lúnulas y que por tanto podría cuadrar al círculo, pero hay evidencias de que él era conciente de las limitaciones de su obra. Se afirma que Hipócrates sabía que no podía cuadrar al círculo pero que intentó engañar a sus conciudadanos diciéndoles que lo había logrado.

### (ii) Arquitas de Tarento. (428-347 A.C.)

Arquitas fue un talentoso hombre de ciencias, de conducta ejemplar; fue pitagórico y amigo de Platón. Vivió en la primera mitad del siglo IV. Además de ser un excelente matemático, fue estadista destacado y notable filósofo; llegó a ser también general de las fuerzas de su ciudad. Amó mucho a los niños y puso su talento al servicio de ellos al inventar diversos juegos infantiles.

Ubiquemos al escenario histórico en que se desenvolvió Arquitas. Se afirma que Pitágoras, perseguido por sus ideas, se dirigió a Metaponto al final de su vida en donde falleció alrededor del año 500 A.C. Es tradición saber que Pitágoras no dejó algo escrito pero sabemos de él y sus trabajos junto con los de los pitagóricos por sus discípulos quienes divulgaron por mucho tiempo y en el mundo de entonces, la obra del Maestro. Entre los que recibió esta influencia esta Filolao de Tarento ($\pm 425$ A.C.), quien posiblemente fue el primero en escribir sobre el significado del pitagorismo; se afirma que este escrito llegó a poder de Platón lo que le sirvió para aprender sobre la obra de Pitágoras y de sus discípulos.

Como sabemos, la idea de número y de sus propiedades tenía un caracter casi divino entre los pitagóricos; la aritmética estaba sobre la geometría. Un discípulo de Filolao fue Arquitas, quien continuó con la tradición pitagórica en relación a la teoría de números. Arquitas obtuvo diversos resultados fuertes en la aritmética. En esa época se conocían las medias: aritmética, geométrica y armónica (que antes se le conocía como la "contraria"). Arquitas aplicó esas medias a la música. Afirmó que "entre dos números enteros que estén en la razón $\frac{n}{n+1}$ no puede haber ningún número entero que sea su media geométrica". Este resultado ha de tener importantes implicancias. Arquitas consideró que la matemática tiene gran importancia en la educación de la persona. Es famoso su "quadrivium" matemático que consiste en la

- aritmética (números en reposo);
- geometría (magnitudes en reposo);
- música (números en movimiento)
- astronomía (magnitudes en movimiento).

A estas disciplinas se agregó el "trivium", que consiste en la:
•gramática, •retórica y en la •dialéctica. Estas siete artes liberales constituyó la base de una educación deseada.

Arquitas puso a prueba su capacidad matemática al enfrentar al problema de la "duplicación del cubo" que consiste en, dado un cubo de arista conocida, construir un cubo que tenga volumen doble que la del cubo dado. Este problema también es conocido como el "problema de Delos", en relación al oráculo de Delfos. Según Eratóstenes, Hipócrates fue el primer geómetra que encontró el siguiente resultado:

> " **si** entre dos líneas rectas, siendo la mayor el doble que la menor, **se inscribiera** dos medias proporcionales, el cubo será duplicado ".

**En efecto**, si se tuviera

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

entonces

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b}.$$

Ahora basta considerar $a$ como la arista del cubo dado y tomar $b = 2a$ para obtenerse $x^3 = 2a^3$.

Observemos que en el resultado de Hipócrates, la tesis está condicionada a la construcción de las medias proporcionales $x$ e $y$. Hipócrates no consiguió tal construcción. Ello fue tarea de Arquitas de Tarento quién lo consiguió usando una curva de curvatura doble. Su idea es muy ingeniosa y profunda para su época (y aún para la actual); es un modelo de uso de la geometría en el espacio tridimensional. En el lenguaje de la geometría sintética, la estrategia es como sigue ([ALM], [BOY]):

> $\ll$ Sobre el diámetro $OA$ de la base de un cilindro circular recto se describe un semi-círculo, cuyo plano es perpendicular al de la base del cilindro dado; y se hace girar el diámetro en torno de uno de sus extremidades $O$. En este movimiento, este semi-círculo, en cada una de sus posiciones sucesivas, encuentra a la superficie del cilindro en un punto, formando una curva, que Arquitas genialmente hace interceptar con un cono de revolución de eje $OA$, determinando asi un punto $M$, tal que la proyección de $OM$ sobre la base del cilindro está para el radio del cilindro, en la relación del lado del cubo o buscado para el lado del cubo dado $\gg$ .

En otras palabras, la solución de Arquitas consiste en encontrar un punto de intersección de un cilindro circular recto con un toro de diámetro interior cero y con un cono circular recto. En el lenguaje de la geometría analítica (de Descartes), el argumento es como sigue.

> $\ll$ Sea $a$ la arista del cubo a ser duplicado y considérese tres circunferencias de radio $a$ con centro en $(a, 0, 0)$ y situadas cada una de ellas en un plano perpendicular a uno de los ejes de coordenados. Por la circunferencia perpendicular al eje $OX$ se traza el cono circular de vértice el origen $(0, 0, 0)$; por la circunferencia situada sobre el plano $OXY$ considérese el cilindro circular recto de eje paralelo al eje $OZ$, y hágase girar por último la circunferencia situada en el plano $OXZ$ alrededor del eje $OZ$ para engendrar asi un toro $\gg$ .

Se deduce que las ecuaciones de estas tres superficies son (respectivamente),

$$x^2 = y^2 + z^2, \qquad 2ax = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 4a^2\left(x^2 + y^2\right).$$

Estas tres superficies se interceptan en un punto cuya coordenada $x$ es igual a $a\sqrt[3]{2}$, que es precisamente el valor de la arista del cubo buscado, ya que su volumen es, desde luego, $2a^3$.

■

A Arquitas se le atribuye la Proposición 36. Libro IX (Elementos de Euclides) que tuvimos la oportunidad de ver en (ii). 1.2.2. También se atribuye a Arquitas el método para aproximar $\sqrt{2}$, lo que se encuentra en la Proposición 2 Libro VII de los Elementos. Arquitas llegó a construir $\sqrt[3]{2}$.

### 1.2.4. Rumbo a Euclides.

**(i) Construcciones con Regla y Compás.**

En la Antiguedad se partió de tres básicas construcciones (tres primeros postulados de los Elementos de Euclides), que son:


es decir, respectivamente: "puede trazarse una recta (segmento) de un punto a otro"; "una recta finita puede prolongarse continuamente en línea recta"; "una circunferencia puede describirse tomando cualquier centro y una distancia".

Todas las demás construcciones que se efectúen deben basarse en ellas. Como observamos tales construcciones son hechas usando únicamente regla y compás. La antigua regla no tiene marcas (numéricas) y el compás se caracteriza porque si una de sus patas se levanta del papel entonces el compás se cierra inmediatamente; esto es el compás euclideano.

El compás moderno conserva su abertura y puede utilizarse para transportar distancias. Se prueba que: "el compás que se cierra **es equivalente** al compás moderno".

Por lo tanto, por comodidad, es suficiente utilizar al compás moderno. Según J. Steiner, "es suficiente hacer las construcciones solo por medio del lenguaje y no por el uso real de los instrumentos sobre el papel". Debemos remarcar que algunas construcciones hechas anteriormente fueron utilizando solo regla y compás. Esto haremos en el futuro, salvo otra indicación y lo verificaremos cuando veamos a los Elementos de Euclides. Sin embargo, existen construcciones que no pueden realizarse solo utilizando regla y compás. Tres famosos ejemplos de esta naturaleza son:

- **La duplicación del cubo**, que consiste en construir la arista de un cubo que tenga el doble de volumen de otro cubo dado. Este problema ya lo hemos mencionado en el trabajo de Arquitas y se reduce a encontrar $\sqrt[3]{2}$.

- **La trisección de un ángulo cualquiera**, que consiste en dividir un ángulo dado arbitrario en tres partes iguales (existen ángulos que pueden ser trisectados).

- **La cuadratura del círculo**, que consiste en construir un cuadrado que tenga área igual a la de un círculo dado. Esto es, se trata de construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$.

La regla de juego es bien clara: se trata de resolver los anteriores problemas (si tuvieran solución) usando solo regla y compás. La solución es negativa, es decir, con tales condiciones, los tres problemas son insolubles. Es curioso que el problema de construir dos rectas que trisequen a un ángulo de 60 grados, no es posible; sin embargo, si es posible construir todas las circunferencias que sean tangentes a otras tres circunferencias dadas. Euclides, por ejemplo, utilizó construcciones en sus teoremas de existencia (como es el caso en el V Postulado de las paralelas).

En general las reglas de construcción fueron (ver [ANG]):

($\alpha$) Si $A$ y $B$ son puntos dados o construidos, podemos unirlos construyendo el segmento de línea $AB$; si este segmento intersecta cualquier segmento de línea o circunferencias (remarcamos que es usual a la "circunferencia" llamarla "círculo", algo que a veces usaremos indistintamente) previamente construidos, habremos asi construidos los puntos de intersección.

($\beta$) Si $AB$ es un segmento previamente construido y $O$ es un punto previamente dado o construido, nosotros podremos construir una circunferencia con centro $O$ y radio $AB$; si esta circunferencia intersecta cualquier segmento de líneas o circunferencias previamente construidas, nosotros habremos asi construido los puntos de intersección.

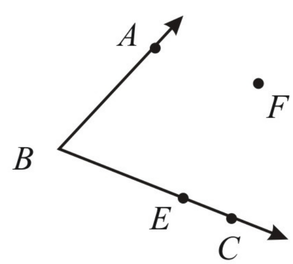
($\gamma$) Si $AB$ es un segmento previamente construido, nosotros podemos extenderla en cualquier dirección a fin de encontrar un segmento o circunferencia previamente construidos (se asume que tal segmento o circunferencia están en "el camino" del segmento extendido) y asi construimos un punto.

($\delta$) La única forma de construir algo es aplicando las anteriores reglas en número finito de veces.

En la obra matemática de los antiguos griegos existen muchas construcciones geométricas; en los Elementos de Euclides, obra maestra en su género, se encuentran construcciones muy ingeniosas, lo que evidencia el alto grado de avance matemático que tuvieron.

Ilustremos lo presentado con algunos ejemplos; se sugiere al lector realizar los trazados indicados en los gráficos correspondientes y hacer los análisis correspondientes.

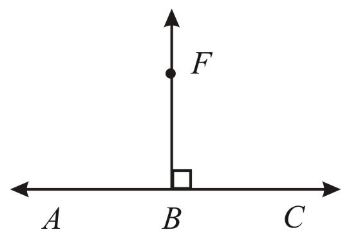
(1) . **Bisección de un Ángulo.** Sea $ABC$ un ángulo, donde previamente se ha construido los lados $AB$ y $BC$. Con centro $B$ y radio $BA$ construyamos una circunferencia que corta a $BC$ en $E$ (si lo cortara; en caso contrario, se prolonga $BC$ en la dirección de $B$ a $C$ hasta que encuentre a la circunferencia en un punto).




Con centros $A$ y $E$ construyamos dos circunferencias con radio común $AE$. Estas circunferencias se encuentran en dos puntos. Sea $F$ el punto que está en el lado de $AE$, fuera de $B$. Entonces $AEF$ es un triángulo equilátero. Unamos $B$ con $F$. $BF$ es el bisector buscado del ángulo $ABC$, ya que los triángulos $BAF$ y $BEF$ son congruentes.

**Caso Particular.** Si $ABC$ es un ángulo que mide 180 grados entonces $BF$ es perpendicular a $AC$.

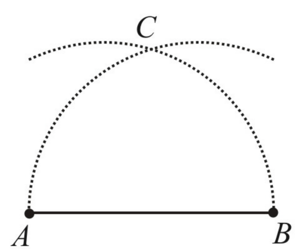
■




(2). **Dada una línea recta finita, construir un triángulo equilátero.** [Euclides. Libro I].

**Solución.**

Euclides parte dando el segmento $AB$; usando $A$ como centro y $AB$ como radio, construye una circunferencia. Luego, con $B$ como centro y $AB$ como radio, construye una segunda circunferencia.




Llamando $C$ al punto donde las circunferencias se interceptan (?), se une ahora $A$ con $C$ y $B$ con $C$. Entonces el triángulo $ABC$ es equilátero, como se desea.

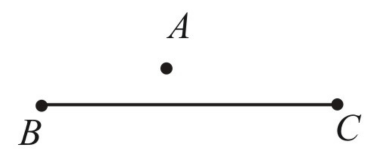
■

(3). **Construir un segmento a través de un punto dado y paralela a un segmento dado.**

**Solución.**

Sean $A$ el punto y $BC$ el segmento dado. Se asume que $A$ no está sobre $BC$. Con centro $C$ y radio $AB$ se construye una circunferencia. Con centro $A$ y radio $BC$ se construye una segunda circunferencia que corta a la primera en un punto $D$, donde $D$ y $B$ están en lados opuestos a

$AC$.




$AD$ es la recta deseada.

∎

(4) . **Construir la Suma de dos Segmentos.**

Dados los segmentos


construir $AB + CD$.

**Solución.**

Con centro $B$ y radio $CD$ se construye una circunferencia. Extendamos $AB$ en la dirección $A$ a $B$; esta extensión encuentra a la circunferencia en un punto $E$. Entonces $AE$ es la suma de $AB$ con $CD$.

∎

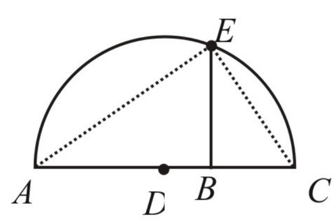
(5) . **Construir la Raíz Cuadrada de un Segmento.**

Dado el segmento $AB$, construir $\sqrt{AB}$.

**Solución.**

Sea $OX$ el segmento unidad; construyamos $AB + OX = AC$.

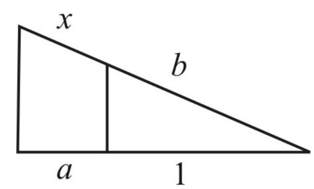
Construyamos ahora $D$, punto medio de $AC$. Con centro $D$ y radio $DC$ se construye una circunferencia. Por $B$ constrúyase una perpendicular a $AC$, la que intersecta a la circunferencia en un punto $E$. Entonces $BE = \sqrt{AB}$.



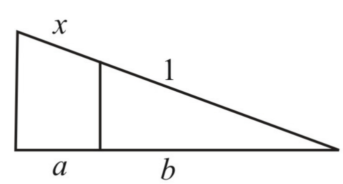
**En efecto**, en el triángulo rectángulo $AEC$, los triángulos (rectángulos) $ABE$ y $EBC$ son similares. Luego, $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BE}{BC} = BE$ (desde que $BC = 1$); por tanto, $AB = BE^2$, esto es, $BE = \sqrt{AB}$.

■

Los griegos tuvieron el ingenio de calcular las operaciones básicas usando argumentos geométricos. Asi, sean $a$ y $b$ dos números (reales positivos), entonces $ab$ y $\dfrac{a}{b}$ son calculados (geométricamente) en la forma siguiente:

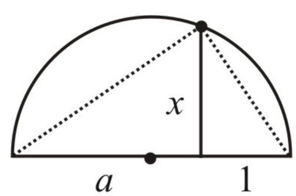



Se tiene, $\dfrac{x}{b} = \dfrac{a}{1}$, luego $x = ab$.




Se tiene, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{a}{b}$, esto es, $x = \dfrac{a}{b}$.

El cálculo de $\sqrt{a}$ es similar a lo visto antes.




$$\frac{1}{x} = \frac{x}{a} \qquad \therefore \quad x = \sqrt{a}.$$

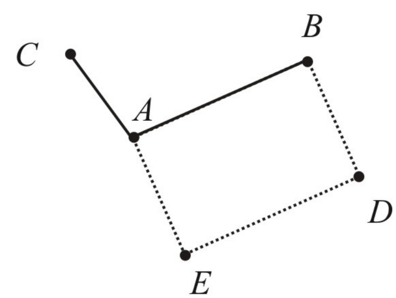
■

**Nota.** Observemos que los griegos construyeron, usando regla y compás, la media proporcional entre las longitudes dadas, 1 y $a$.

(6). **Dados tres puntos $A, B, C$, construir un rectángulo $ABDE$ tal que $AE \simeq AC$.**

**Solución.**

**Nota.** $\simeq$ significa en la notación que $AE$ tiene la misma longitud que $AC$ ($AE$ es "congruente" con $AC$).

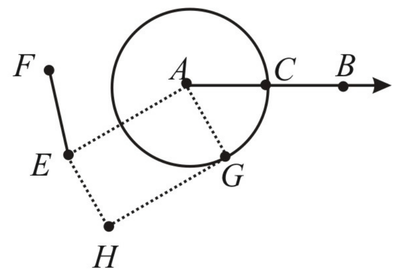



Construyamos $L_1$ perpendicular a $AB$ en $A$ (construcción conocida). Con centro $A$ y radio $AC$ constrúyase la circunferencia $\widetilde{C}$; esta circunferencia intersecta $L_1$ en los puntos $E$ y $E'$. Construyamos ahora $L_2$ perpendicular a $AB$ en $B$; ahora construyamos $L_3$ perpendicular a $L_1$ en $E$. Si $L_2$ fuera paralela a $L_3$, entonces las líneas $AE$ y $AB$ serán paralelas, lo que es falso. Luego, $L_2$ y $L_3$ se interceptan en un punto $D$. Se observa que cada par de lados opuestos de $ABDE$ son paralelos, con tres ángulos rectos. Por tanto, $ABDE$ es un rectángulo.

∎

(7). **Dado un Segmento $EF$ y rayo $AB$, de $A$ a $B$, construir un punto $C$ de $AB$ tal que $AC$ tenga la misma longitud que $EF$.** $(AC \simeq EF)$

**Solución.**

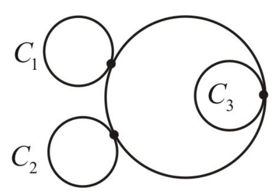



Construyamos un rectángulo $EAGH$, con $EH$ y $EF$ con la misma longitud; luego, $AG$ y $EF$ tienen la misma longitud. Ahora, sea la circunferencia con centro $A$ y radio $AG$; esta circunferencia intercepta al rayo $AB$ en un punto $C$. Por tanto $AC$ tiene la misma longitud que $EF$.

■

(8). **Problema de Apolonio** ($\pm 262 - 190$ A.C.)

En su obra perdida, "**Tangencias**", Apolonio considera el siguiente problema: "dadas tres circunferencias $C_1$, $C_2$ y $C_3$ en un plano, construir con regla y compás, todas las posibles circunferencias $C$ las cuales sean tangentes a $C_1$, $C_2$ y $C_3$".




Esta construcción es un tanto técnica, con diferentes casos a considerar; dejamos para otra oportunidad la discusión de este problema. (Ver [MOI], por ejemplo).

### (ii)Los Tres Clásicos Problemas de la Antiguedad.

Acabamos de mencionar, en (i), a los tres famosos problemas de la Antiguedad: la duplicación del cubo, la trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo. Los antiguos griegos no pudieron resolver tales problemas usando regla y compás. En verdad, no pudieron resolver tales problemas ya que tales problemas **no tienen solución** en tales condiciones. Sin embargo, tuvo que pasar muchísimos siglos para recién saber con rigor que tales problemas son insolubles usando solo regla y compás. En efecto, recién en 1837, Pierre Wantzel (1814-1848) dió la primera demostración rigurosa de que la duplicación del cubo es imposible realizarse; también probó que el ángulo de 60 grados no puede ser trisecado usando solo regla y compás. A Wantzel también se le debe el siguiente resultado: "Si $p$ es un número primo impar, entonces un $n$-polígono regular es constructible si $p$ tiene la forma $2^n + 1$".

La imposibilidad de cuadrar al círculo fue probado por C.L.F. Lindemann (1852-1939) en 1882 quién probó que $\pi$ no es constructible usando solo regla y compás.

$\pi$ no es definible usando operaciones racionales y raices cuadradas. Además, se verifica que $\pi$ es un **número transcendente**, es decir, no es la raíz de cualquier ecuación polinómica con coeficientes racionales. En 1796, Gauss descubrió que un polígono regular de 17 lados es constructible (con regla y compás). Además probó que: "un polígono $n$ regular es constructible **si y solo si** $n = 2^m p_1 p_2 ... p_k$, donde cada $p_i$ es un número primo de la forma $2^{2^h} + 1$".

Estos tres singulares problemas, formulados hace mas de dos mil años, tuvieron una gran influencia en la geometría griega y en el desarrollo de la matemática en la posteridad. El reto de resolver tales problemas llevó al descubrimiento de las secciones cónicas, de diversas curvas cúbicas y cuárticas, y de algunas curvas transcendentes. Ya en tiempos modernos, el intento de resolver tales problemas influyó en el desarrollo de la teoría de ecuaciones, de los números algebraicos y aún de la teoría de grupos, entre otras ideas. Es oportuno remarcar las limitaciones que se tendrían en la Antigua Grecia para realizar construcciones geométricas usando solamente regla y compás. Sin embargo, ellos lograron realizar diversas construcciones muy ingeniosas (ver sección (i) para algunas de tales construcciones) con tales recursos.

Hubieron también otros métodos para estudiar a tales problemas; por ejemplo, Eratóstenes construyó el "mezolabio" para construir aproximadamente al cubo doble. Las secciones cónicas fue otro método, un fructífero método. Presentamos a continuación algunos comentarios sobre estos tres clásicos problemas. Es un tema para estudiar con mayor extensión y detalles.

**La Duplicación del Cubo.**

**El Problema de Delos.** Posiblemente el origen del problema de la duplicación del cubo esté en una leyenda que, según Eratóstenes, afirma: "Se cuenta que uno de los antiguos poetas trágicos (¿Eurípedes?) hiciese aparecer en escena al rey Minos en el acto de ordenar la construcción de una tumba para su hijo Glauco y que advirtiendo que la tumba tenía en cada uno de sus lados una longitud de cien pies, exclamara: ≪escaso espacio en verdad concedéis a un sepulcro real; duplicadlo, conservando siempre la forma cúbica, duplicad de inmediato a cada uno de los lados≫".

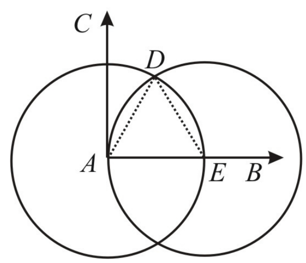
Se observa que la orden dada por el rey no lleva a la solución pues al duplicar el lado del cubo, el volumen del cubo se octuplica. Surgió entonces el problema de satisfacer el deseo del rey Minos. Hipócrates de Quíos estudió esta cuestión, encontrando que si entre dos rectas (segmentos), una doble de la otra, se insertaran dos medias proporcionales, entonces se duplicará el (volumen) cubo. Pero, ¿es factible tal inserción?. Esto fue una cuestión cuya dificultad no es menor que el problema original. El problema de insertar dos (segmentos) medias proporcionales entre dos segmentos dados, uno el doble del otro, fue resuelto por Arquitas (ver (ii). 1.2.3). Sin embargo, estas contribuciones, si bien ingeniosas, no eran en el fondo soluciones del problema. Ante esta situación, se introdujeron algunas curvas especiales. Esto fue un gran avance en el pensamiento matemático de los griegos. En esta dirección se tiene una solución dada por el gran matemático griego **Eudoxo** (±370 A.C.), trabajo que se perdió.

Una importante contribución en esta dirección fueron las dos soluciones al problema que dió Menecmo (±350 A.C.) introduciendo para tal fin a las **secciones cónicas**.

Apolonio también contribuyo con una solución al problema. **Diocles** (±180 A.C.) inventó la curva llamada **cisoide** para a través de ella resolver la cuestión. Desde el punto de vista algebraico, la duplicación del cubo puede formularse así: ¿Puede o no la operación de extraer raíz cúbica de un número racional ser reducida a un número finito de extracciones de raices cuadradas? Descartes, en 1637, tuvo dudas ante esta cuestión. Tales dudas fueron clarificadas en 1837 con el trabajo de Wantzel, lo que ya hemos comentado al inicio de esta sección.

**La Trisección de un Ángulo.**

Posiblemente el problema de la trisección de un ánglo sea el menos famoso de los citados clásicos problemas de la Antiguedad. Mientras la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo **no** son solubles con regla y compás, la trisección del ángulo es soluble, con tales instrumentos, en algunos casos particulares. Por otro lado, no se conoce el origen histórico de este problema. A manera de ilustración, veamos como un ángulo recto puede ser trisecado con regla y compás.

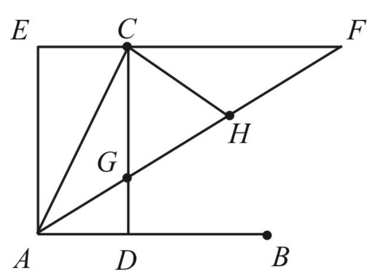



Sea $BAC$ un ángulo recto; con centro $A$ construyamos una circunferencia la que corta al lado $AB$ en $E$. Con centro $E$ y radio $AE$ construyamos otra circunferencia, la que corta a la primera en $D$. El triángulo $ADE$ es equilátero, luego el ángulo $DAE$ mide 60 grados y el ángulo $DAC$ medirá 30 grados. Luego, por la construcción (1), se ha obtenido la trisección del ángulo recto $BAC$.

■

Veamos ahora la trisección de un ángulo (agudo) según Hipócrates.

Sea $BAC$ un ángulo dado; de $C$ bajemos la perpendicular $CD$ a $AB$; completemos el rectángulo $ADCE$. Ahora extendamos $EC$ hasta $F$ tal que $AF$ corta a $CD$ en $G$ y tal que $GF = 2AC$.




Se tiene:

ángulo $FAB$ es igual a $\frac{1}{3}$ ángulo $BAC$.

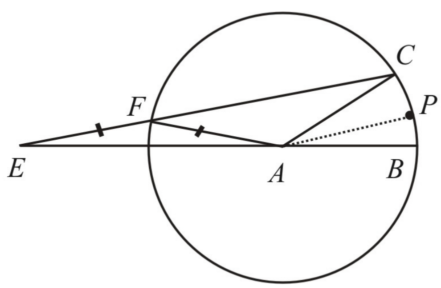
**En efecto**, sea $H$ el punto medio de $GF$ y asi, $GH = HF = AC$. Pero $FCG$ es un ángulo recto, luego $CH = GH = HF \ \ (= AC)$. Además, ángulo $FAB =$ángulo $CFA =$ángulo $FCH$.

Desde que $AC = CH$, ángulo $CAH =$ ángulo $CHA$. Entonces, ángulo $CHA =$ ángulo $HFC+$ángulo $FCH = 2\,($ángulo $HFC)$, esto es, ángulo $CAH = 2\,($ángulo $FAB)$, luego: ángulo $BAC =$ ángulo $CAH+$ángulo $FAB = 3$ ángulo $FAB$.

■

Observemos que el problema es reducido a la construcción del segmento $GF$ tal que $GF = 2AC$. ¿Es esto posible? ... no lo es con una regla sin marcas y con compás. Sin embargo, ello es posible vía una ingeniosa construcción mecánica. A **Arquímedes** le debemos otra solución mecánica. Veamos.

Sea $BAC$ un ángulo dado; con centro $A$ construimos una circunferencia tal que $AB$ y $AC$ son radios. Desde $C$ trazamos una línea la que debe cortar a la extensión de $BA$ en el punto $E$; tal línea debe cortar a la circunferencia en un punto $F$ con la propiedad de que $EF$ sea igual al radio de la circunferencia. (Esta es la cuestión!).



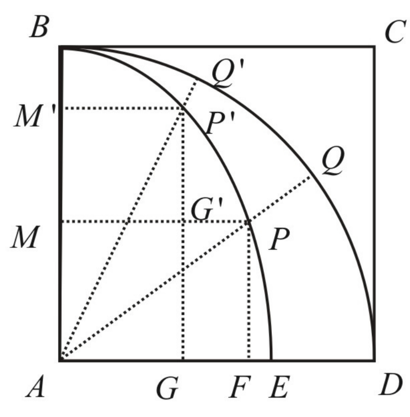

Sin embargo, tal construcción puede ser hecha vía una metodología mecánica marcando una longitud (en la regla) igual al radio de la circunferencia y moviéndola conservando una marca sobre $BA$ extendida y teniendo la segunda marca sobre la circunferencia. Movemos la regla conservando una marca sobre la línea y la otra sobre la circunferencia hasta que la regla pase a través de $C$. La línea $EC$ es asi construida. Ahora trazamos desde $A$ el radio $AP$ de la circunferencia tal que $AP$ sea paralela a $EC$. **Se tiene** que $AP$ trisecta al ángulo $BAC$. **En efecto**,

$$\begin{aligned} \text{ángulo } PAC &= \text{ángulo } ACF = \text{ángulo } CFA = \text{ángulo } FEA + \text{ángulo } FAE \\ &= 2\,(\text{ángulo } FEA) = 2\,(\text{ángulo } PAB)\,. \end{aligned}$$

■

**Hipias de Elis** ($\pm 425$ A.C.) fue un reconocido sofista que probablemente fue de la época de Sócrates. "Sofista" era una expresión que significaba filósofo y sabio; un sofista era un experto en algo que él enseñaba. Hipias tuvo una extraordinaria memoria que le permitió acumular muchos conocimientos de su época y de su pasado; ganó mucho dinero con su talento. A él le debemos una famosa curva transcendente (que no son algebraicas), la "**cuadratriz**", la que fue usada en la solución del problema de la trisección de un ángulo, y también para resolver la cuadratura del círculo; justo el término "cuadratriz" se debe a su utilización en éste problema.

Según **Pappus** (de Alejandría)($\pm 300$ D.C.) la cuadratriz es construida de la siguiente forma: ≪Dado un cuadrado $ABCD$ (ver figura adjunta), con centro $A$ constrúyase la circunferencia $BQD$ y hagamos mover la recta $AB$ de modo que el punto $A$ quede fijo, en tanto $B$ describe el cuadrante $BQD$; ahora la recta $BC$ permanece siempre paralela a $AD$ en tanto el punto $B$ recorre $BA$; además, la recta $BA$ describe el ángulo $BAD$ con movimiento uniforme, recorriendo el punto $B$ sobre $BQD$; y con el mismo movimiento se recorre la recta $BC$ en tanto el punto $B$ recorre la recta $BA$. Sucede luego que $AB$ y $BC$ vienen a coincidir al mismo tiempo con $AD$. Supuestos asi regulados los movimientos, las rectas $AB$ y $BC$ se intersectan en cada una de sus posiciones en un punto móvil, punto que describe en el espacio limitado por las rectas $BA$, $AD$ y por el cuadrante $BQD$ una cierta línea $BPE$, la que se muestra conveniente emplear cuando se procura un cuadrado igual a un círculo dado. Pero su principal propiedad es ésta, que conducida una recta cualquiera $APQ$ para la circunferencia, todo el cuadrante $BQD$ es para el arco $BQ$, como la recta $BA$ para $PF$, lo que es evidente por el modo de la generación de la línea≫ . (Ver [ALM] para otros comentarios).



En otra palabras, la cuadratriz es construida haciendo que el lado $BC$ se traslade paralela y uniformemente hasta coincidir con $AD$; al mismo tiempo, el lado $AB$ gira alrededor de $A$ en el sentido de las agujas del reloj hasta que coincida con $AD$. El lugar geométrico de la intersección de estos dos lados genera una curva, la cuadratriz. Esta curva permite reducir el problema de la división de un ángulo en cualquier número de partes iguales **al problema** de la división del segmento $AB$ en partes iguales.

La propiedad de la cuadratriz es ($\measuredangle BAD$ = ángulo $BAD$) :

$$\frac{\measuredangle BAD}{\measuredangle Q'AD} = \frac{\text{arc } BQ'D}{\text{arc } Q'D} = \frac{AB}{P'G} \ ;$$

luego, si $\theta$ es el ángulo $P'AD$ (hecho con cualquier $AP'$ y con $AD$), $\rho$ es la longitud de $AP'$ y $a$ es la longitud del lado del cuadrado, entonces tendremos: $\text{sen}\theta = \dfrac{P'G}{\rho}$, esto es, $P'G = \rho\text{sen}\theta$; también

$$\frac{\text{arc } BQ'D}{\text{arc } Q'D} = \frac{a}{P'G} \ ,$$

esto es, $P'G = \dfrac{a\theta}{\frac{\pi}{2}}$. Por lo tanto, $\dfrac{\rho\text{sen}\theta}{a} = \dfrac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$, que es la ecuación polar de la cuadratriz.

Veamos ahora como la cuadratriz sirve para dividir el $\measuredangle Q'AD$ no solamente en tres partes iguales, si no en cualquier razón dada. **En efecto**, sea $P'G$ dividida en $G'$ en la razón dada. Consideremos $G'P$, paralela a $AD$, y que encuentra a la curva en $P$; unamos $A$ con $P$ ($AP$) y extendámosla hasta encontrar a la circunferencia en el punto $Q$. Luego,

$$\frac{\measuredangle Q'AQ}{\measuredangle QAD} = \frac{P'G'}{G'G}.$$

Examinemos a esta relación. Dado el ángulo $Q'AD$ (que mida, por ejemplo, 60 grados), deseamos trisectarlo. Para ello tomemos la razón $\dfrac{P'G'}{G'G} = \dfrac{1}{2}$; entonces, $\dfrac{\measuredangle Q'AD}{\measuredangle QAD} = \dfrac{1}{2}$, esto es, $\measuredangle QAD = 2\measuredangle Q'AD$. Por tanto,

$$\measuredangle Q'AD = \measuredangle Q'AQ + \measuredangle QAD = 3\measuredangle Q'AQ$$

Luego, $\measuredangle Q^{'}AD$ mide 60 grados, $\measuredangle Q^{'}AQ$ mide 20 grados y habremos trisectado tal ángulo.

■

Es interesante observar que un ángulo de 60 grados **no es posible** ser trisecado usando solo regla y compás. Veamos, sucintamente, el argumento de **Wantzel** para demostrar que, bajo tales condiciones, el citado ángulo no puede ser dividido en tres ángulos iguales. **En efecto**, usando argumentos algebraicos y de trigonometría (desconocidos por los griegos), Wantzel prueba que si tal ángulo puede trisecarse entonces la ecuación cúbica $x^3 - 3x - 1 = 0$ debe poseer una solución constructible, es decir, una solución cuya longitud puede construirse con regla y compás. Wantzel verifica que si tal ecuación cúbica tiene una solución construible entonces ella debe tener también una solución racional. Pero, vía un argumento por el absurdo, él verifica que la ecuación cúbica se resuelve por un número irracional.

De esta manera, al fin en 1837, luego de dos mil años en ser formulado, el problema de la trisección de un ángulo fue resuelto definitivamente.

A esta altura de la discusión de este clásico problema, conviene clarificar y resumir el panorama general. El problema es: "dado un ángulo arbitrario, se trata de dividirlo en exactamente tres partes iguales, usando solo regla (sin graduar) y compás".

Otra condición del problema es que la construcción debe hacerse solo con un número finito de pasos. Estas condiciones se deben respetar rigurosamente. Los antiguos griegos, ante lo difícil del problema, idearon otros recursos que consistió fundamentalmente en la construcción de **nuevas curvas**, algo muy importante en la evolución de la matemática. Además, con regla y compás se puede trisecar algunos casos particulares de ángulos, como lo es el ángulo recto. A través de la historia de la matemática se introdujeron diversos otros métodos (que presentaremos oportunamente), incluyendo un número abundante de soluciones erradas.

P. L. Wantzel fue un ingeniero, matemático y linguista que se formó en la École Polytechnique de Paris. Tuvo una breve vida un tanto desorganizada; diversificó sus intereses académicos. Un profesor lo recordó diciendo:

" ... Estristeció asi a los que lloran su muerte prematura".

**La Cuadratura del Círculo.**

El éxito obtenido por Hipócrates al cuadrar cierta clase de lúnulas motivó a los antiguos griegos al intento de obtener la cuadratura del círculo usando solo regla y compás.

Este problema es uno de los mas famosos en la historia de la matemática pues en el intento de resolverlo, los matemáticos introdujeron nuevas ideas, diversos métodos y precisar el significado del número $\pi$; fue una controvertida cuestión, en donde también se dieron diversas soluciones correctas pero violando las reglas de juego; también a través del tiempo, se dieron soluciones erradas. El problema de la cuadratura del círculo es bien antiguo pues ya aparece en el papiro de Rhind, problema 48, en donde se ofrece una aproximación del círculo vía un cuadrado circunscrito.

En la historia de la duplicación del cubo y de la cuadratura del círculo hubieron dos hermanos que trabajaron en tales problemas; ellos fueron: Dinóstrato ($\pm$350 A.C.) y Menecmo ($\pm$350 A.C.). Mientras el primero "resolvio" el problema de la cuadratura del círculo, su hermano "resolvio" el otro problema. Remarcamos que "resolvio" significa que tales problemas fueron resueltos usando curvas "nuevas" para la época, es decir, sin usar regla y compás, como es la condición-hipótesis. Según Pappus, fue Dinóstrato el primero en observar que la cuadratriz era aplicable en el problema de la cuadratura del círculo. Veamos. Según la figura que muestra a la cuadratriz (ver Hipias de Elis), Dinóstrato prueba que: dado el cuadrado $ABCD$, el cuadrante circular $BD$, de centro $A$, y la cuadratriz $BPE$, se tiene que

$$\frac{B\overset{\frown}{Q}D}{BA} = \frac{BA}{AE}.$$

Luego afirma, "si se determina la tercera proporcional entre las rectas $AE$ y $AB$, se obtiene el arco $BQD$ cuyo cuádruple es igual a la circunferencia".

Asi, Dinóstrato llega a la **rectificación de la circunferencia**. Pappus agrega ([ALM]), ≪se puede, asi, construir un cuadrado igual al círculo, por eso que el rectángulo teniendo por lados el perímetro del círculo y el radio, es el doble del círculo, como fue demostrado por Arquímedes≫ . Veamos algunos argumentos explícitos sobre lo afirmado por Pappus; para ello se usa argumentos de trigonometría y del cálculo diferencial. Volvamos a Hipias de Elis y al gráfico de la cuadratriz mostrado en esa oportunidad. Recordemos que la ecuación polar de tal curva es

$$\frac{\text{sen}\theta}{\theta} = \frac{2a}{\pi\rho},$$

donde $\theta$ es el ángulo $P^{'}AD$. Luego, el límite de $\rho$, cuando $\theta \to 0$ es $\dfrac{2a}{\pi}$. De esta manera el punto $E$ está bien determinado. Lo que Pappus nos transmite en su anterior comentario es un resultado atribuido a Dinóstrato, de que fue probado con argumentos de geometría básica. Asi se tiene el

**Teorema (Dinóstrato).** El lado $a$ del cuadrado $ABCD$ es la media proporcional entre el segmento $AE$ y el arco de cuarto de circunferencia $\overset{\frown}{BD}$.
**Prueba.** La tesis es:

$$\frac{\overset{\frown}{BD}}{AB} = \frac{AB}{AE}\ . \tag{*}$$

Los griegos usaron el método de demostración indirecta que se basa en refutar las otras dos alternativas, que en este caso, si tuviéramos (*) con $AE^{'} > AE \ \ \left(E^{''} < E < E^{'}\right)$ entonces se debe llegar a una contradicción, y si tuviéramos (*) con $AE^{''} < AE$, también se debería tenar una contradicción. **En efecto**, constrúyase la circunferencia de centro $A$ y radio $AE^{'}$ la que cortará a la cuadratriz en el punto $P^{'}$ y al lado $AB$ en el punto $T$. Sea la perpendicular $P^{'}G$ al lado $AD$ desde $P^{'}$. Dinóstrato conocía que:

$$\frac{\overset{\frown}{BD}}{\overset{\frown}{TE'}} = \frac{AB}{AE'}$$

("los arcos de circunferencias correspondientes al mismo ángulo central, son entre sí como sus radios"). Por hipótesis se tiene,

$$\frac{\overset{\frown}{BD}}{AB} = \frac{AB}{AE'}\ ;$$

esto y la anterior igualdad implica que $AB = \overset{\frown}{TE^{'}}$. Luego se debe tener $\overset{\frown}{P^{'}E} = P^{'}G$, lo que es absurdo ya que la perpendicular es mas corta que cualquier otro segmento o curva que parta de $P^{'}$ al lado $AD$.

En el caso $E^{''}$, $\ E^{''} < E$, se obtiene también una contradicción.

■

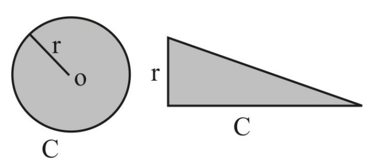
Observemos que en el teorema de Dinóstrato existe un mensaje: si tenemos el punto $E$, entonces existe un resultado que nos relaciona tres segmentos con un arco de circunferencia. Luego se puede construir un segmento $b$ de longitud igual a la del arco $BD$ ("construcción geométrica del cuarto término de una proporción conociendo a los otros tres"); ahora se construye un rectángulo de lados $2b$ y $a$, el que tiene un área igual a la del círculo de radio $a$. Finalmente, se construye un cuadrado de área igual a la de este rectángulo (tomando como lado del cuadrado a la media geométrica de los lados de rectángulo). De esta manera se obtiene la cuadratura del círculo vía la cuadratriz.

En aquellos argumentos está también implícito el siguiente resultado debido a Arquímedes.

**Teorema (Arquímedes).** *El área de cualquier círculo es igual al área del triángulo rectángulo que tiene por catetos al radio del círculo y a la longitud de la circunferencia asociada al círculo dado.*

**Prueba.**

Arquímedes comienza con una circunferencia $C$, con centro $O$ y radio $r$; y con un triángulo rectángulo teniendo base de longitud igual a la longitud de la circunferencia, que llamaremos aún $C$.




Sea $A$ el área del círculo y $T$ el área del triángulo citado.

La tesis es, entonces, probar que $A = T$.

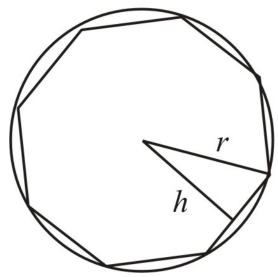
Observemos que Arquímedes conocía que $T = \dfrac{1}{2}\, rC$. Nuevamente usamos el método de reducción al absurdo.

**Caso:** Supongamos $A > T$.

Entonces $A - T$ es una cantidad positiva. Arquímedes conocía que, inscribiendo un cuadrado dentro de la circunferencia y repitiendo bisectando sus lados, él podría llegar a un polígono regular inscrito dentro de la circunferencia cuya área difiere del área del círculo en una cantidad menor que $A - T$.

Es decir, se tiene $A-$(área polígono inscrito)$< A - T$. Por tanto, $T <$(área polígono inscrito).

Pero, viendo la figura adjunta, si $Q$ es el perímetro del polígono adjunto, tenemos $Q < C$ y $h < r$, donde $h$ es el apotema del polígono.

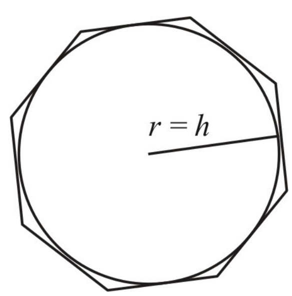



Luego, (área polígono inscrito)$= \dfrac{1}{2}\, hQ < \dfrac{1}{2}\, rC = T$. Asi, Arquímedes encontraría la contradicción $(T < T)$. De esta manera, el área del círculo no puede ser mayor que el área del triángulo.

**Caso:** $A < T$.

Ahora $T - A$ es el exceso del área del triángulo sobre la del círculo. Ahora se circunscribe un polígono regular sobre el círculo; el área del polígono puede exceder al área del círculo en una cantidad menor que $T - A$.

De esta manera, (área polígono circunscrito)$-A < T - A$, es decir, área polígono circunscrito$< T$. Si $h$ es el apotema del polígono y $Q$ el perímetro, entonces $r = h$ y $Q > C$.




Luego, (área polígono circunscrito)$= \dfrac{1}{2}\, hQ > \dfrac{1}{2}\, rC = T$. Vemos que nuevamente se obtiene una contradicción $(T > T)$.

Asi, el área del círculo no puede ser menor que la del triángulo.

**Conclusión:** $A = T$.

■

**Nota.** En su oportunidad estudiaremos la obra matemática de Arquímedes y veremos otras contribuciones del genial científico siracusano. Por otro lado, cuando estudiemos el aspecto histórico de la matemática del siglo XIX tendremos los recursos para comprender la solución de Lindermann sobre la insolubilidad de la cuadratura del círculo usando regla y compás. Sin embargo, creemos conveniente dar un breve panorama de los argumentos usados en la citada solución. Es claro que el lenguaje empleado será la del siglo XIX.

El problema de la cuadratura del círculo permaneció insoluble desde la época de Hipócrates hasta 1882 en que F. Lindermann probó, de un modo inequívoco, que la cuadratura del círculo es imposible usando regla y compás. Veamos ([DUN. 1]).

Un número real es llamado **algebraico** si el es la solución de alguna ecuación polinómica

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son números enteros. Por ejemplo, $\frac{4}{5}$ es algebraico ya que es solución de $5x - 4 = 0$; también lo es $\sqrt{2}$ (solución de $x^2 - 2 = 0$); $\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$ es algebraico pues es solución de $x^6 - 2x^3 - 4 = 0$.

Un número real es llamado **transcendente** si el no es algebraico. Una magnitud es "**constructible**" si ella se puede construir con regla y compás. Comenzamos con una longitud unidad (1); la idea es construir (con regla y compás) otras cantidades, longitudes o números.

¿Todo número real es constructible? ... Es claro que se pueden construir, en tales condiciones, las longitudes 2,3,4,...; también los números racionales $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{9}{14},$ ... También se puede construir con regla y compás $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ (los antiguos griegos lo hicieron), ...; son constructibles números irracionales que contengan solo raices cuadradas. Si dos magnitudes son constructibles entonces se puede construir su suma, su diferencia, su producto y su cociente. Asi, por ejemplo, $\sqrt{\frac{4-3\sqrt{2}}{1+\sqrt{4+\sqrt{23}}}}$ es constructible. Se verifica que todo número o cantidad constructible es un número algebraico. La pregunta crucial es: un número transcendente, ¿es constructible? La respuesta es ... no. Por otro lado, Lindermann probó que $\pi$ es un número transcendente y esto es la clave en la solución del problema de la cuadratura del círculo ya que, $\pi$ no es un número algebraico, y por tanto, $\pi$ no es un número constructible con regla y compás. (Tampoco será constructible $\sqrt{\pi}$, pues $\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi} = \pi$ no es constructible).

Ahora estamos en condiciones de dar un panorama de la prueba del

**Teorema.** *La cuadratura del círculo* ***no*** *es soluble con regla y compás.*
**Prueba.**

Por el absurdo, asumamos que el círculo fuera cuadrable. Sin pérdida de generalidad construyamos un círculo con radio $r = 1$. Entonces, su área es $\pi r^2 = \pi$. Si el círculo fuera cuadrable entonces podemos emplear regla y compás para construir un cuadrado que tenga también a $\pi$ como área. Sea $x$ la longitud del lado de tal cuadrado. Entonces tendríamos, $\pi =$ área del círculo unitario= área del cuadrado= $x^2$.

Luego, $x = \sqrt{\pi}$; pero $\sqrt{\pi}$ no es constructible con regla y compás, y por tanto el lado $x$ no sería constructible con regla y compás.

**Conclusión:** La cuadratura del círculo no es factible hacerse con regla y compás.

■

**(iii)Platón. La Academia.**

La etapa histórica que estamos estudiando se llama el **Período Helénico**, una etapa muy fructífera en matemáticos y pensadores, y que preparó al gran **Período Helenístico**, época cumbre de la matemática griega y del pensamiento científico-filosófico.

El Período Helénico comprende desde Tales y sus contribuciones, asi como a Pitágoras y su Escuela Pitagórica; incluye a **Platón** y su **Academia**. Este período vió florecer matemáticos de gran originalidad como Hipócrates de Quíos, Arquitas, Hipias, Menecmo, Dinóstrato, Eudoxo, entre otros grandes pensadores. En esta época se plantearon los grandes problemas clásicos vistos en (ii); en el intento de resolver estos problemas se introdujeron muchas bellas ideas y métodos que ubicaron a la geometría griega en un alto nivel. Entre esas ideas se construyeron diversas **nuevas curvas**, todo una novedad en esa época.

**Zenón** de Elea ($\pm$450 A.C.) se hizo célebre por las dificultades que creó a través de sus polémicos ejemplos que propuso con sus paradojas sobre Aquiles y la tortuga y de la flecha que vuela; ambas paradojas están vinculadas a la idea del "infinito" y de las cantidades "infinitesimales", algo que fue profundo para aquella época. La paradoja de Aquiles lleva a considerar la suma infinita

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + ...$$

En aquella época, es claro, no se conocía la idea de límite (tuvo que pasar un promedio de dos mil años para que se precise tal idea). Si $n$ tiende a "infinito" sabemos que la suma tiende a 1. Es decir Aquiles alcanza a la tortuga y no al contrario, como sostenía Zenón. Su argumento fue mas filosófico que matemático, lo que produjo controvertidas discusiones sobre el infinito y sobre lo "muy pequeño".

El método dialéctico de Zenón fue adoptado por **Sócrates** (470-399 A.C.), famoso filósofo, hombre sabio y que estuvo interesado en "formar hombres"; no dejó algo escrito pero conocemos de su filosofía por los trabajos de su célebre discípulo **Platón** (427-348 A.C.). La matemática debe casi nada a Sócrates, salvo sus razonamientos rigurosamente "matemáticos", pero si a su distinguido alumno.

Platón nació en Atenas; su familia era adinerada y noble. Se le llamó Platón por sus anchas espaldas; tuvo una cuidadosa educación. Tenía 20 años cuando conoció a Sócrates, el gran Maestro que influiría en su vida de filósofo. Cuando murió Sócrates, Platón viajó mucho por el mundo de entonces; estuvo en Egipto, en el Oriente y en la Magna Grecia. A su regreso a Atenas en el año 377 fundó una escuela de filosofía, la **Academia**, la que fue un ambiente de estudio, de meditación y de discusiones de variados temas. A diferencia de otros pensadores de la Antiguedad, la mayor parte de su obra nos ha llegado; escribió diversas obras como son, La República, Fedón, Timeo, Teeteto y Epínomis.

Platón en si no fue un matemático, menos aún lo fue su maestro Sócrates, pero en la Academia florecieron bajo su estímulo, diversos matemáticos que contribuyeron con aportes valiosos a la matemática. Alumno distinguido de Platón fue **Aristóteles**, quien fue un sabio filósofo y tuvo amplios conocimientos de su época. El período comprendido entre la muerte de Sócrates y la de Aristóteles tuvo dignos representantes de la matemática griega, como son: Teodoro de Cirene (470-390 A.C.), Teeteto (415-369 A.C.), Eudoxo de Cnido (408-355 A.C.), Menecmo (±350 A.C.), Dinóstrato (±350 A.C.) y Autólico de Pitania (±330 A.C.). Platón fue cautivado por la belleza de la matemática de su época, llegando a ponerla en la cumbre del pensamiento humano.

Se afirma que en la puerta de la Academia se escribió: “No entre aquí nadie que ignore la geometría”. Platón fue un hacedor de matemáticos y ahí radica básicamente su influencia a la historia de la matemática. Sus reflexiones son originales y de valor filosófico en particular; ellos se encuentran en sus “diálogos”. Se afirma que hizo algunas contribuciones matemáticas propias; se interesó sobre: los sólidos regulares y semi-regulares; sobre la construcción de los sólidos regulares; las medias geométricas entre dos números cuadrados y dos números cúbicos; comentó sobre el problema de la duplicación del cubo; le interesó la delicada idea de los inconmensurables.

Según Platón, su maestro Teodoro de Cirene fue el primer matemático en demostrar la irracionalidad (en la terminología actual) de las raices cuadradas de números naturales que no son cuadrados perfectos; demostró que $\sqrt{2}, \sqrt{3},\ ..., \sqrt{17}$ son números irracionales. Platón distinguió entre la aritmética (teoría de números) y la logística (técnica de computar números). Debemos remarcar que estamos en el siglo IV A.C.; el anterior fue el siglo de Pericles; entre ambos períodos se produjo un engrandecimiento del conocimiento en general, algo similar a lo que ocurriría muchos siglos despues en el Renacimiento Italiano. Platón vive en el auge del siglo IV, así como su célebre alumno Aristóteles, quien funda el **Liceo**. La Academia y el Liceo fueron dos grandes centros del saber, de la filosofía y tuvieron influencia en el desarrollo de la matemática. Platón solo reconocía a las construcciones hechas con regla y compás por la belleza que se logra con tales instrumentos; la línea y la circunferencia son la base para construir los entes geométricos. También alabó al triángulo pues las caras de los poliedros regulares pueden simplificarse a triángulos y para Platón los poliedros regulares eran divinos objetos que los utilizó para interpretar a la naturaleza. Platón idealizó a la matemática en contra de su origen histórico de haber surgido en íntima relación con la naturaleza física. (Ver [ALM], [HEA] Vol. I para otros comentarios). El idealismo platónico se orientó a resaltar la naturaleza ideal de las verdades matemáticas; estas ya pre-existen en el universo eterno de las ideas. Sus argumentos básicos serían recogidos por Euclides en los Elementos.

La Academia de Platón fue el centro matemático del mundo de entonces; ahí se cultivaron matemáticos de gran nivel científico, famosos maestros e investigadores. En opinión de los investigadores de la Historia de la Matemática fue **Eudoxo de Cnido** (408?-355?) el matemático y astrónomo mas célebre de su época; fue el discípulo que glorificó la influencia que tuvo Platón en la matemática.

**(iv)Eudoxo de Cnido.**

En la Academia Platón tuvo distinguidos discípulos; uno de ellos fue **Teeteto de Atenas** quien fue un brillante estudiante y en un combate fue seriamente herido; llevado a casa de Platón falleció al poco tiempo. En memoria a su alumno, el maestro publicó el diálogo "Teeteto" en donde narra un diálogo entre Sócrates, Teodoro y Teeteto, cuando éste era muy joven. Teeteto probó que "la raíz cuadrada de un número natural es irracional **si y solo si** el número natural no es un cuadrado". Se afirma que su obra sirvió de material para los Libros X y XIII de los Elementos de Euclides.

Otro distinguido estudiante de la Academia fue **Eudoxo de Cnido**. A los 23 años viajo a Atenas para estudiar con Platón. Fue un hombre polifacético pues fue filósofo, orador, astrónomo, médico y famoso matemático. Viaja a Egipto para aprender la astronomía de los antiguos egipcios. Siendo ya un renombrado científico, cuando estaba en Atenas tenía frecuentes discusiones con su maestro sobre delicados temas del saber de la época. Poco se sabe de fuente directa de su obra; se la conoce a través de los comentaristas. Sus dos contribuciones mas importantes son: • la **teoría de las proporciones**, la que encontramos en el Libro V de los Elementos; • el **método exhaustivo**. Según Proclo, Eudoxo contribuyó con diversos teoremas en geometría, en donde perfeccionó el análisis y la síntesis; estudió a los números irracionales con un rigor que perduró hasta el siglo XIX, época en que se formaliza la teoría de los números irracionales con Dedekind. Arquímedes reconoció que a Eudoxo le pertenece el llamado "axioma de continuidad" que afirma: ≪dadas dos magnitudes entre las que existe una razón, se puede encontrar un múltiplo de uno de ellos que exceda a la otra≫. Este resultado fue vital en el desarrollo posterior de la matemática. Asi, se tiene el siguiente resultado, básico en el método exhaustivo:

**Proposición [E].** ≪Si de cualquier magnitud se sustrae una parte superior o igual a su mitad y si del resto se sustrae una parte superior o igual a su mitad, y si se continúa este procedimiento de subdivisión, quedará una magnitud mas pequeña que cualquier magnitud dada de la misma especie≫ .

**Teoría de las Proporciones.**

Como el método exhaustivo es una generalización de la teoría de las proporciones, comenzamos viendo algunos argumentos de ésta teoría, ([STI],

[MOI]). La teoría de las proporciones de Eudoxo es expuesta en el Libro V de los Elementos de Euclides. La teoría permite tratar a las longitudes como números, números racionales. Remarcamos que los antiguos griegos no aceptaban a los números irracionales pero si a las longitudes irracionales, como es la diagonal del cuadrado unitario, por ejemplo.

Una **longitud** es **rracional** si ella es múltiplo de una longitud fija. La singular idea de Eudoxo fue: "una longitud $L$ es determinada por aquellas longitudes racionales menores que ella, y por aquellas longitudes racionales mayores que $L$". Asi, si $L_1$ y $L_2$ son dos longitudes dadas, diremos que $L_1 = L_2$ si cualquier longitud racional menor que $L_1$ es también menor que $L_2$, y si cualquier longitud racional menor que $L_2$ es también menor que $L_1$. Asi también diremos que $L_1 < L_2$ si existe una longitud racional mayor que $L_1$ pero menor que $L_2$.}

En tales argumentos está presente la **idea del infinito**, que los griegos siempre evitaban, pero obsérvese que existe un número infinito de longitudes irracionales menores que $L$. Eudoxo "evita al infinito" usando la palabra "arbitraria" longitud racional menor que $L$. Él estuvo muy cerca de construir a los números irracionales y no esperarse dos mil años! para que se elabore tal teoría. La clarificación del infinito fue logrado con la teoría de conjuntos de Cantor en el siglo XIX. Con esta teoría y el trabajo de Dedekind (1872) se pudo construir al número irracional. Es asombroso la similitud de la moderna teoría con lo hecho por el viejo matemático griego. Asi, $\sqrt{2}$ es definido por el par de conjuntos ($r$ es número racional):

$$\{r/r^2 < 2\} \quad \text{y} \quad \{r/r^2 > 2\} \ .$$

La idea es similar para definir cualquier otro número irracional. Este método es la famosa "**Cortadura de Dedekind**", algo que estaba latente dos milenios atrás en la mente de Eudoxo.

## El Método Exhaustivo.

Los primeros problemas que ocurrieron en la historia del cálculo estuvieron relacionados con la computación de áreas, volúmenes y longitudes de arcos. El método exhaustivo, atribuido a Eudoxo, está en tal relación y es una generalización de la teoría de las proporciones ya que asi como una longitud irracional (por precisarse) es determinada por longitudes racionales (conocidas), de un modo mas general ahora se trata de determinar cantidades desconocidas vía aproximaciones, bien cercanas, usándose figuras conocidas. El ejemplo histórico es el dado por Eudoxo, que aparece en el Libro XII de los Elementos de Euclides, y que consiste en aproximar al círculo (su área) vía polígonos (regulares) inscritos y circunscritos (ver figura (i) adjunta). En esta dirección se tiene el

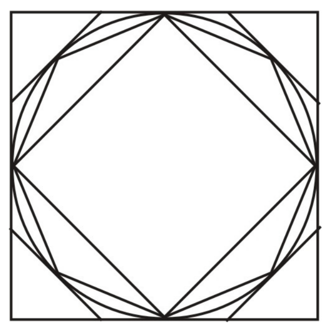
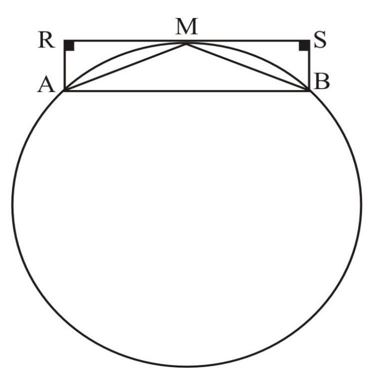


Figura (i)

**Lema.** *La diferencia en área entre un círculo y un polígono regular inscrito puede hacerse tan pequeño como se desee.*

**Prueba.**

Usaremos la Proposición [E]. Sea $AB$ el lado del polígono inscrito y $M$ el punto medio del arco $AB$.




Ver figura (ii). Se tiene, área triángulo $AMB = \dfrac{1}{2}$(área rectángulo $ABSR$).

Duplicando el número de lados del polígono, el área del polígono crece en mas de la mitad de la diferencia en área entre el círculo y el polígono. Repitiendo este argumento, es decir, duplicando el número de lados tanto como convenga, podemos hacer la diferencia en área entre el círculo y el polígono menor que cualquier área asignada, por pequeña que sea.

■

Remarcamos que la Proposición [E] aparece en Euclides, Libro X.1. Este resultado se aplica también, vía el anterior lema, en el siguiente teorema, que está en Euclides XII.2.

**Teorema.** *Si $A_1$ y $A_2$ son las áreas de dos círculos que tienen diámetros $d_1$ y $d_2$ respectivamente, entonces*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

**Es decir**, las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros.
**Prueba.**

Según el método griego, supongamos que tuviéramos $\dfrac{A_1}{A_2} > \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$, entonces podemos inscribir en la primera circunferencia (cuyo círculo tiene área $A_1$) un polígono regular $P_1$ cuya área $a(P_1)$ difiere tan poco de $A_1$ tal que tengamos aún $\dfrac{a(P_1)}{A_2} > \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$. Sea ahora $P_2$ un polígono regular semejante a $P_1$, circunscrito a la segunda circunferencia. Entonces, por un resultado sobre polígonos regulares semejantes, se tiene que

$$\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Luego tenemos $a(P_2) > A_2$, de donde

$$\frac{a(P_1)}{A_2} > \frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

lo que es absurdo. Con un argumento similar, si $\dfrac{A_1}{A_2} < \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$, tendremos también una contradicción.

**Conclusión:** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$.

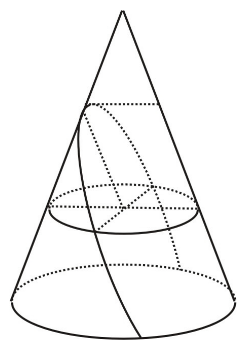
■

**Corolario.** *En general, si $A$ es el área de un círculo de diámetro $d$, entonces* $A = kd^2$*, con* $k = \frac{1}{4}\pi$*. (Tome* $d_2 = 1$ *y por tanto* $A_2 = \frac{1}{4}\pi$*).*

**Nota.** Cuando estudiemos a Arquímedes, veremos como el método exhaustivo, llamado también del "**agotamiento**", se puede aplicar para resolver el problema de la cuadratura de un segmento parabólico.

En el año 386 A.C., Eudoxo se estableció en Cízica, en donde fundó una Escuela, la **Escuela Cízica**, en donde desarrolló muchas de sus ideas científicas. Eudoxo fue un ilustre pensador que contribuyó magistralmente en diversos campos del conocimiento; también fue un hombre público. Se afirma que fue el fundador del primer observatorio que se conozca. Con su mente matemática, estudió a las constelaciones; construyó y usó un planetario para explicar el movimiento de los planetas y de los cuerpos celestes. Sin duda, fue el fundador de la astronomía matemática. Como astrónomo nos ha llegado diversas contribuciones; asi tenemos su obra la "teoría de las esferas concéntricas"; se afirma que él fue el primero en calcular la distancia de la Tierra al Sol y a la Luna; escribió un tratado sobre astronomía, el "Espejo y Fenómena", en donde describe la posición de las constelaciones; fue el iniciador de lo que se llamaría la mecánica celeste. Realizó diversos inventos. En su Escuela tuvo varios célebres discípulos, entre los que tenemos a los hermanos matemáticos **Dinóstrato** y **Menecmo**, a quienes ya hemos mencionado cuando estudiamos a la cuadratura del círculo.

**Menecmo** (375-325 A.C.) estudió con Eudoxo y fue un destacado discípulo, quien llegó a ser profesor del Conquistador Alejandro. Según Proclo, Menecmo resolvió el problema de la duplicación del cubo usando un novedoso método: el de las secciones cónicas, que él descubrio. (Ver la sección sobre la duplicación del cubo). Estas secciones fueron descubiertas como las secciones de un cono. La parábola fue definida como la intersección de un cono circular recto y un plano paralelo a una línea recta en la superficie del cono. En la solución del problema de la duplicación del cono, Menecmo debe haber usado las parábolas $y = \frac{1}{2}x^2$ y $x = y^2$, las que se encuentran en un punto cuya $y$-coordenada es $\sqrt[3]{2}$.



Históricamente, $\sqrt[3]{2}$ no es un número constructible con solo regla y compás, lo que (como sabemos) fue probado por Wantzel en 1873.

**(v) Fin del Período Helénico.**

Luego de la muerte de Alejandro Magno en el año 323 A.C. su imperio se desmembró; sus generales se repartieron los territorios conquistados. Por ejemplo, Ptolomeo se quedó con Egipto. Aristóteles que estaba en Atenas, sin el apoyo de Alejandro, tuvo que abandonar la ciudad. En el mundo griego se producen rápidos cambios, tanto en el campo político como en el cultural; surge un nuevo período, la **civilización Helenística**, la que ha de lograr mayores niveles científicos que la Helénica. La ciudad de **Alejandría**, fundada por el joven Conquistador, pasaría a reemplazar a Atenas como la capital del mundo cultural del mundo de entonces. Entramos a la **Edad de Oro de la matemática griega**.

### 1.2.5. Euclides. Los Elementos.

**(i) La Escuela de Alejandría.**

Los siglos V y IV A.C. fueron el escenario en que hemos estado en las últimas sub-secciones. La muerte de Alejandro precipitó el derrumbe de su imperio, tanto en el aspecto político como cultural. En el tránsito del siglo IV al III, la figura de Aristóteles influyó mucho en el nivel cultural del mundo griego. Surgieron cambios que produjo un gran progreso en diferentes campos, como en la medicina, la astronomía, la geografía, la mecánica, la matemática, entre otros. Con muy buen criterio surgieron mecenas que apoyaron a la investigación científica y al cultivo de las artes, entre otras manifestaciones del que hacer humano.

Un singular papel correspondió a la dinastía de los Ptolomeos en Egipto; ellos crearon el ambiente apropiado para la presencia de grandes maestros e investigadores de la época. Asi, Alejandría se convierte en el foco de la cultura universal, en el centro del que hacer científico. Con tal fin se construyeron la **Biblioteca** y el **Museo**. En estos ambientes muchísimos hombres dedicados al estudio, a la meditación y a la investigación pasaron horas dedicadas a la producción intelectual. Asi surge la gran **Escuela de Alejandría**.

La Escuela Aristotélica, con su gran biblioteca, inspiró a los primeros Ptolomeos para la fundación de la gran Biblioteca de Alejandría ocurrida en la época en que muere Aristóteles. La Biblioteca reunió una gran cantidad de obras de la antiguedad, algunas de las cuales se re-escribieron utilizando el papiro existe en Egipto. Ella fue dirigida por los hombres mas sabios, como lo fue Erastóstenes, por ejemplo, en el siglo II. En el siglo I A.C. se calcula que llegó a tener un promedio de 700,000 volúmenes. Lamentablemente, esta hermosa Biblioteca tendría un irracional fin!

La antiquísima civilización egipcia cautivó a Alejandro razón por la cual fundó una ciudad, que llevaría su nombre, que se constituyó en el centro de la civilización griega, y que se colocó al frente de la cultura moderna. Alejandría fue una ciudad cosmopolita, en donde también se cultivó la filosofía y la religión. El primer Ptolomeo fue un general de Alejandro quien mostró su inteligencia y astucia al crear la gran Academia o Museo de Alejandría y cuidar personalmente la óptima selección de sus miembros, tradición que heredarían los otros Ptolomeos. El Museo fue un templo o instituto científico-filosófico-artístico; era una especie de actual universidad en que residían, pagados por el Estado, los mas renombrados sabios quienes eran invitados desde todas partes del mundo de entonces. Las únicas obligaciones que tenían eran las de enseñar e investigar. En este ambiente surgieron los tres mas grandes matemáticos de la antigua Grecia: **Euclides**, **Arquímedes** y **Apolonio**, sobre todo estos dos últimos por la gran originalidad de sus trabajos. Con los tres pensadores se llego a la "**Edad de Oro**" de la matemática de la Antiguedad. A Arquímedes se le considera uno de los mas grandes matemáticos de la historia de nuestra ciencia.

**(ii) Euclides.**

Poco se conoce sobre la vida del autor del quizás el mas famoso libro de matemática que se haya escrito, al menos por perdurar mas de dos mil años de vigencia; aún en nuestro siglo XXI se sigue enseñando lo que escribió el viejo Euclides en los Elementos.

La fuente sobre algunos rasgos de su vida proviene del trabajo histórico de Proclo. Según este historiador, Euclides vivió alrededor del año 300 A.C. Se afirma que fue un hombre modesto, afable; fue un gran Maestro y honesto con los trabajos matemáticos que no le pertenecían. Ptolomeo le encargó la enseñanza de la matemática en el Museo o Universidad de Alejandría. Seguramente fue un sabio que dedicó mucha pasión a su trabajo; la tarea de escribir una obra de la dimensión de los Elementos parece indicar ello.

Dejemos que Proclo nos ilustre sobre algunos datos sobre la vida de este famoso geómetra: ≪Euclides floreció en el reinado de Ptolomeo I, porque es citado por Arquímedes, el cual nació en el fin del reinado de este soberano, y además de esto, nárrase como Ptolomeo, preguntando un día a Euclides si para aprender la geometría no existía un camino mas corto de que los Elementos, recibió como respuesta: "En la geometría no existen caminos hechos expresamente para los reyes". Euclides es, por tanto, posterior a los discípulos de Platón, pero anterior a Eratóstenes y a Arquímedes, los cuales fueron contemporáneos, como afirma Eratóstenes. Euclides era platónico de opiniones y muy familiar con la filosofía del Maestro, tanto que pone en la parte final de sus Elementos la construcción de las figuras platónicas (cuerpos regulares)≫ .

Proclo continúa diciendo: ≪Se poseen de él muchas otras obras matemáticas escritas con singular precisión y de un elevado carácter teórico. Tales son la Óptica, la Catóptrica, los Elementos de Música y también los libros Sobre las Divisiones. Pero son de admirar especialmente sus Elementos de geometría por el orden que reina en ellos, por la elección de los teoremas y de los problemas considerados como fundamentales, puesto que no ha incluido todos aquellos que estaba en condición de dar, sino únivocamente aquellos capaces de funcionar como elementos, y también por la variedad de los raciocinios que son conducidos de todas las maneras posibles ya partiendo de las causas, ya remontando de los hechos, pero siempre son convincentes e irrefutables, exactos y dotados del tono mas científico. Agréguese que utiliza todos los procedimientos de la dialéctica: el método de división para determinar las especies, el de la definición para los razonamientos esenciales, el apodíctico en la marcha de los principios a las cosas y el analítico en la marcha inversa de lo desconocido a los principios. Ese tratado también nos presenta en forma bien separada los distintos tipos de proposiciones recíprocas, ya muy simples, ya más complicadas, pudiendo la reciprocidad cumplirse entre el todo y el todo, entre el todo y una parte, entre una parte y el todo o entre una parte y una parte. ... ... Este libro tiene entonces por objeto purificar y ejercitar la inteligencia mientras los Elementos constituyen la guía más segura y completa para la contemplación científica de las figuras geométricas≫ .

Se relata que alguien que comenzaba a estudiar geometría con el asesoramiento de Euclides, le preguntó al Maestro después de haber aprendido el primer teorema, "¿qué recibiré por aprender estas cosas?". Como respuesta, Euclides le dijo a su esclavo, "dale tres monedas, puesto que necesita un beneficio de lo que aprende".

Debemos remarcar que por un buen tiempo (hasta el siglo XV), Euclides de Alejandría, nuestro personaje, fue confundido con Euclides de Mégara, un notable filósofo griego. Si pocos datos se tienen sobre la vida de este notable profesor, a través de su obra, de sus escritos, sobre todo por sus Elementos, conocemos mucho mejor su vida intelectual.

**(iii) Los Elementos.**

Según Proclo, antes de Euclides, ya Hipócrates, Leão y Tendio habían escrito otros “Elementos”. Es concenso de que Euclides recolectó magistralmente casi toda la matemática de su época (no solamente en sus Elementos, si no también en otros escritos).

Debido a ello es difícil precisar el nivel de originalidad de su parte. Hay otro argumento a favor del ilustre griego: si solo se hubiera dedicado a reescribir los descubrimientos de otros matemáticos, al haberse perdido los escritos de ellos, y por la bella forma como fueron escritos, con el rigor y consistencia actual, todo ello hace que la figura de Euclides tenga la dimensión histórica que le reconoce la posteridad. A través del tiempo hubieron algunos críticos que no le daban el valor que merece; la frase “abajo Euclides” se escuchó alguna vez. No participamos de esta opinión; el solo haber perdurado los Elementos mas de dos mil años ya amerita su valor como obra universal, solo superable por la Biblia. Proclo en su comentario dado antes, alaba muy favorablemente a los Elementos. Esta obra consta de trece libros, a los que hay que agregar dos libros mas, escritos como apéndices a los Elementos.

Remarcamos que los Elementos es una obra que en gran parte es una recolección de escritos realizados por sus predecesores y contemporáneos. En efecto, los Libros I y II contienen los trabajos de Pitágoras y de los primeros pitagóricos; el Libro III es en base al trabajo de Hipócrates; los libros IV, VI, XI y XII recoge la producción de los últimos pitagóricos, asi como de las Escuelas Ateniences. El Libro V trata de la obra de Eudoxo y parte de Pitágoras. El Libro X considera resultados de Teeteto, con algunas aplicaciones que aparecen en el Libro XIII. Se podría pensar entonces, ¿dónde está el valor de Euclides? ... La respuesta es que el valor radica en que fue una obra minuciosamente escrita, con un sistema lógico consistente y con una completitud admirable. Por la metodología empleada es una obra altamente original.

A fin de visualizar un contenido sucinto de los trece libros de los Elementos, presentamos el siguiente cuadro.


Debemos resaltar que los Elementos es una obra de "matemática pura"; no contiene aplicaciones prácticas. Sin embargo, su contenido fue aplicado a través del tiempo en problemas de la ingeniería, de la física, de la astronomía, ... Además, observemos que los seis primeros libros están dedicados a la geometría plana; los tres siguientes tratan sobre la teoría de números; el Libro X contiene el tema mas delicado de la obra, los inconmensurables. Los tres últimos libros se dedican básicamente a la geometría del espacio. Como apreciamos los Elementos es un completo tratado de la matemática de esa época, que a decir de Proclo: ≪los Elementos constituyen la guía mas segura y completa para la contemplación científica de las figuras geométricas≫.

Los Elementos comienzan con una lista de 23 definiciones, algunas de las cuales, a decir de Boyer ([BOY]) "no definen nada". Esta primera parte, dedicada a dar los aspectos básicos, los puntos de partida, no podían ser muy exigentes dada la época en que fue escrito el libro. Es conveniente remarcar que tal rigurosidad del método axiomático ha de lograrse solo a mediados del Siglo XIX. La influencia de Platón, su idealismo, en Euclides es algo que se nota en los Elementos. Enfatizamos que desde el inicio del presente escrito, tratamos de respetar el estilo antiguo en que fueron redactados los originales; esta metodología la seguiremos respetando en lo sucesivo. Asi, Euclídes dice, **postúlase** que:

(1) por cualquier punto se puede trazar una recta que pasa por otro punto cualquiera;

(2) toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección;

(3) con un centro dado y un radio dado se puede trazar una circunferencia; (observamos que en muchos textos se usa la palabra "círculo" en vez de "circunferencia");

(4) todos los ángulos rectos son iguales entre si;

(5) si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Euclides también comienza con cinco **Nociones Comunes**, que son:

$(1)'$ cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre si;

$(2)'$ si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales;

$(3)'$ si iguales se restan de iguales, los restos son iguales;

$(4)'$ cosas que coinciden una con otra son iguales entre si;

$(5)'$ el todo es mayor que la parte.

Los cinco postulados (o axiomas) y las cinco nociones comunes serían el soporte para construir al edificio geométrico. Si observamos con atención a los diez anteriores enunciados, seguramente a la luz de nuestra época, ellos adolecen de diversas debilidades. Estas deficiencias vienen ya cuando Euclides entiende otras nociones mas básicas aún de una forma nada claro. Asi, para Euclides "un punto es lo que no tiene parte", "una línea es una longitud sin anchura" o "una superficie es lo que tiene solo longitud y anchura". Desde la época de Aristóteles hubo la cuestión de distinguir entre el significado de axioma y de postulado. Asi, **axioma** es algo conocido o aceptado como obvio, en tanto, la palabra **postulado** significa algo que se impone o exige. Por ejemplo, las nociones comunes $(1)'$ a $(5)'$ serían cinco axiomas, mientras que los enunciados (1) a (5) serían postulados. (Actualmente hay poco interés en tal distinción). Hemos mencionado algunas definiciones que Euclides consideró de inicio ("punto", "línea", "superficie"). Precisemos ellas y algunas otras mas.

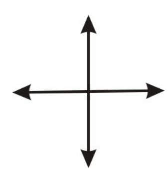
**Definición 1.** *Un **punto** es aquello que no tiene parte.*

**Definición 2.** *Una **línea** es una longitud angosta.*

**Definición 3.** *Las extremidades de una línea son puntos.*

**Definición 4.** *Una **línea recta** es una línea la cual descansa llanamente sobre sus puntos.*

**Definición 10.** *Cuando una línea recta está en posición sobre otra línea recta y forman ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos iguales es **recto**, y las líneas rectas son **perpendiculares entre sí**.*

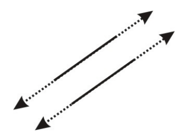


*(Una línea recta es **perpendicular** a la otra).*

**Definición 15.** *Un **círculo** es una figura plana tal que todas las líneas rectas a partir de un punto y que caen sobre la figura, son iguales una a otra.*

*("Un punto" es el* ***centro*** *del círculo; "líneas rectas" son los* ***radios****).*

**Definición 23.** ***Líneas rectas paralelas*** *son líneas las cuales están en algún plano y si se les prolongan indefinidamente en ambas direcciones, ellas no se encuentran en cualquier dirección.*



**Nota.** Observemos que con las definiciones dadas, los postulados (1) a (5) son ahora mas claros.

### El Quinto Postulado (5).

El postulado (5) tiene un interés histórico especial. Posiblemente Euclides trató de demostrarlo sin tener exito. Por siglos los matemáticos trataron de clarificar su significado pero todo intento de probarlo falló o se dieron demostraciones erradas. En tal intento, se formularon versiones equivalentes a (5) y se intentó probar tales versiones; no se obtuvo éxito.

Una de esas versiones establece que "dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una y sola una línea recta que pasa por el punto y es paralela a la línea recta dada". En verdad, el quinto postulado caracteriza a la geometría de Euclides; negarlo es entrar a las geometrias no-euclideanas, como en efecto llegaron diversos matemáticos. Esto es una historia que sucesivamente iremos presentando.

Los Elementos es una gran colección de 465 proposiciones que tratan sobre geometría plana y del espacio, asi como de teoría de números. A continuación, en forma breve, trataremos algunas de tales proposiciones. Un estudio completo de los Elementos debe ser un reto muy arduo, y está lejos de lo que presentamos en esta oportunidad.

### LIBRO I

Este libro contiene 48 proposiciones; las 32 primeras tratan sobre propiedades de los triángulos; una de ellas (la última de esta parte) afirma que: "la suma de los ángulos de un triángulo es constante e igual a dos rectos". El quinto postulado recién aparece en la proposición 29 (luego, las anteriores proposiciones son independientes de tal postulado).

**Proposición 1.** *Dada una línea recta finita, construir un triángulo equilátero.*

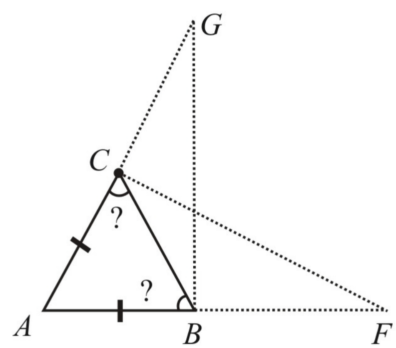
*Este resultado lo hemos mencionado en la construcción (2), 1. 2.4 (i).*

**Proposición 4.** *Si $ABC$ y $DEF$ son dos triángulos tal que $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$, $AB = DE$ y $BC = EF$, entonces los triángulos dados son iguales (congruentes en terminología actual).*

*Esta proposición es conocida como la Proposición LAL.*

**Proposición 5.** *Los ángulos base de un triángulo isósceles, son iguales. Esto es, dado el triángulo $ABC$, si $AB = AC$ entonces $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$.*

**Prueba.** Euclides extiende $AB$ hasta $F$ y $AC$ hasta $G$ de modo que $AF = AG$. Luego, por la proposición LAL se tiene que los triángulos $FAC$ y $GAB$ son iguales. Por tanto, $FC = GB$ y $\measuredangle F = \measuredangle G$.



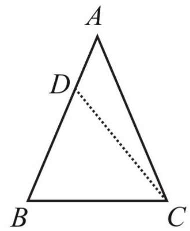

Desde que $BF = CG$, se tiene (nuevamente por LAL) que los triángulos $FBC$ y $GCB$ son iguales. Entonces, $\measuredangle FBC = \measuredangle GCB$, $\measuredangle BCF = \measuredangle CBG$. Como, $\measuredangle ABG = \measuredangle ACF$, se tendrá $\measuredangle ABG - \measuredangle CBG = \measuredangle ACF - \measuredangle BCF$, esto es, $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$.

■

**Proposición 6.** *(Recíproco de la proposición 5). En el triángulo $ABC$, si $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ entonces $AB = AC$.*

**Prueba.** En la prueba de esta proposición encontramos por **primera vez** el método de reducción al absurdo, algo que será usado frecuentemente por los griegos. Asi, supongamos que $AB \neq AC$, por ejemplo que $AB > AC$. Sea $D$ tal que $BD = AC$. Unamos $D$ con $C$.

Entonces los triángulos $DBC$ y $ACB$ son iguales (proposición 4), absurdo ya que el triángulo $DBC$ es mas pequeño que $ABC$.



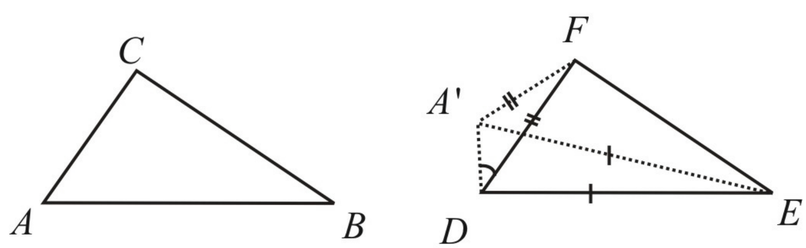

Análoga contradicción se obtiene si se asume $AB < AC$. Luego, $AB = AC$.

■

**Proposición 8.** *Sean $ABC$ y $DEF$ dos triángulos tal que $AB = DE$, $BC = EF$ y $CA = FD$. Entonces los triángulos son iguales. (Proposición L-L-L).*
**Prueba.** Supongamos que los triángulos no fueran iguales (congruentes); entonces existirá un punto $A'$, diferente de $D$, $A'$ y $D$ a un mismo lado de $EF$, tal que el triángulo $ABC$ es igual al triángulo $A'EF$.

Desde que $A'E = AB = DE$, tenemos $\measuredangle A'DE = \measuredangle DA'E$.

También tenemos $A'F = AC = FD$, luego, $\measuredangle FA'D = \measuredangle FDA'$.




Pero, $\measuredangle A'DE > \measuredangle A'DF$; luego, $\measuredangle DA'E > \measuredangle DA'F$, absurdo.

Luego, el triángulo $ABC$ es igual al triángulo $DEF$.

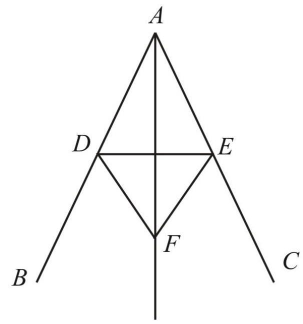
■

**Proposición 9.** *Dividir un ángulo rectilíneo en dos partes iguales.*
**Solución.**

**Euclides dice**, sea $BAC$ un ángulo rectilíneo dado. Trataremos de dividirlo en dos partes iguales. Sea $D$ un punto elegido arbitrariamente en $AB$; sea $AE$ igual a $AD$ sobre $AC$.

Unir $D$ con $E$ y construir sobre $DE$ el triángulo equilátero $DEF$ (Prop. 1), unir $A$ con $F$.

Afirmo que el ángulo $BAC$ está dividido en dos partes iguales por la recta $AF$.




Porque, por ser $AD = AE$ y $AF$ común, los lados $DA$ y $AF$ son iguales a los lados $EA$ y $AF$ respectivamente; y la base $DF$ es igual a la base $EF$; luego, el ángulo $DAF$ es igual al ángulo $EAF$. Por lo tanto, el ángulo rectilíneo $BAC$ ha sido dividido en dos partes iguales por la recta $AF$.

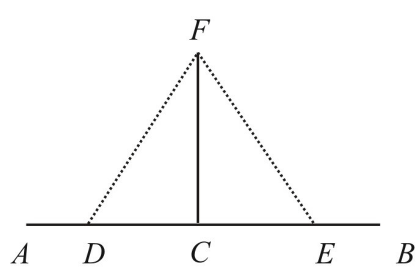
■

**Proposición 11.** *Trazar una línea recta en ángulos rectos a una línea recta dada desde un punto sobre ella.*

*Asi, sea $AB$ la línea recta dada y $C$ un punto sobre ella. Se requiere trazar desde el punto $C$ una línea recta que haga ángulos rectos a la línea recta $AB$.*

**Solución.**

Sea $D$ un punto arbitrario sobre $AC$; sea $CE$ igual a $CD$. Sobre $DE$ construimos un triángulo equilátero $FDE$; unimos $F$ con $C$. Yo digo (dice Euclides) que la línea recta $FC$ es la buscada. Porque, desde que $DC = CE$ y $CF$ es común, los dos lados $DC$, $CF$ son iguales a los dos lados $EC$, $CF$ respectivamente; la base $DF$ es igual a la base $FE$, luego el ángulo $DCF$ es igual al ángulo $ECF$, y ellos son ángulos adyacentes.

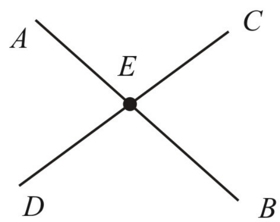



Luego, por la Definición 10, cada uno de esos ángulos iguales es recto.

Luego cada ángulo $DCF$, $FCE$ es recto. Por tanto la línea recta $CF$ es la recta requerida.

■

**Proposición 15.** *Si líneas rectas se cortan una a otra, ellos hacen ángulos verticales iguales uno a otro.*



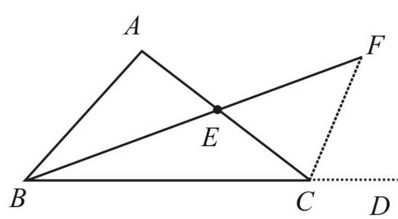

**Prueba.** Ejercicio.

**Proposición 16.** *En cualquier triángulo, si uno de los lados es extendido, el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores opuestos.*
**Prueba.**

Dado el triángulo $ABC$ con $BC$ extendido a $D$, debemos probar que ángulo $DCA$ es mayor que el ángulo $CBA$ ó el ángulo $CAB$.

Euclides bisecta $AC$ en $E$ (Proposición 10), luego traza la línea $BE$ (primer postulado).

El postulado (2) le permite a él extender $BE$ y entonces construyó $EF = EB$ (Proposición 3). Finalmente Euclides construye $FC$.




Mirando a los triángulos $AEB$ y $CEF$, Euclides observa que $AE = CE$ (bisección); los ángulos verticales $AEB$ y $FEC$ son iguales (Proposición 15); además, $EB = EF$ (por construcción). Luego, tales triángulos son iguales (congruentes) (LAL); entonces se tiene que ángulo $BAE$ es igual al ángulo $FCE$. Pero, ángulo $DCA$ es mayor que el ángulo $FCE$ (por $(5)'$). Luego, el ángulo exterior $DCA$ excede al ángulo interior opuesto $BAC$. En forma similar se tiene que el ángulo $DCA$ es mayor que el ángulo $ABC$.

■

**Proposición 20.** *En cualquier triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera, es mayor al lado restante.*

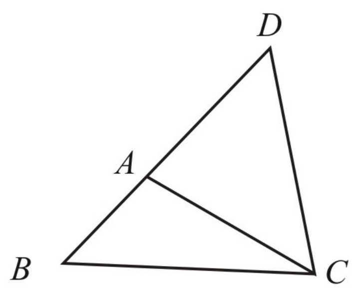
*Porque sea $ABC$ un triángulo, yo digo (Euclides) que en el triángulo $ABC$ dos lados tomados juntos en cualquier manera es mayor que el lado restante; asi,*

*$BA$, $AC$ es mayor que $BC$*
*$AB$, $BC$ es mayor que $AC$*
*$BC$, $CA$ es mayor que $AB$.*

**Prueba.**

Sea $BA$ prolongada hasta el punto $D$ tal que $AD = AC$; únase $D$ con $C$.

Entonces, desde que $DA = AC$, el ángulo $ADC$ es igual al ángulo $ACD$ (Proposición 5), luego el ángulo $BCD$ es mayor que el ángulo $ADC$ $((5)')$.




Desde que $DCB$ es un triángulo teniendo el ángulo $BCD$ mayor que el ángulo $BDC$, y el ángulo mayor es subtendido por el lado mayor (Proposición 19), luego $DB$ es mayor que $BC$. Pero $DA = AC$; luego, $BA$, $AC$ es mayor que $BC$. Similarmente se puede probar que $AB$, $BC$ es también mayor que $CA$; y $BC$, $CA$ que $AB$.

■

**Nota.** Recalcamos que, en lo posible, estamos conservando el estilo linguístico y notacional que usó Euclides al escribir los Elementos.

**Proposición 26. (AAL).** *Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivos, y un lado igual a un lado, asi ... que subtiende uno de los ángulos iguales, entonces ellos también tendrán los restantes lados igual a los restantes lados y el restante ángulo igual al restante ángulo.*

**Prueba.**

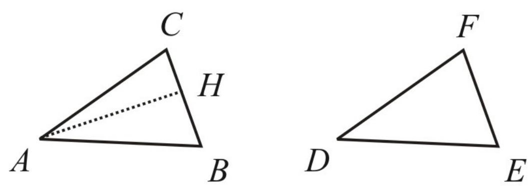
Según la figura adjunta, la hipótesis es:

ángulo $ABC =$ ángulo $DEF$, ángulo $ACB =$ ángulo $DFE$ y $AB = DE$.

Euclides afirma que:

ángulo $CAB =$ ángulo $FDE$, $BC = EF$ y $AC = DF$.

Euclides asume que, por ejemplo $BC > EF$. Entonces es posible construir $BH$ tal que $BH = EF$. Unir $A$ con $H$.




Ahora, desde que $AB = DE$, ángulo $ABC =$ ángulo $DEF$ y $BH = EF$, por LAL se tiene que triángulo $ABH =$ triángulo $DEF$. Luego, ángulo $AHB =$ ángulo $DFE$.

Euclides ahora pone atención al triángulo $AHC$. Se observa que

ángulo $AHB =$ ángulo $DFE$ y ángulo $ACB =$ ángulo $DFE$;

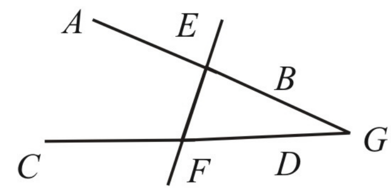
luego ángulo $AHB =$ángulo $ACB$, lo que es falso pues Euclides ya había probado la Proposición 16. Por tanto, $BC \neq EF$ lleva a una contradicción, asi se tiene $BC = EF$. Ahora aplica LAL para afirmar que: triángulo $ABC =$ triángulo $DEF$, de donde se obtiene que ángulo $CAB =$ ángulo $FDE$ y $AC = DF$.

■

La Proposición 26 es la última de la primera parte del Libro I. En la segunda parte trabaja la noción de paralelismo entre líneas rectas; prueba diversos resultados sobre tal noción.

**Proposición 27.** *Si una línea recta cae sobre dos líneas rectas y hace ángulos alternos (internos) iguales uno a otro, las líneas rectas serán paralelas.*
**Prueba.**

Por la hipótesis, ángulo $FEG =$ángulo $CFE$; entonces Euclides establece que las líneas rectas $AB$ y $CD$ son paralelas en el sentido de la Definición 23, es decir, él desea probar que tales líneas nunca se encuentran. Para ello niega la tesis, es decir, Euclides asume que las líneas rectas se intersectan y busca una contradicción. Asi, extendiendo $AB$ y $CD$ asume que se encuentran en un punto $G$. Asi se ha construido el triángulo $EFG$.




Pero el ángulo $CFE$ es un ángulo exterior, que por hipótesis es igual al ángulo $FEB$, y por tanto es mayor que el ángulo $FEB$, lo que es un imposible. Luego, las líneas rectas dadas nunca se interceptan, lo que es la definición de paralelismo según Euclides.
**Conclusión:** las líneas rectas dadas son paralelas.

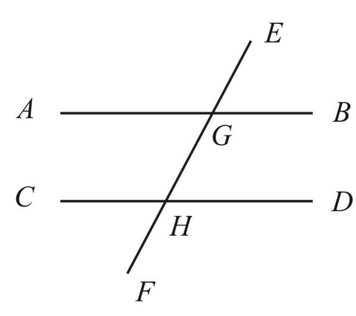
■

Hasta esta Proposición 27, Euclides evitó el uso del quinto postulado de las paralelas. Sin embargo, al intentar probar el recíproco de la Proposición 27, no pudo evitar su uso. Asi tenemos la,

**Proposición 29.** *Una línea recta cayendo sobre líneas rectas paralelas hace ángulos alternos (internos) iguales, uno a otro.*
**Prueba.**

Recordemos al quinto postulado: ≪si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos≫ .

Euclides asume que $AB$ y $CD$ son líneas rectas paralelas. Desea probar que: ángulo $AGH$ =ángulo $GHD$.



Por el absurdo, nuevamente, supongamos que estos ángulos fueran diferentes; por ejemplo, ángulo $AGH >$ángulo $GHD$. Luego, por la Proposición 13 (ver Ejercicios) tendremos, dos ángulos rectos = ángulo $AGH$+ángulo $BGH >$ángulo $GHD$+ángulo $BGH$.

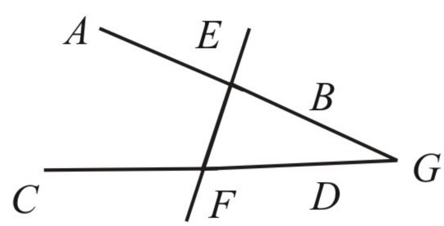
**En esta parte** Euclides necesita del quinto postulado, especialmente estructurado para esta situación. Aceptado el postulado entonces se tendrá que las rectas $AB$ y $CD$ deben encontrarse en un punto hacia el lado derecho, lo que es una contradicción con la hipótesis. De esta manera, los ángulos alternos (internos) mencionados, son iguales.

■

**Corolario.** *ángulo* $EGB =$*ángulo* $GHD$.

El siguiente resultado está intrínsicamente relacionado al postulado de las paralelas.

**Proposición 32.** *En cualquier triángulo ... los tres ángulos interiores ... son igual a dos ángulos rectos.*
**Prueba.**
Sea el triángulo $ABC$; Euclides traza $CE$ paralelo a $AB$ (por la **Proposición 31**: "construir una paralela a una línea recta dada a través de un punto que no está en la línea recta dada"); extendamos $BC$ hasta $D$. Por la proposición 29 sabemos que ángulo $BAC =$ ángulo $ACE$ y ángulo $ABC =$ ángulo $ECD$.




Se tiene, ángulo $BAC$+ángulo $ABC$+ángulo $BCA =$ ángulo $ACE$+ángulo $ECD$+ángulo $BCA =$ dos ángulos rectos.

■

Las proposiciones 27 a 32 constituyen la segunda parte del Libro I y contienen resultados sobre la teoría de las paralelas. El tercer grupo comprende las proposiciones 33 a 48 e incluye al famoso teorema de Pitágoras; trata sobre los paralelogramos, los triángulos, los cuadrados y las relaciones de áreas.

**Proposición 33.** *Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, entonces así también lo son los otros dos lados.*

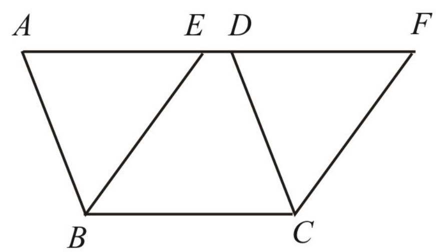
**Proposición 34.** *Los ángulos y los lados opuestos de un paralelogramo son iguales; el diámetro bisecta al área.*

En la siguiente proposición Euclides introduce el tópico del área.

**Proposición 35.** *Dos paralelogramos que tienen la misma base y que están en las mismas paralelas son iguales uno a otro.*

**Prueba.**

Sean los paralelogramos $ABCD$ y $EBCF$. Por la Proposición 34 se tiene, $AB = DC$ y $EB = FC$; $AD = BC = EF$.




Luego, $AE = AD - ED = EF - ED = DF$.

Por tanto, triángulo $ABE$ = triángulo $DCF$ (por LLL). Asi, área $ABCD$ = área $ABCF-$ área $DCF$ = área $ABCF-$ área $ABE$ = área $EBCF$.

■

**Nota.** En la Proposición 35, "son iguales uno a otro" significa que ambos paralelogramos tienen la misma área.

**Observación.** En la anterior figura y considerando la segunda parte de la Proposición 34, se obtiene, área triángulo $ABC = \dfrac{1}{2}$ área $ABCD = \dfrac{1}{2}$ área $EBCF$ = área triángulo $EBC$.

¿Cuál es la moraleja de esta igualdad?

**Proposición 41.** *Si un paralelogramo tiene la misma base con un triángulo y están en las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.*

*(El paralelogramo tiene área doble que la del triángulo).*

**Proposición 46.** *Dada una línea recta, construir sobre ella un cuadrado.*

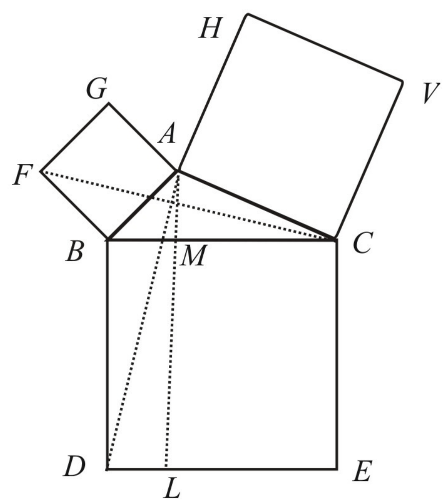
Con todos estos preliminares, Euclides está listo para probar al Gran Teorema, el **Teorema de Pitágoras**.

**Proposición 47.** *En triángulos rectángulos, el cuadrado sobre el lado subtendiendo el ángulo recto es igual a los cuadrados sobre los lados conteniendo el ángulo recto.*

**Observación.** Notemos que Euclides considera al teorema de pitágoras como la ecuación algebraica

$$a^2 = b^2 + c^2$$

si no como un problema geométrico de construir cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo y se propone probar que el área del cuadrado construido sobre $BC$ es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre $AB$ y $AC$.




En (iv).1.2.2 hemos considerado algunos argumentos sobre este famoso teorema; observemos que la figura dada en esa oportunidad es similar a la que estamos adjuntando ahora.

En la prueba del teorema, Euclides usa la **Proposición 31**: *"Construir una paralela a una línea recta dada a través de un punto que no está en la línea dada"*; también la **Proposición 14**: *"si $ABC$ y $ABD$ suman dos ángulos rectos, entonces $CBD$ es una línea recta"*.

También se usará la proposición 41.

**Prueba.**

Por la proposición 46 Euclides construye cuadrados sobre los tres lados, y por la proposición 31, traza AL, a través de $A$, paralela a $BD$. Luego traza las líneas $AD$ y $FC$; ¿porqué hizo estos trazados? Un aspecto crucial para Euclides fue establecer que $CA$ y $AG$ están sobre una misma línea recta. Además, él conocía que el ángulo $BAC$ es recto por hipótesis y que el ángulo $GAB$ es recto por construcción; como estos ángulos suman dos rectos, por la proposición 14, $GAC$ es una línea recta.

Ahora Euclides mira los triángulos $ABD$ y $FBC$; se tiene $AB = FB$ y $BD = BC$. ¿Qué podemos decir de los correspondientes ángulos incluidos? ... Se tiene,

$$\begin{aligned} \text{ángulo } ABD &= \text{ángulo } ABC + \text{ángulo recto } CBD, \\ \text{ángulo } FBC &= \text{ángulo } ABC + \text{ángulo recto } FBA. \end{aligned}$$

Aplicando el Postulado 4 y la Noción Común $(2)'$ se obtiene: ángulo $ABD =$ ángulo $FBC$.

Luego, por la Proposición 4, Euclides establece que: triángulo $ABD =$ triángulo $FBC$ (congruente).

De esta manera, estos dos triángulos tienen la misma área.

En seguida Euclides observa que el triángulo $ABD$ y el rectángulo $BDLM$ tienen la misma base, $BD$, y están dentro de las mismas paralelas, $BD$ y $AL$; luego, por la Proposición 41 se tiene que el área de $BDLM$ es el doble del área del triángulo $ABD$.

De un modo similar, el triángulo $FBC$ y el cuadrado $ABFG$ tienen la misma base $BF$ y nuevamente por la Proposición 41 se tiene que el área del cuadrado $ABFG$. Luego,

$$\begin{aligned} \text{área rectángulo } BDLM &= 2 \text{ área triángulo } ABD \\ &= 2 \text{ área triángulo } FBC \\ &= \text{área cuadrado } ABFG \end{aligned}$$

Esta conclusión es la mitad de la tarea de Euclides. Enseguida, él prueba que:

$$\text{área rectángulo } CELM = \text{área cuadrado } ACKH\ .$$

**En efecto**, Euclides traza $AE$ y $BK$; prueba que $BAH$ es una línea recta, y usando LAL prueba que los triángulos $ACE$ y $BCK$ son iguales (congruentes). Aún, por Proposición 41, Euclides concluye que: área rectángulo

$CELM = 2$ área triángulo $ACE = 2$ área triángulo $BCK$ =área cuadrado $ACKH$.

Finalmente, Euclides concluye que: área cuadrado $BCED$ =área rectángulo $BDLM$+área rectángulo $CELM$ =área cuadrado $ABFG$+área cuadrado $ACKH$, que es lo que Euclides desea probar.

■

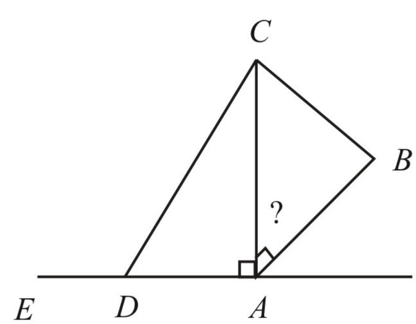
La prueba dada por Euclides es posiblemente la mas significativa y elegante demostración en la historia de la matemática. Fue tanta su popularidad, que el teorema de Pitágoras interesó a matemáticos de diversas generaciones y se han dado al menos algo mas de trecientas demostraciones del teorema. En 1.2.2 (iv) hemos presentado otras pruebas de este teorema, posiblemente el teorema mas conocido por matemáticos y no matemáticos.

Euclides aún fue capaz de probar el **inverso del teorema de Pitágoras**; con este fin, él se apoya fuertemente en tal teorema. Asi tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 48.** *Si en un triángulo el cuadrado sobre uno de los lados es igual a los cuadrados sobre los dos lados restantes del triángulo, el ángulo contenido por los dos lados restantes del triángulo, es un ángulo recto.*

**Prueba.**

Euclides comienza con el triángulo $ABC$ y asume que $BC^2 = AB^2+AC^2$. Se propone probar que el ángulo $BAC$ es un ángulo recto. Para ello, Euclides construye $AE$ perpendicular a $AC$ en $A$ (por la Proposición 11). Él entonces construye $AD = AB$ y traza $CD$.




Ahora Euclides afirma (lo esencial de la prueba) que los triángulos $BAC$ y $DAC$ son iguales (congruentes). En efecto, los dos triángulos tienen el mismo lado $AC$ y $AD = AB$ (por construcción). Además, sabemos que el ángulo $DAC$ es recto (por construcción).

Ahora Euclides puede aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $DAC$ para obtener:

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Luego, $CD = BC$ y por lo tanto el triángulo $DAC$ es igual (congruente) al triángulo $BAC$ (LLL). De esta manera se tiene que los ángulos $BAC$ y $DAC$ son iguales y se obtiene que el ángulo $BAC$ es un ángulo recto, como se desea demostrar.

■

**LIBRO II**

El Libro II contiene dos definiciones y catorce proposiciones; es uno de los libros mas cortos de los Elementos. Trata de la transformación de las áreas y del álgebra geométrica, temas que casi no aparecen en los libros actuales; esto debido a que los antiguos griegos no disponían de un algebra simbólico ni de una trigonometría. De alguna forma, este Libro II es una continuación de la tercera parte del Libro I. Veamos las dos definiciones.

**Definición 1.** *Se dice que cualquier paralelogramo rectángulo está contenido por las dos rectas que forman el ángulo recto.*

**Definición 2.** *En cualquier paralelogramo, cualquiera de los paralelogramos descritos alrededor del diámetro con sus dos complementos se llamará* ***gnomón****.*

La palabra "gnomón" parece tener un origen astronómico ya que indica la posición de una barra vertical descansando sobre un plano horizontal. Matematicamente el gnomón es todo aquello que agregado a un número o figura los convierte en un número o figura semejante. Las primeras diez proposiciones del Libro II son sobre "algebra geométrica" y constituyen la interpretación geométrica de las siguientes propiedades algebraicas:

(1) $n(a+b+c+...) = na+nb+nc+...$

(2) $(a+b)a+(a+b)b = (a+b)^2$.

(3) $(a+b)a = a^2+ab$.

(4) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.

(5) $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$

(6) $(2a+b)\,b + a^2 = (a+b)^2.$

(7) $(a+b)^2 + a^2 = 2\,(a+b)\,a + b^2.$

(8) $4\,(a+b)\,a + b^2 = [(a+b)+a]^2.$

(9) $a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right].$

(10) $(2a+b)^2 + b^2 = 2\left[a^2 + (a+b)^2\right].$

Las restantes cuatro proposiciones tratan las cuestiones de dividir una recta en media y extrema razón; se estudia el problema de "cuadrar" cualquier figura poligonal, asi como contiene la generalización del teorema de Pitágoras para triángulos acutángulos y obtusángulos.

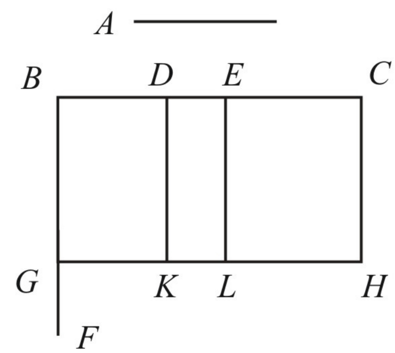
**Proposición 1.** *Dadas dos líneas rectas, y una de ellas es cortada en cualquier número de segmentos, el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenido por la línea recta no cortada y cada uno de los segmentos.*

**Prueba.** Euclides plantea la solución en la siguiente forma.

Sean $A,\ BC$ dos líneas rectas y sea $BC$ cortada arbitrariamente en los puntos $D,\ E$. "Yo digo que el rectángulo contenido por $A,\ BC$ es igual al rectángulo contenido por $A,\ BD$, que el contenido por $A,\ DE$ y que el contenido por $A,\ EC$", dice Euclides.

**En efecto**, constrúyase $BF$ perpendicular a $BC$ en el punto $B$ (Proposición I.11); sea $BG$ tal que $BG$ es igual a $A$ (Proposición I.3). A través de $G$ sea $GH$ construido paralelo a $BC$ (Proposición I.31), y a través de $D,\ E,\ C$ sean $DK,\ EL,\ CH$ construidos paralelos a $BG$. De esta manera, $BH$ es igual a $BK,\ DL,\ EH$ **(*)**. Ahora $BH$ es el rectángulo $A,\ BC$, porque el está contenido por $GB,\ BC$ y $BG$ es igual a $A$ : $BK$ es el rectángulo $A,\ BD$, porque el está contenido por $GB,\ BD$ y $BG$ es igual a $A$; y $DL$ es el rectángulo $A,\ DE$, porque $DK$, esto es, $BG$ es igual a $A$ (Proposición

I.34).




De un modo similar $EH$ es también el rectángulo $A$, $EC$. Por tanto, el rectángulo $A$, $BC$ es igual al rectángulo $A$, $BD$, al rectángulo $A$, $DE$ y al rectángulo $A$, $EC$.

Que es lo que Euclides desea probar.

■

**Nota (*):** Aclaramos que "$BH$" debe entenderse como el rectángulo $BCHG$; igual "$BK$", "$DL$", "$EH$".

La Proposición 1 no es otra cosa que la actual propiedad distributiva; asi,

$$BG\,(BD + DE + EC) = BG.BD + BG.DE + BG.EC.$$

**Nota.** Las Proposiciones 2 y 3 son casos particulares de la Proposición 1 pero que Euclides los probó de un modo separado.

**Proposición 4.** *Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos.*

**Prueba.**

Previamente, ¿cuál es la interpretación algebraica de esta proposición? ...

Sea la línea recta $AB$ la que es cortada arbitrariamente en el punto $C$; yo digo que el cuadrado sobre $AB$ es igual a los cuadrados sobre $AC$, $CB$ y dos veces el rectángulo contenido por $AC$, $CB$.

Porque sea el cuadrado $ADEB$ descrito sobre $AB$ (Proposición I.46), sea el segmento $BD$; a través de $C$ sea $CF$ paralelo a $AD$ o a $EB$, y a través de $G$ sea $HK$ trazado paralelo o a $AB$ o a $DE$ (Proposición I.31).

Entonces, desde que $CF$ es paralelo a $AD$, y $BD$ cae sobre ellos, el ángulo exterior $CGB$ es igual al ángulo $ADB$ (Proposición I.29).

Pero, ángulo $ADB$ =ángulo $ABD$ desde que $BA = AD$ (Proposición I.5). Luego, ángulo $CGB$ =ángulo $GBC$, asi que $BC = CG$ (Proposición I.6). Pero, $CB = GK$ y $CG = KB$ (Proposición I.34); luego, $GK = KB$. Por tanto $CGKB$ tiene sus lados iguales.

"Yo digo enseguida que también sus ángulos son rectos". Porque, desde que $CG$ es paralelo a $BK$, los ángulos $KBC$, $GCB$ son igual a dos ángulos rectos (Proposición I.29).

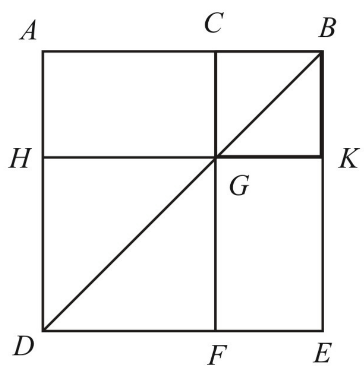
Pero el ángulo $KBC$ es recto; luego el ángulo $BCG$ es también recto, así que los ángulos opuestos $CGK$, $GKB$ son también rectos (Proposición I.34).

Luego $CGKB$ es un cuadrado, y lo describiremos sobre $CB$. Por la misma razón $HF$ es también un cuadrado y es descrito sobre $HG$, esto es, sobre $AC$ (Proposición I.34).

Por lo tanto, los cuadrados $HF$, $KC$ son los cuadrados sobre $AC$, $CB$.

Ahora, desde que $AG = GE$, y $AG$ es el rectángulo $AC$, $CB$, porque $GC = CB$; por lo tanto $GE$ es también igual al rectángulo $AC$, $CB$.

Por lo tanto, $AG$, $CE$ es igual a dos veces el rectángulo $AC$, $CB$. Pero los cuadrados $HF$, $CK$ son también los cuadrados sobre $AC$, $CB$: luego las cuatro áreas $HF$, $CK$, $AG$, $GE$ son iguales a los cuadrados sobre $AC$, $CB$ y dos veces el rectángulo contenido por $AC$, $CB$. Pero $HF$, $CK$, $AG$, $GE$ es el todo $ADEB$, el cual es el cuadrado sobre $AB$.




Por tanto, el cuadrado sobre $AB$ es igual a los cuadrados sobre $AC$, $CB$ y dos veces el rectángulo contenido por $AC$, $CB$.

Esto es lo deseado por demostrar.

■

Respondamos ahora a la cuestión planteada arriba. La proposición 4 tiene como interpretación algebraica a la conocida identidad,

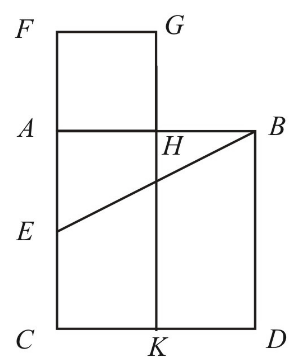
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

**Proposición 11.** *Cortar una recta dada, de manera que el rectángulo comprendido entre la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del otro segmento.*

**Nota.** Esta proposición es el notable problema de dividir una recta en razones extrema y media o sección áurea (Libro VI, Definición 3).
**Prueba.**

Veamos como plantea Euclides la solución de este problema.

Sea $AB$ la recta dada; hay que cortar $AB$ de forma que el rectángulo comprendido entre la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del otro segmento.




Sea el cuadrado $ABDC$ descrito sobre la línea recta $AB$ (Prop. I.46). Cortemos $AC$ en su punto medio $E$, unamos $B$ con $E$; prolonguemos $CA$ hasta $F$ tal que $EF = EB$; describamos el cuadrado $FH$ sobre $AF$ y prolonguemos $GH$ hasta $K$.

**Afirmo** que $AB$ se ha cortado en $H$ de modo que el rectángulo contenido por $AB$ y $BH$ es igual al cuadrado de $AH$.

Ya que, dado que la recta $AC$ se ha cortado en su punto medio $E$ y $FA$ representa su prolongación hasta $F$, el rectángulo limitado por $CF$ y $FA$, unido al cuadrado sobre $AE$, es igual al cuadrado sobre $EF$ (Prop. II.6).

Pero $EF = EB$; entonces el rectángulo determinado por $CF$ y $FA$, unido al cuadrado sobre $AE$ es igual al cuadrado sobre $EB$.

Pero los cuadrados sobre $BA$ y $AE$ son iguales al cuadrado sobre $EB$, ya que el ángulo en $A$ es recto (Prop. I.47). Entonces el rectángulo limitado por $CF$ y $FA$, unido al cuadrado sobre $AE$, es igual a los cuadrados sobre $BA$ y $AE$.

Restemos el cuadrado de lado $AE$ de cada uno de ellos, entonces el rectángulo limitado por $CF$ y $FA$ es igual al cuadrado sobre $AB$. Ahora el rectángulo de lados $CF$ y $FA$ es $FK$, ya que $AF$ es igual a $FG$; y el cuadrado sobre $AB$ es $AD$; además $FK$ es igual a $AD$.

Restemos $AK$ de cada uno, entonces $FH$ es igual a $HD$. Y $HD$ es el rectángulo de lados $AB$ y $BH$, puesto que $AB = BD$; y $FH$ es el cuadrado sobre $AH$: entonces el rectángulo limitado por $AB$ y $BH$ es igual al cuadrado sobre $HA$.

Luego, la recta dada $AB$ ha quedado cortada por $H$ de tal manera que el rectángulo limitado por $AB$ y $BH$ es igual al cuadrado sobre $HA$.

Esto es lo que había que probar.

■

Observemos que la Proposición "guarda" a una ecuación algebraica de segundo grado. Asi, si $AB = a$ y $AH = x$, entonces $(a-x)^2 = ax$, que es equivalente a

$$x^2 - ax + a^2 = 0$$

Las Proposiciones 12 y 13 tratan sobre la generalización del teorema de Pitágoras ("ley de los cosenos"). Estos resultados son una especie de pre - trigonometría, rama que pronto surgiría en Grecia.

**Proposición 12.** *En un triángulo obtusángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo* ***obtuso*** *es mayor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular hacia el exterior desde el ángulo obtuso.*

**Proposición 13.** *En un triángulo acutángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo* ***agudo*** *es menor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo agudo en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular desde el ángulo agudo.*

**Proposición 14.** *Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.*

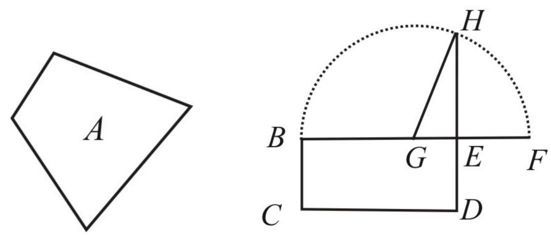
*Sea $A$ una figura rectilínea dada; se requiere construir un cuadrado igual a la figura rectilínea $A$.*

**Prueba.**

La figura rectilínea dada puede ser cualquier polígono.

Sea $A$ la figura rectilínea dada (un polígono); es requerido construir un cuadrado igual a la figura rectilínea $A$. Por Prop. I.45 se puede construir un paralelogramo rectangular $BD$ igual a la figura rectilínea $A$.

Si $BE$ fuera igual a $ED$ entonces estaríamos satisfechos ya que un cuadrado $BD$ habría sido construido igual a la figura rectilínea $A$.




Si no fuera asi, una de las líneas rectas $BE$, $ED$ es mayor (que la otra). Sea $BE$ mayor, y prolonguémosla hasta $F$; sea $EF$ hecho igual a $ED$, y sea $BF$ bisectado en $G$. Con centro $G$ y distancia una de las líneas rectas $GB$, $GF$ sea la semicircunferencia ("semicírculo" en el lenguaje de Euclides) $BHF$ descrita; $DE$ es extendido hasta $H$; unamos $G$ con $H$.

Entonces, dado que la línea recta $BF$ ha sido cortada en iguales segmentos en $G$, y en segmentos desiguales en $E$, el rectángulo contenido por $BE$, $EF$ junto con el cuadrado sobre $EG$ es igual al cuadrado sobre $GF$ (Prop. II.5). Pero $GF$ es igual a $GH$; luego el rectángulo $BE$, $EF$ junto con el cuadrado sobre $GE$ es igual al cuadrado sobre $GH$.

Pero los cuadrados sobre $HE$, $EG$ son iguales al cuadrado sobre $GH$ (Prop. I.47); luego el rectángulo $BE$, $EF$ junto con el cuadrado sobre $GE$ es igual a los cuadrados sobre $HE$, $EG$.

Sea el cuadrado sobre $GE$ que será substraido de cada uno de ellos; luego el rectángulo contenido por $BE$, $EF$ el cual permanece es igual al cuadrado sobre $EH$. Pero el rectángulo $BE$, $EF$ es $BD$, porque $EF$ es igual a $ED$; luego el paralelogramo $BD$ es igual al cuadrado sobre $HE$.

Y $BD$ es igual a la figura rectilínea $A$. Por tanto la figura rectilínea es igual al cuadrado el cual puede ser descrito sobre $EH$. Por tanto un cuadrado, el cual puede ser descrito sobre $EH$, ha sido construido igual a la figura rectilínea $A$, que es lo deseado.

■

## LIBRO III

Este Libro contiene 37 proposiciones sobre círculos (circunferencias). Las circunferencias fueron usadas para realizar construcciones en el Libro I pero ellas no fueron estudiadas en si mismas. En este Libro III, Euclides prueba los resultados conocidos sobre tangentes, cuerdas y ángulos en circunferencias. Contiene también once definiciones.

### Definiciones.

1. *Son círculos iguales aquellos cuyos diámetros son iguales, o aquellos cuyos radios son iguales.*

2. *Una recta toca a un círculo si, al encontrar al círculo y ser prolongada, no lo corta. [Esta es la definición de tangente al círculo].*

3. *Círculos están en contacto uno con otro cuando encontrándose uno con otro, no corta uno al otro.*

4. *En un círculo líneas rectas son dichas estar a distancias iguales del centro cuando las perpendiculares trazadas a ellas desde el centro son iguales.*

5. *Y aquella línea recta es llamada estar a una mayor distancia si tal perpendicular sobre ella es mayor.*

6. *Un segmento de círculo es la figura comprendida entre una recta y una circunferencia de círculo.*

7. *Un ángulo de un segmento es el comprendido por una línea recta y por una circunferencia de un círculo.*

   **Nota.** *Se dice "recta en un círculo" y no de **cuerda**; esta palabra viene del vocabulario árabe.*

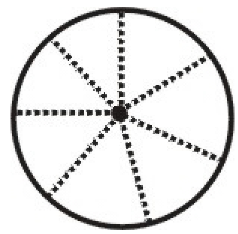
8. *Un ángulo en un segmento es el ángulo el cual, cuando un punto es tomado sobre la circunferencia del segmento y líneas rectas son unidas desde él a los extremos de la línea recta la cual es la base del segmento, está contenido por las líneas rectas así unidas.*

9. *Y, cuando las líneas rectas conteniendo el ángulo cortan una circunferencia, el ángulo es llamado "puesto sobre" aquella circunferencia.*

10. *Un sector de círculo es una figura que, construido un ángulo en el centro del círculo, está comprendida por las rectas que determinan el ángulo y por la circunferencia que encierran.*

11. *Segmentos similares de círculos son aquellos los cuales admiten ángulos iguales, o en los cuales los ángulos son iguales uno a otro.*

**Proposición 1.** *Encontrar el centro de un círculo dado.*



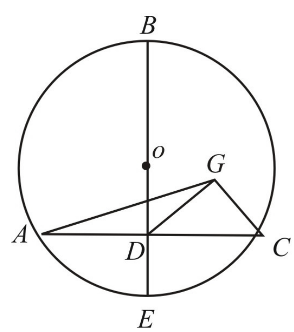
**Nota.** Remarcamos la definición de círculo dada por Euclides en los Elementos. **Definición 15.** *Un* ***círculo*** *es una figura plana, limitada por una sola línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde uno de los puntos interiores de la figura son iguales entre sí.*

**Prueba.**

Sea $ABC$ el círculo dado; deseamos encontrar el centro del círculo $ABC$. Euclides da la siguiente estrategia.

Tracemos la recta (cuerda) $AC$ y sea $D$ su punto medio: desde $D$ tracemos $DB$, de modo que forme ángulo recto con $AC$, y prolonguemos $BD$ hasta $E$ : $O$ es el punto medio de $BE$.

Afirmo que $F$ es el centro del círculo $ABC$.




Supongamos que no lo fuera, que $G$ fuera el centro del círculo, y tracemos $GA$, $GD$, $GC$.

Entonces, puesto que $AD$ es igual a $DC$ y $DG$ es común, los lados $AD$ y $DG$ son iguales respectivamente a los lados $CD$ y $DG$; y la base $GA$ es igual, por tratarse de dos radios, a la base $GB$; además, el ángulo $ADG$ es igual al ángulo $GDC$ (Prop. I.8).

Pero cuando una recta levantada sobre otra hace que dos ángulos adyacentes sean iguales entre sí, cada uno de estos ángulos es recto (Def. 10.I).

Luego el ángulo $GDC$ es recto. Pero el ángulo $ODC$ es también recto. Asi, el ángulo mayor, $ODC$, es igual al mas pequeño, $GDC$: lo que es imposible. Luego $G$ no es el centro del círculo $ABC$. En forma similar, se prueba que cualquier otro punto que no sea $O$ no es el centro.

Por lo tanto, el punto $O$ es el centro del círculo $ABC$. Esto había que hacer.

**Proposición 3.** *Si $O$ es el centro de un círculo y $AB$ una cuerda, con un punto $F$ sobre $AB$, entonces $OF$ es perpendicular a $AB$ justo cuando $F$ es el punto medio de $AB$.*

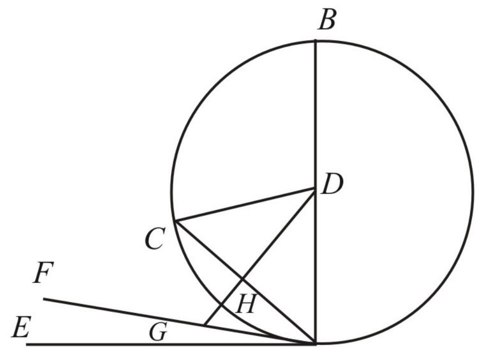
**Proposición 12.** *Si dos círculos se tocan uno a otro externamente entonces la línea recta uniendo sus centros pasa a través del "punto de contacto".*

**Proposición 16.** *La línea recta trazada a ángulos rectos al diámetro de un círculo desde sus extremos caerá fuera del círculo, y en el espacio entre la línea recta y la circunferencia otra línea recta no puede ser interpuesta; además el ángulo del semicírculo es mayor, y el ángulo restante menor, que cualquier ángulo rectilíneo agudo.*

**Prueba.**

Sea $ABC$ un círculo alrededor $D$ y $AB$ como diámetro; yo digo (dice Euclides) que la línea recta trazada desde $A$ con ángulos rectos con $AB$ desde sus extremos caerá fuera del círculo.

Supongamos que no es así, sea ella caer dentro como $CA$, y sea $DC$ unido. Desde que $DA$ es igual a $DC$, el ángulo $DAC$ es también igual a $ACD$ (Prop. I.5). Pero el ángulo $DAC$ es recto; luego el ángulo $ACD$ es también recto: así, en el triángulo $ACD$, los dos ángulos $DAC$, $ACD$ son igual a dos ángulos rectos, lo cual es imposible (Prop. I.17).




Por lo tanto la línea trazada desde el punto $A$ con ángulos recto a $BA$ no caerá dentro del círculo. Similarmente podemos probar que ni uno ni el otro caerá sobre la circunferencia; por tanto caerán afuera.

Sea ella caer como $AE$; yo digo enseguida que dentro el espacio entre la línea recta $AE$ y la circunferencia $CHA$ otra línea recta no puede ser interpuesta.

Porque si ello fuera posible, sea otra línea recta interpuesta, como $FA$ y sea $DG$ trazada desde $D$ perpendicular a $FA$. Entonces, desde que el ángulo $AGD$ es recto, y el ángulo $DAG$ es menor que un ángulo recto, $AD$ es mayor que $DG$ (Prop. I.19).

Pero $DA$ es igual a $DH$; luego $DH$ es mayor que $DG$, lo que es imposible.

Luego, otra línea recta no puede ser interpuesta dentro el espacio entre la línea recta y la circunferencia.

Yo digo además que el ángulo del semicírculo contenido por la línea recta $BA$ y la circunferencia $CHA$ es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo, y el ángulo restante contenido por la circunferencia $CHA$ y la línea recta $AE$ es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.

Porque, si existe cualquier ángulo rectilíneo mayor que el ángulo contenido por la línea recta $BA$ y la circunferencia $CHA$, y cualquier ángulo rectilíneo menor que el ángulo contenido por la circunferencia $CHA$ y la línea recta $AE$, entonces dentro del espacio entre la circunferencia y la línea recta $AE$ una línea recta será interpuesta tal que hará un ángulo contenido por líneas rectas la cual es mayor que el ángulo contenido por la línea recta $BA$ y la circunferencia $CHA$, y otro ángulo contenido por líneas rectas la cual es menor que el ángulo contenido por la circunferencia $CHA$ y la línea recta $AE$.

Pero tal una línea recta no puede ser interpuesta; por lo tanto no habrá cualquier ángulo agudo contenido por líneas rectas las cuales son mayores que el ángulo contenido por la línea recta $BA$ y la circunferencia $CHA$, ni aún cualquier ángulo agudo contenido por líneas rectas las cuales es menor que el ángulo contenido por la circunferencia $CHA$ y la línea recta $AE$.
**Conclusión.** De esto es evidente que la línea recta trazada en ángulos rectos al diámetro de un círculo desde sus extremos toca el círculo.

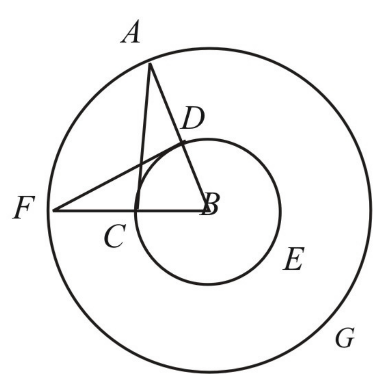
■

Observemos que Euclides considera, en la proposición 16, el espacio entre la tangente $AE$ y el arco $CHA$; él nos dice que ninguna línea recta puede ser trazada en este espacio a través de $A$, la cual cae enteramente fuera del círculo; Euclides también considera el ángulo formado por $EA$ y el "arco" $AHC$ y la Proposición 16 afirma que este ángulo es menor que cualquier ángulo agudo formado por líneas rectas.

**Proposición 17.** *Desde un punto dado, trazar una recta que toque a un círculo dado.*
**Prueba.**
Sea $A$ el punto dado y $CDE$ el círculo. Se desea trazar desde $A$ una recta que toque al círculo $CDE$. Situemos $B$ en el centro del círculo (Prop. III.1), unamos $A$ con $B$ y tracemos, con $AB$ como radio, el círculo $FAG$.

Desde $D$, tracemos $DF$ de manera que forme ángulo recto con $AB$ y unamos $B$ con $F$ y $C$ con $A$.

Yo afirmo (dice Euclides) que $AC$ ha sido trazada desde el punto $A$ y toca al círculo $CDE$.




Ya que, por ser $B$ el centro de los círculos $CDE$ y $FAG$, $BA$ es igual a

$BF$, y $BD$ es igual a $BC$. Asi, los lados $AB$ y $BC$ son iguales respectivamente a los lados $BF$ y $BD$:

- determinan un ángulo común, el ángulo en $B$;
- además, la base $DF$ es igual a la base $AC$ y el triángulo $DBF$ es igual al triángulo $CBA$, y los ángulos distintos del ángulo en $B$ son también iguales (Prop. I.4).

Además, el ángulo $BDF$ es igual al ángulo $BCA$. Pero el ángulo $BDF$ es recto, así, el ángulo $BCA$ es también recto.

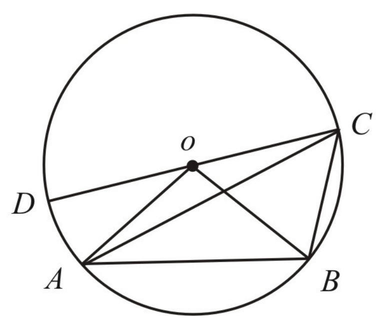
Ahora $BC$ es un radio; y la recta que forma ángulo recto con el diámetro de un círculo, toca al círculo en uno de sus extremos (Prop. III.16. Conclusión). Así $AC$ toca al círculo $CDE$. Luego, desde un punto dado $A$, se ha trazado la recta $AC$ que toca al círculo $CDE$.

Esto era lo que había que demostrar.

■

**Proposición 20.** *Si $O$ es el centro de un círculo, $AB$ una cuerda y $C$ un punto sobre la circunferencia (sobre el mismo lado de $AB$ como $O$), entonces el ángulo $AOB$ es igual al doble del ángulo $ACB$.*

**Prueba.**



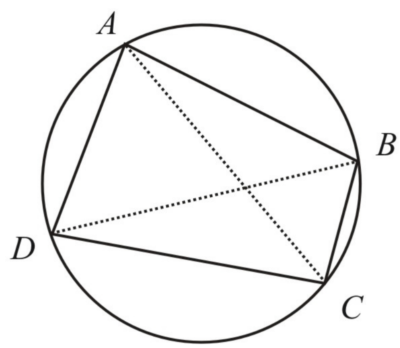

$$\begin{aligned}
\text{ángulo } AOB &= \text{ángulo } DOB - \text{ángulo } DOA \\
&= \text{ángulo } OCB + \text{ángulo } OBC - \text{ángulo } DOA \quad \text{(Prop. I.32)} \\
&= 2\,(\text{ángulo } OCB) - \text{ángulo } DOA \quad \text{(Prop. I.5)} \\
&= 2\,(\text{ángulo } OCB) - 2\,(\text{ángulo } OCA) = 2\,(\text{ángulo } ACB)\,.
\end{aligned}$$

■

**Proposición 21.** *En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales.*

**Proposición 22.** *Si los vértices de un cuadrilátero están sobre la circunferencia de un círculo entonces los ángulos opuestos suman dos ángulos rectos.*
**Prueba.**
Sea el cuadrilátero $ABCD$ inscrito en el círculo dado; sean $AC$ y $BD$ las diagonales del cuadrilátero. Se tiene:

$$\text{ángulo } ABD + \text{ángulo } ADB + \text{ángulo } DAB \quad = \quad 2 \text{ ángulos rectos.}$$




Pero,

$$\begin{aligned} \text{ángulo } ABD &= \text{ángulo } ACD \quad \text{(ambos interceptan el arco } AD) \\ \text{ángulo } ADB &= \text{ángulo } ACB \quad \text{(ambos interceptan el arco } AB). \end{aligned}$$

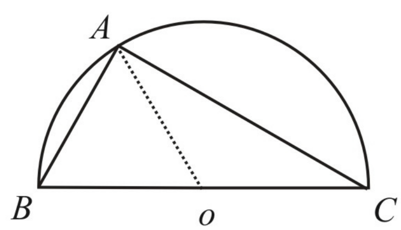
Luego,

$$\begin{aligned} 2 \text{ ángulos rectos} &= \text{ángulo } ACD + \text{ángulo } ACB + \text{ángulo } DAB \\ &= \text{ángulo } DCB + \text{ángulo } DAB. \end{aligned}$$

Esto es lo que se quería demostrar.

■

**Proposición 31.** *Un ángulo inscrito en un semi-círculo es un ángulo recto.*
**Prueba.**
El triángulo $AOB$ es isósceles.



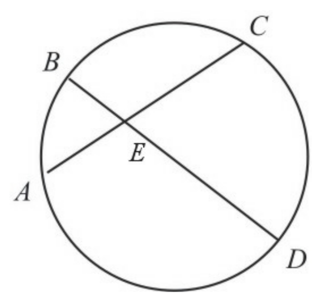
Luego, ángulo $ABO =$ ángulo $BAO$. Como el triángulo $AOC$ es isósceles, se tiene también: ángulo $OAC =$ ángulo $OCA$. Luego, en el triángulo $BAC$ :

$$\begin{aligned} 2\text{ángulos rectos} &= \text{ángulo } BAO + \text{ángulo } OAC + (\text{ángulo } BAO + \text{ángulo } OAC) \\ &= 2(\text{ángulo } BAO + \text{ángulo } OAC). \end{aligned}$$

Luego, un ángulo recto= ángulo $BAC$. Que es lo que se quería demostrar.

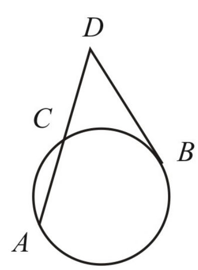
■

**Proposición 35.** *Si $AEC$ y $BED$ son cuerdas de un mismo círculo que se encuentran en $E$, entonces $AE \times EC = BE \times ED$.*




**Proposición 37.** *Si un punto $D$ está fuera de un círculo y $BD$ es una tangente al círculo, mientras $D \subset A$ es una línea recta tal que $CA$ es una cuerda del círculo, entonces*

$$DB^2 = DC \times DA.$$




Observemos que la Proposición 37 nos afirma que el cuadrado construido sobre la tangente es igual al rectángulo contenido por la secante entera y su segmento exterior al círculo.

**LIBRO IV**

Este Libro contiene 7 definiciones de figuras poligonales, inscritas o circunscritas que abarcan figuras rectilíneas y al círculo; contiene 16 proposiciones que tratan sobre construcciones con regla y compás de polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y quince lados. El contenido de este Libro es la geometría del círculo, que se atribuye a Hipócrates de Quíos. El Libro culmina con el tratamiento del polígono regular de 15 lados. Se tuvo que esperar muchísimos siglos, hasta 1796, cuando el joven K. F. Gauss (con 19 años de edad) probó que un polígono regular con un número primo de lados se puede construir con regla y compás **si y solo si** tal número es de la forma $2^{2^n}+1$. De esta manera, Gauss pudo construir un polígono regular inscrito de 17 lados. Se debe resaltar que los polígonos de 7, 9, 11 y 13 lados **no** se pueden construir con regla y compás.

Veamos las definiciones dadas en este Libro.

**Definición 1.** *Se dice que una figura rectilínea está inscrita en otra figura rectilínea, cuando cada uno de los ángulos de la figura inscrita toca los lados respectivos de la figura en la que se inscribe.*

**Definición 2.** *Análogamente, se dice que una figura está circunscrita en torno de otra figura cuando cada lado de la figura circunscrita toca los ángulos respectivos de la figura a la que se circunscribe.*

**Definición 3.** *Se dice que una figura rectilínea está inscrita en un círculo, cuando cada ángulo de la figura inscrita toca la circunferencia del círculo.*

**Definición 4.** *Se dice que una figura rectilínea está circunscrita en torno a un círculo, cuando cada lado de la figura circunscrita toca a la circunferencia del círculo.*

**Definición 5.** *Análogamente, se dice que un círculo está inscrito en una figura, cuando la circunferencia del círculo toca cada lado de la figura en la que está inscrita.*

**Definición 6.** *Se dice que un círculo está circunscrito en torno de una figura, cuando la circunferencia del círculo toca cada ángulo de la figura en torno a la que está circunscrita.*

**Definición 7.** *Se dice que una recta está adaptada a un círculo, cuando sus extremos están en la circunferencia del círculo.*

Presentamos a continuación las 16 proposiciones contenidas en este Libro. Una tarea interesante es realizar las construcciones planteadas en tales proposiciones.

**Proposición 1.** *Adaptar a un círculo dado una recta igual a una recta dada que no sea mayor que el diámetro.*

**Proposición 2.** *Inscribir en un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.*

**Proposición 3.** *Circunscribir en torno a un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.*

**Proposición 4.** *Inscribir un círculo en un triángulo dado.*

**Proposición 5.** *Circunscribir un círculo en torno a un triángulo dado.*

**Proposición 6.** *Inscribir un cuadrado en un círculo dado.*

**Proposición 7.** *Circunscribir un cuadrado en torno a un círculo dado.*

**Proposición 8.** *Inscribir un círculo en un cuadrado dado.*

**Proposición 9.** *Circunscribir un círculo en torno a un cuadrado dado.*

**Proposición 10.** *Construir un triángulo isósceles cada uno de cuyos ángulos de la base sea el doble del ángulo restante.*

**Proposición 11.** *Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.*

**Proposición 12.** *Circunscribir un pentágono equilátero y equiángulo en torno a un círculo dado.*

**Proposición 13.** *Inscribir un círculo en un pentágono dado que sea equilátero y equiángulo.*

**Proposición 14.** *Circunscribir un círculo en torno a un pentágono dado que sea equilátero y equiángulo.*

**Proposición 15.** *Inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.*

**Proposición 16.** *Inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.*

**Nota.** Es claro que tales construcciones deben ser hechas con las herramientas de Euclides, es decir, usando solo regla y compás.

## LIBRO V.

El Libro V está dedicado a la teoría de las proporciones de Eudoxo; según la crítica es uno de los mas importantes dentro de los trece libros de los Elementos; sin embargo, los antiguos matemáticos griegos trataron de exitar el uso de las proporciones debido a la crisis a que los había llevado los inconmensurables en donde se usó la idea de proporcionalidad.

Por ejemplo, en vez de usar la relación, entre longitudes, de la forma $\frac{y}{a} = \frac{b}{c}$ ellos usaban la igualdad $yc = ab$. No obstante la profundidad y originalidad de este libro respecto a los otros, debido a la actual teoría de los números reales (y del álgebra simbólica) este libro aparece ahora como una obra superflua y es casi dejada de lado. Asi, el Libro V contiene las Leyes de distributividad (izquierda y derecha), la asociatividad de la multiplicación y las propiedades generales de las proporciones y de las razones. Contiene 18 definiciones sobre las proporciones y 25 proposiciones. Estos resultados Euclides los utiliza en el Libro VI para demostrar teoremas sobre razones y proporciones en el estudio de los triángulos, paralelogramos y polígonos semejantes; por ejemplo se encuentra en este Libro VI una generalización del teorema de Pitágoras.

El Libro V fue vital en el desarrollo de la matemática; él está relacionado con los números irracionales, algo que los griegos trataron de evitar en sus estudios de la geometría. De algún modo, acá está la genesis de la futura teoría de los números reales y sabemos del gran valor de esta teoría en la matemática moderna.

Veamos las definiciones encontradas en el Libro V.

**Definición 1.** *Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.*

*"Parte" significa sub múltiplo, como 3 es de 12, en tanto que 5 no es submúltiplo de 12.*

**Definición 2.** *Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.*

*"Múltiplo" significa múltiplo entero.*

**Definición 3.** *Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.*

**Definición 4.** *Se dice que existe una razón entre magnitudes si, al ser multiplicadas, pueden sobrepasarse mutuamente.*

Esta definición es semejante al lema de Arquímedes. Ella significa que las magnitudes $a$ y $b$ tienen una razón si algún entero múltiplo $n$ (puede ser $n = 1$) de $a$ excede a $b$, y algún múltiplo entero (puede ser 1) de $b$ excede a $a$. Esta definición excluye a magnitudes infinitamente pequeñas o grandes.

**Definición 5.** *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente.*

Esta definición nos dice que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si cuando multiplicamos $a$ y $c$ por cualquier número (natural) $m$, digamos, y $b$ y $d$ por cualquier número (natural) $n$, entonces para tales elecciones de $m$ y $n$, se tiene, si $ma < nb$ entonces $mc < nd$, $ma = nb$ entonces $mc = nd$; además, $ma > nb$ implica $mc > nd$.

**Definición 6.** *Se llaman proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.*

**Definición 7.** *Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.*

Esta definición nos dice que si $ma > nb$ pero $mc$ es no mayor que $nd$, entonces $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$.

**Definición 8.** *Una proporción entre tres términos es la menor posible. Asi,* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$.

**Definición 9.** *Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que guarda con la segunda.*

Esto significa que si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$, entonces $a$ tiene la razón duplicada con $c$ que ella tiene con $b$. Esto significa que $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2}{b^2}$ (ya que $a = \dfrac{b^2}{c}$, luego $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{a^2}{b^2}$).

**Definición 10.** *Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que guarda con la segunda, y asi siempre, sucesivamente, sea cual sea la proporción.*

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$, entonces $a$ tiene una razón triple con $d$ que ella tiene con $b$. Esto significa: $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a^3}{b^3}$ (ya que $a = \dfrac{b^2}{c}$ entonces $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b^2}{cd} = \dfrac{b^2}{c^2}\dfrac{c}{d} = \dfrac{a^3}{b^3}$).

**Definición 11.** *Se llaman magnitudes correspondientes los antecedentes en relación con los antecedentes y los consecuentes con los consecuentes.*

**Definición 12.** *Una razón por alternancia consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.*

**Definición 13.** *Una razón por inversión consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.*

**Definición 14.** *La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola magnitud en relación con el propio consecuente.*

**Definición 15.** *La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.*

**Definición 16.** *La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.*

**Definición 17.** *Una razón por igualdad se da cuando, habiendo diferentes magnitudes y otras iguales a las primeras en un número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es la última - entre las primeras magnitudes -, asi pues - entre las segundas magnitudes - la primera es a la última; o dicho de otra forma, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.*

**Definición 18.** *Una proposición perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente - entre las primeras magnitudes -, asi pues - entre las segundas magnitudes - el antecedente es al consecuente, y como el consecuente es a otra magnitud - entre las primeras magnitudes -, asi pues - entre las segundas magnitudes - alguna otra magnitud es al antecedente.*

Las primeras seis proposiciones del Libro V son simples resultados encontrados en la actual aritmética; sin embargo, para aquella época constituyen un modo organizado de presentar tales resultados básicos.

**Proposición 1.** *Si existe un número cualquiera de magnitudes cualesquiera, equimúltiplos respectivos de magnitudes cualesquiera, iguales en número, entonces, cualquiera que sea el múltiplo, la suma de los equimúltiplos es igual al múltiplo de estas magnitudes.*

***En otras palabras***,

$$ma + mb + mc + ... = m\,(a + b + c + ...)\,.$$

**Prueba.**

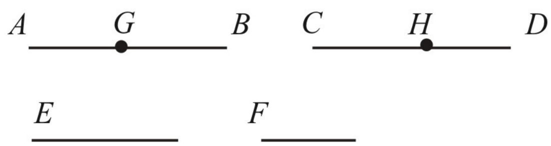
Sea un número cualquiera de magnitudes cualquiera, $AB$ y $CD$, equimúltiplos respectivos de magnitudes cualesquiera $E$ y $F$, iguales en número:

Afirmo que, cualquiera que sea el múltiplo que $AB$ es de $E$, $AB$ y $CD$ serán este mismo múltiplo de $E$ y $F$.

Ya que, por ser $AB$ el mismo múltiplo de $E$ que $CD$ es de $F$, hay tantas magnitudes iguales a $E$ en $AB$ como en $CD$ iguales a $F$. Dividamos $AB$ en magnitudes $AG$ y $GB$ iguales a $E$ y $CD$ en magnitudes $CH$ y $HD$ iguales a $F$.

Entonces la multitud de las magnitudes $AG$ y $GB$ será igual a la de las magnitudes $CH$ y $HD$. Ahora puesto que $AG$ es igual a $E$, y $CH$ a $F$, $AG$

es igual a $E$, y $AG$ y $CH$ igual a $E$ y $F$.




Por la misma razón, $GB$ es igual a $E$, y $GB$ y $HD$ a $E$ y $F$. Asi, hay tantas magnitudes en $AB$, cada una igual a $E$, como en $AB$ y $CD$, cada una igual respectivamente a $E$ y $F$. Por tanto, cualquiera que sea el múltiplo que $AB$ es de $E$, $AB$ y $CD$ serán este mismo múltiplo de $E$ y $F$.

Esto era lo que había que demostrar.

$\blacksquare$

**Proposición 2.** *Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.*

***En otras palabras***,

$$ma + na + pa + ... = (m + n + p + ...)\, a.$$

**Proposición 3.** *Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos magnitudes tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta.*

***En otras palabras***, *si* $m.na$, $m.nb$ *son equimúltiplos de* $na$, $nb$, *los cuales son ellos mismos equimúltiplos de* $a$, $b$, *entonces* $m.na$, $m.nb$ *son también equimúltiplos de* $a$, $b$. *(Euclides prueba que* $m.na = mn.a$ *y* $m.nb = mn.b$*).*

**Proposición 4.** *Si una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.*

***En otras palabras***, *si*

$$a : b = c : d \quad \textit{entonces} \quad ma : nb = mc : nd.$$

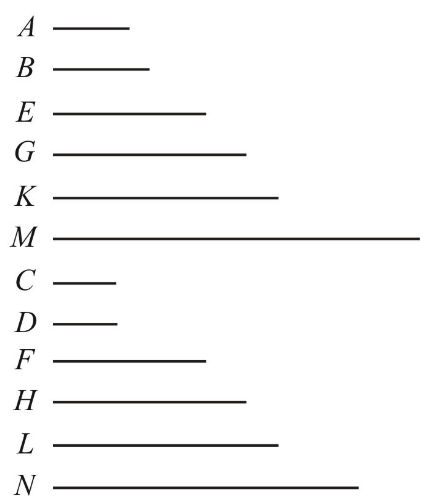
**Prueba.** Supongamos que la razón entre las magnitudes $A$ y $B$ es la misma que entre una tercera magnitud $C$ y una cuarta $D$; y sean los equimúltiplos $E$ y $F$, de $A$ y $F$, y $G$ y $H$, de $B$ y $D$.

Afirmo que $E$ es a $G$ como $F$ es a $H$.

Ya que, si tomamos los equimúltiplos $K$ y $L$, de $E$ y $F$, y $M$ y $N$, de $G$ y $H$, puesto que $E$ es el mismo múltiplo de $A$ que $F$ es de $C$, y que los equimúltiplos $K$ y $L$ de $E$ y $F$ están próximos, $K$ es el mismo múltiplo de $A$ que $L$ de $C$. (Prop. 3).

Por la misma razón, $M$ es el mismo múltiplo de $B$ que $N$ es de $D$, y como $A$ es a $B$, también $C$ es a $D$, y, de $A$ y $C$, los equimúltiplos $K$ y $L$ han sido calculados, y, de $B$ y $D$, los equimúltiplos $M$ y $N$, así, si $K$ excede a $M$, $L$ excede también a $N$, si es igual también lo es, y si es menor también.

$K$ y $L$ son equimúltiplos de $E$ y $F$, e igualmente $M$ y $N$ son equimúltiplos de $G$ y $H$ : por tanto, $E$ es a $G$ como $F$ es a $H$.




Esto era lo que deseábamos demostrar.

**En otras palabras**, sean los equimúltiplos, cualquiera, $p.ma$, $p.mc$ de $ma$, $mc$, y cualquier equimúltiplos $q.nb$, $q.nd$ de $nb$, $nd$. Luego, por la Prop. 3, esos equimúltiplos son también equimúltiplos de $a$, $c$ y $b$, $d$ respectivamente, asi que por la Definición 5, desde que $a : b = c : d$, tendremos $p.ma >=< q.nb$ según como $p.mc >=< q.nd$; luego, aún por la Definición 5 y desde que $p$; $q$ son enteros, se tendrá, $ma : nb = mc : nd$.

■

**Proposición 5.** *Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra, que una* *magnitud restada a la primera lo es de otra restada a la segunda; la magnitud que queda de la primera será también el mismo múltiplo de la magnitud que queda de la segunda que la magnitud entera de la magnitud entera.*

***En otras palabras***,

$$ma - mb = m\,(b - a)\,.$$

**Proposición 6.** *Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas magnitudes restadas de ellas son equimúltiplos de estas dos segundas, las que queden también son o bien iguales a las mismas o bien equimúltiplos de ellas.*

***En otras palabras***,

$$ma - na = (m - n)\,a.$$

**Proposición 7.** *Las magnitudes iguales guardan la misma razón con una misma magnitud y la misma magnitud guarda la misma razón con las magnitudes iguales.*

***En otras palabras***, *si* $a = b$ *entonces*

$$a : c = b : c \qquad y \qquad c : a = c : b\ .$$

**Prueba.** Usaremos la Def. 5. Sean $ma$, $mb$ equimúltiplos de $a$, $b$, y $nc$ múltiplo de $c$. Luego, desde que $a = b$, se tiene $ma >=< nc$ según como $mb >=< nc$, y $nc >=< ma$ según que $nc >=< mb$. Entonces se tiene la igualdad deseada en la tesis.

■

**Proposición 8.** *De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma magnitud una razón mayor que la menor, y la misma magnitud guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.*

***En otras palabras***: *si* $a > b$ *entonces*

$$a : c > b : c \qquad y \qquad c : b > c : a\ .$$

**Proposición 9.** *Las magnitudes que guardan con una misma magnitud la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las cuales una misma magnitud guarda la misma razón, son iguales.*

***En otras palabras**, si* $a : c = b : c$ *y* $c : a = c : b$, *entonces* $a = b$.

**Proposición 10.** *De las magnitudes que guardan razón con una misma magnitud, la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma magnitud guarda una razón mayor, es menor.*

***En otras palabras**, si* $a : c > b : c$ *y* $c : b > c : a$, *entonces* $a > b$.

**Proposición 11.** *Las razones que son iguales a una misma son iguales también entre si.*

***En otras palabras**, si* $a : b = c : d$ *y* $c : d = e : f$, *entonces* $a : b = e : f$.

**Proposición 12.** *Si un número cualquiera de magnitudes fueran proporcionales, como sea uno de los antecedentes a uno de los consecuentes, así lo serán todos los antecedentes a los consecuentes.*

***En otras palabras**, si* $a : b = c : d = e : f = ...$ , *entonces*

$$a : b = (a + c + e + ...) : (b + d + f + ...) .$$

**Proposición 13.** *Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta.*

***En otras palabras**, si* $a : b = c : d$ *y* $c : d > e : f$, *entonces* $a : b > e : f$.

**Proposición 14.** *Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si es menor, será menor.*

***En otras palabras**, si* $a : b = c : d$, *entonces de acuerdo a como* $a >=< c$, *se tiene* $b >=< d$.

**Proposición 15.** *Las partes guardan la misma razón entre sí que sus múltiplos, tomados en el orden correspondiente.*

***En otras palabras**,* $a : b = ma : mb$.

**Proposición 16.** *Si cuatro magnitudes son proporcionales, también alternando serán proporcionales.*

***En otras palabras**: si $a : b = c : d$, entonces $a : c = b : d$.*

**Proposición 17.** *Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también serán proporcionales por separación.*

***En otras palabras**: si $a : b = c : d$, entonces $(a - b) : b = (c - d) : d$.*

**Proposición 18.** *Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también serán proporcionales por composición.*

***En otras palabras**: si $a : b = c : d$, entonces $(a + b) : b = (c + d) : d$.*

**Proposición 19.** *Si tal y como un todo es a otro todo, así es una parte restada de uno a una parte restada de otro, la parte que queda será también a la parte que queda tal y como el todo es al todo.*

***En otras palabras**: si $a : b = c : d$, entonces $(a - c) : (b - d) = a : b$.*

**Proposición 20.** *Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, y si es menor, menor.*

***En otras palabras**: si $a : b = d : e$, y $b : c = e : f$ entonces de acuerdo a si $a >=< c$, se tiene $d >=< f$.*

**Proposición 21.** *Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y la proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.*

***En otras palabras**: si $a : b = e : f$, y $b : c = d : e$ entonces, según $a >=< c$, se tiene $d >=< f$.*

**Proposición 22.** *Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.*

***En otras palabras**: si $a : b = d : e$, y $b : c = e : f$, entonces $a : c = d : f$.*

**Proposición 23.** *Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.*

***En otras palabras***: *si* $a : b = e : f$*, y* $b : c = d : e$*, entonces* $a : c = d : f$.

**Proposición 24.** *Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntamente, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.*

***En otras palabras***: *si* $a : c = d : f$*, y* $b : c = e : f$*, entonces* $(a + b) : c = (d + e) : f$.

**Proposición 25.** *Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor juntas son mayores que las dos que quedan.*

***En otras palabras***: *si* $a : b = c : d$*, y para los cuatro términos* $a$ *es la mayor (asi que* $d$ *es también la menor), se tiene* $a + d > b + c$.

## LIBRO VI

Este Libro está dedicado a las figuras geométricas semejantes y proporcionales. Euclides utiliza en este Libro lo tratado en el Libro V sobre la teoría de las proporciones. Prueba teoremas relacionados con razones y proporciones en el estudio de los triángulos, paralelogramos y polígonos semejantes. Es el inicio de la teoría de los polígonos semejantes.

Contiene 4 definiciones; define lo que se entiende por figuras semejantes; define lo que es altura en una figura; define lo que se entiende por definir un segmento en media y extrema razón; esto es lo que se conoce como la **división áurea**. Contiene 33 proposiciones, entre las que contienen la construcción de la tercera, la cuarta y la media proporcional. Se presenta una solución geométrica de las ecuaciones cuadráticas.

**Definición 1.** *Figuras rectilíneas semejantes son aquellas figuras que tienen sus ángulos severamente iguales y los lados que conforman los ángulos iguales son proporcionales.*

**Definición 3.** *Una línea recta es cortada en media y extrema razón cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor.*

**Definición 4.** *La altura en cualquier figura es la perpendicular trazada desde el vértice a la base.*

**Proposición 1.** *Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.*

**Proposición 2.** *Si se dibuja una línea recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo. (Actualmente esta propiedad se conoce como un corolario del "teorema de Tales").*

**Proposición 3.** *Si se divide en dos partes iguales el ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también a la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados del triángulo que queden; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados que quedan del triángulo, la recta dibujada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales al ángulo del triángulo.*

**Proposición 4.** *En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden a los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden a los ángulos iguales son correspondientes.*

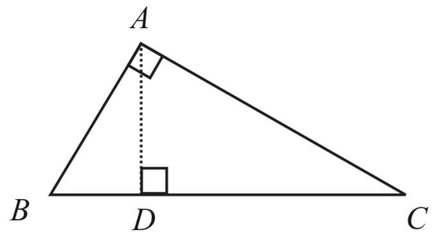
**Proposición 5.** *Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos los cuales subtienden a los lados correspondientes.*

**Proposición 6.** *Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro, y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.*

**Proposición 7.** *Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro y tienen proporcionales los lados que comprenden a los otros ángulos, y tienen los ángulos que quedan de manera aparejada menores o no menores a un ángulo recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales.*

**Proposición 8.** *Si en un triángulo rectángulo se dibuja una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo entero y entre si.*
**Prueba.** Obsérvese que los triángulos $BAC$ y $BDA$ contienen ambos ángulos rectos, en los ángulos $BAC$ y $BDA$ respectivamente, y ambos comparten

al ángulo $ABD$. Entonces, por la Prop. 32.I, sus tercer son iguales. La semejanza, y por lo tanto la proporcionalidad de los lados, seguirá de la Prop. 4. VI.




La semejanza de los triángulos $BAC$ y $ADC$, y la de los triángulos mas pequeños $BDA$ y $ADC$ son probados de manera similar.

■

**Proposición9.** *Restar de una línea recta dada la parte que se pida.*

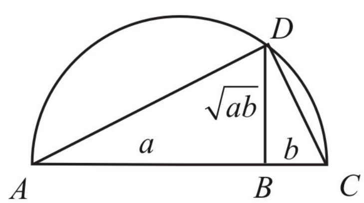
**Proposición 10.** *Dividir una línea recta dada no dividida de manera semejante a una recta dada que ya está dividida.*

**Proposición 11.** *Dadas dos líneas rectas, encontrar una tercera proporcional.*

**Proposición 12.** *Dadas tres líneas rectas, encontrar una cuarta proporcional.*

**Proposición 13.** *Dadas dos líneas rectas, encontrar una media proporcional.*
**Prueba.** Sean $AB$ y $BC$ las dos líneas rectas dadas; deseamos encontrar una media proporcional a $AB$, $BC$.

Ya que, coloquemos ellas en una línea recta y construyamos el semi-círculo $ADC$ sobre $AC$; sea $BD$ trazada desde $B$ formando ángulos rectos con la línea recta $AC$; unamos $A$ con $D$ y $C$ con $D$.




Desde que el ángulo $ADC$ es un ángulo recto (Prop. 31.III), y desde que, en el triángulo rectángulo $ADC$, $DB$ ha sido trazada desde el ángulo recto perpendicular a la base, entonces $DB$ es una media proporcional entre los segmentos de la base $AB$, $BC$ (Prop. 8.VI).

Por consiguiente a dos líneas rectas dadas $AB$, $BC$ una media proporcional $DB$ ha sido encontrada. Que se lo que se quería demostrar.

■

Recordemos que un argumento similar fue hecho cuando se construyó la raíz cuadrada de un segmento dado. Ver (5)(i). I.24. La Proposición 13 nos ilustra la forma de construir la media proporcional de dos segmentos dados. Si $a = AB$, $b = BC$, entonces la media proporcional de $a$, $b$ es $\sqrt{ab}$. Recalcamos el carácter geométrico del argumento dado.

**Proposición 14.** *En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y los paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.*

**Proposición 15.** *En los triángulos iguales que tienen un ángulo igual el uno del otro, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo igual el uno del otro y los lados que comprenden los ángulos iguales y que están inversamente relacionados, son iguales.*

**Proposición 16.** *Si cuatro líneas rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por los extremos es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por los extremos es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro líneas rectas serán proporcionales.*

Observemos que la Proposición 16 es la familiar propiedad de las fracciones numéricas: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$.

**Proposición 17.** *Si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por los extremos es igual al cuadrado de la media; y si el rectángulo comprendido por los extremos es igual al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales.*

**Proposición 18.** *A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura rectilínea dada.*

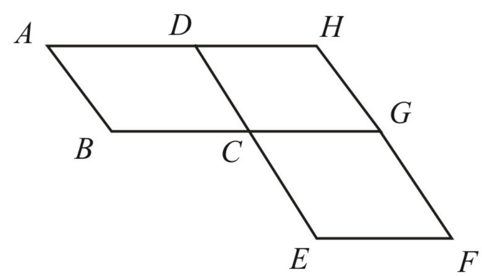
**Proposición 19.** *Los triángulos semejantes guardan entre si la razón duplicada de sus lados correspondientes.*

**Proposición 20.** *Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los polígonos enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.*

**Proposición 21.** *Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.*

**Proposición 22.** *Si cuatro líneas rectas son proporcionales, las figuras rectlíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si, las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias líneas rectas serán también proporcionales.*

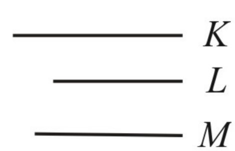
**Proposición 23.** *Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de las razones de sus lados.*
**Prueba.** Dados los paralelogramos equiángulos $ABCD$ y $CEFG$ coloquémoslo como en la figura adjunta, con los ángulos $BCD$ y $GCE$ opuestos por el vértice en $C$; complétese el paralelogramo $CDHG$.




Tomemos cualquier otra línea recta $K$ y (vía Prop. 12. VI) encontramos otra, $L$, tal que $BC : CG = K : L$; y aún otra línea recta $M$, tal que $DC : CE = L : M$.

Ahora la "razón compuesta" (que Euclides no definió explicitamente) de $K : L$ y $L : M$ es $K : M$; luego $K : M$ es la "razón compuesta de la razón de los lados".

Se desea probar $(ABCD) : (CEFG) = K : M$.



Ya que $(ABCD) : (DCGH) = BC : CG = K : L$; $(DCGH) : (CEFG) = DC : CE = L : M$. Luego, (Prop. 22.V), se tiene $(ABCD) : (CEFG) = K : M$.

■

**Proposición 24.** *En todo paralelogramo, los paralelogramos situados alrededor de su diagonal son semejantes al paralelogramo entero y entre sí.*

**Proposición 25.** *Construir una misma figura semejante a una figura rectilínea dada, e igual a otra figura dada.*
**Nota.** "Igual" significa "igual en área".

**Proposición 26.** *Si se quita de un paralelogramo un paralelogramo semejante y situado de manera semejante al paralelogramo entero que tenga un ángulo común con él, está alrededor de la misma diagonal que el paralelogramo entero.*

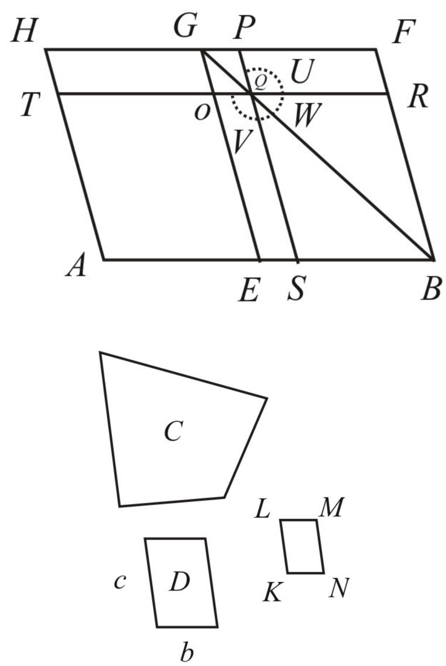
En las proposiciones 27, 28 y 29 se encuentran problemas los cuales son equivalentes geométricos de la solución algebraica de la forma mas general de ecuación cuadrática, donde la ecuación tiene una solución real positiva.

**Proposición 27.** *De todos los paralelogramos aplicados a una misma línea recta y deficientes en figuras paralelogramas semejantes y situadas de forma semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el paralelogramo mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto.*

La prueba de esta proposición la presentaremos usando un mismo gráfico, el que es usado también para verificar la siguiente proposición. ([HEA], Vol. I).

**Proposición 28.** *Aplicar a una línea recta un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.*
**Pruebas.**

Veamos la Proposición 28. Sea $AB$ una línea recta; apliquemos un paralelogramo a $AB$ asi que ella cae mas corto o excede a cierto otro paralelogramo. Supongamos que $D$ es el paralelogramo dado al cual el defecto en este caso es semejante. Bisectemos $AB$ en $E$, y sobre la mitad $EB$ describamos el paralelogramo $GEBF$ semejante y semejantemente situado a $D$.




Tracemos la diagonal $GB$ y completemos el paralelogramo $HABF$. Ahora, si trazamos a través de cualquier punto $T$ sobre $HA$ una línea recta $TR$ paralela a $AB$ encontrando la diagonal $GB$ en $Q$, y entonces trazamos $PQS$ paralelo a $TA$, el paralelogramo $TASQ$ es un paralelogramo aplicado a $AB$ pero que cae corto por un paralelogramo semejante y semejantemente situado a $D$, desde que el deficiente paralelogramo es $QSBR$ el cual es semejante a $EF$ (recalcamos "$EF$" significa el paralelogramo $EBFG$), por la anterior Prop. 24.

Ahora consideremos el paralelogramo $AQ$ cayendo corto por $SR$ semejante y semejantemente situado a $D$. Como $(AO) = (ER)$ y $(OS) = (QF)$, se tiene que el paralelogramo $AQ$ es igual al "gnomon" $UWV$ [según Herón de Alejandría, un "gnomon" es aquello el cual cuando añadido a cualquier cosa, número o figura, hace al todo semejante a aquello el cual es añadido]. Por tanto el problema es construir el "gnomon" $UWV$ tal que su área sea igual a la de la figura rectilínea $C$. El "gnomon" no puede ser mayor que el paralelogramo $EF$, y de acá la dada figura rectilínea $C$ no puede ser mayor que aquel paralelogramo.

Desde que el “gnomon” es igual a $C$, se tiene que el paralelogramo $GOQP$ el cual con él hace al paralelogramo $EF$ sea igual a la diferencia entre $(EF)$ y $C$.

Luego, en orden a construir el “gnomon” requerido, solamente se tiene que trazar en el ángulo $FGE$ el paralelogramo $GOQP$ igual a $(EF) - C$ y semejante y semejantemente situado a $D$. Euclides hizo ello! Él construye el paralelogramo $LKNM$ igual a $(EF) - C$, y semejante y semejantemente situado a $D$ (vía Prop. 25 anterior), y entonces construye $GOQP$ igual a tal paralelogramo.

De esta manera, el problema es resuelto, $TASQ$ es el paralelogramo requerido.

■

**Proposición 29.** *Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada que exceda en una figura paralelograma semejante a una dada.*

Reexaminemos las proposiciones 27, 28 (y 29) a fin de comprender mejor sus significados asi como sus interpretaciones algebraicas. (Ver [KLI], vol 1. pag. 74).

Sea $E$ el punto medio de la línea recta $AB$ (Ver figura $\alpha$ adjunta); sobre $AE$ construyamos el paralelogramo $AG$. Ahora consideramos el paralelogramo $AQ$ sobre $AS$ el cual es parte de $AB$ sujeto a la condición que el defecto de $AQ$, el cual es $QB$, sea un paralelogramo a $AG$. Se puede obtener diversos paralelogramos con las condiciones que $AQ$ tiene. Euclides nos dice que de todos tales paralelogramos, el paralelogramo construido sobre $AE$, el cual es la mitad de $AB$, tiene la mayor área. Esto es la Proposición 27. Veamos su interpretación algebraica.

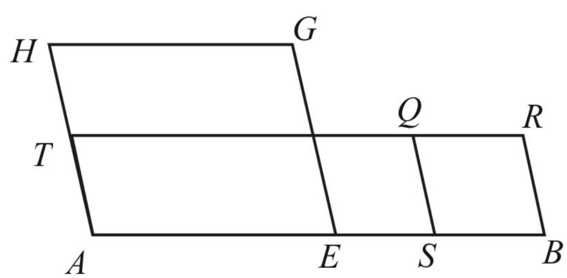



Figura $\alpha$

Supongamos que el paralelogramo dado $AG$ fuera un rectángulo (ver figura $\beta$) y que la razón de sus lados es $c$ a $b$, donde $c = BF$ y $b = AE$. Ahora consideremos el rectángulo $AQ$ el cual es requerido tener la condición que su defecto, el rectángulo $QB$, sea semejante a $AG$.

Si denotamos $QS$ con $x$, entonces $SB$ es $\dfrac{bx}{c}$.

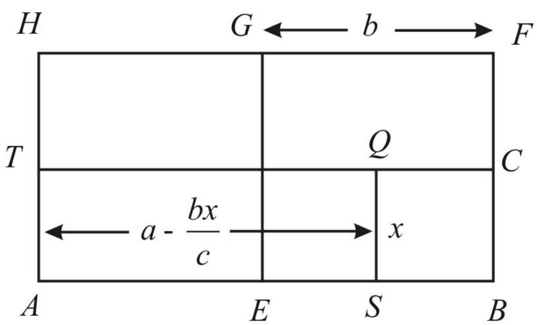



Figura $\beta$

Sea "$a$" la longitud de $AB$; luego $AS = a - \dfrac{bx}{c}$.

Luego el área $\widetilde{S}$ de $AQ$ es

$$\widetilde{S} = x\left(a - \frac{bx}{c}\right). \tag{$*$}$$

Entonces, la Proposición 27 nos dice que $\widetilde{S}$ es máximo cuando $AQ$ es $AG$. Pero $AE = \dfrac{a}{2}$ y $EG = \dfrac{ac}{2b}$. De acá, $\widetilde{S} \le \dfrac{a^2c}{4b}$.

Por otro lado, la condición de que la ecuación $(*)$, considerada como una ecuación cuadrática en $x$ tenga una raíz real es que su discriminante sea mayor o igual que cero. Esto es,

$$a^2 - 4\,\frac{b}{c}\,\widetilde{S} \ge 0,$$

lo que implica

$$\widetilde{S} \le \frac{a^2c}{4b}.$$

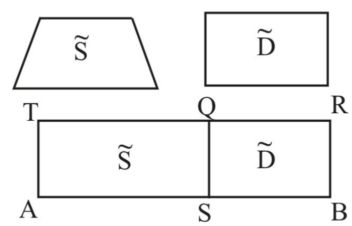
Asi el mensaje de la Prop. 27 es que el posible mayor valor de $\widetilde{S}$ es, para todos los posibles valores, que existe un $x$ el cual satisface $(*)$, y además, nos da geométricamente un lado, $SQ$, del rectángulo $AQ$.

¿Qué sucede si el paralelogramo $AG$ fuera un cuadrado?

Respecto a la Proposición 28, ella es el equivalente geométrico de la solución de la ecuación cuadrática

$$ax - \frac{b}{c}\,x^2 = \widetilde{S},$$

donde $\widetilde{S}$ es el área de una figura rectílinea dada y está sujeta a la condición para una solución real, lo que significa que $\widetilde{S} \leq \dfrac{a^2c}{4b}$.




En efecto, supongamos, por conveniencia que los paralelogramos sean rectángulos; $\widetilde{S}$ es la figura dada, $\widetilde{D}$ es otra figura rectangular dada con lados $c$ y $b$, $a = AB$, $x$ es un lado del rectángulo deseado.

Euclides construye el rectángulo $ASQT$ de área $\widetilde{S}$ y tal que el defecto $\widetilde{D'}$ sea semejante a $\widetilde{D}$.

Se tiene, $ASQT = ABRT - \widetilde{D'}$. Desde que $\widetilde{D'}$ es semejante a $\widetilde{D}$ su área es $\dfrac{bx^2}{c}$. Luego,

$$\widetilde{S} = ax - \frac{b}{c}\,x^2. \qquad (**)$$

De esta manera, construir $ASQT$ es encontrar $AS$ y $x$ tal que $x$ satisface $(**)$.

En cuanto a la Proposición 29, la figura rectilínea dada es $\widetilde{S}$ y el paralelogramo dado es $\widetilde{D}$. Desde el punto de vista algebraico, la proposición lleva a la ecuación $ax - \dfrac{b}{c}\,x^2 = \widetilde{S}$, donde $a,\ b,\ c$ y $\widetilde{S}$ son dados.

**Nota.** Es importante mencionar que los respectivos paralelogramos en las proposiciones 28 y 29 fueron llamados por los griegos "elleipsis" e "hyperbolē". Por otro lado, un paralelogramo (de área dada) construida sobre una línea recta dada en la Proposición 44 Libro I, fué llamada "parabolē". Estamos asi en la génesis de las secciones cónicas, las que fueron estudiadas por Apolonio.

**Proposición 30.** *Dividir una línea recta finita dada en extrema y media razón.*

**Prueba.**

Sea $AB$ la línea recta finita dada. Se desea cortar $AB$ en extrema y media razón.

Sobre $AB$ sea el cuadrado $BC$ descrito; y sea aplicado a $AC$ el paralelogramo $CD$ igual a $BC$ y excediendo por la figura $AD$ semejante a $BC$ (Prop. 29.VI).

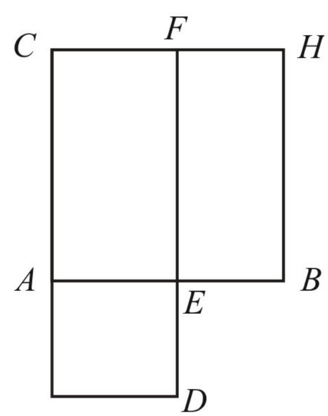
Ahora $BC$ es un cuadrado; luego $AD$ es también un cuadrado.

Y, desde que $BC$ es igual a $CD$, sea $CE$ substraido de cada uno de ellos; luego el resto $BF$ es igual al resto $AD$.

Pero él es también equiangular con él; luego en $BF$, $AD$ los lados alrededor los ángulos iguales son recíprocamente proporcionales (Prop. 14. VI); luego, como $FE$ es a $ED$, asi es $AE$ a $EB$.

Pero, $FE$ es igual a $AB$ y $ED$ a $AE$. Luego, como $BA$ es a $AE$, asi es $AE$ a $EB$. Y $AB$ es mayor que $AE$; luego $AE$ es también mayor que $EB$.

Luego la línea recta $AB$ ha sido cortada en extrema y media razón en $E$, y el mayor segmento de ello es $AE$.




Esto se deseaba probar.

■

**Proposición 31.** ***Generalización del Teorema de Pitágoras***.

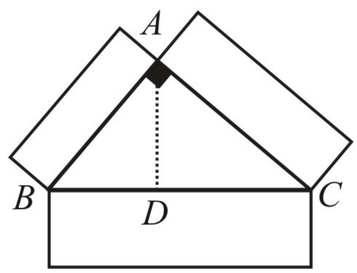
*En los triángulos rectángulos, la figura construida a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.*

**Prueba.**

Sea $ABC$ un triángulo rectángulo teniendo el ángulo $BAC$ recto; yo digo que la figura sobre $BC$ es igual a las figuras semejantes y semejantemente descritas sobre $BA$, $AC$.

Sea $AD$ la perpendicular trazada. Entonces desde que, en el triángulo rectángulo $ABC$, $AD$ ha sido trazada desde el ángulo recto en $A$ la perpendicular a la base $BC$, los triángulos $ABD$, $ADC$ adjuntos a la perpendicular son semejantes ambos al triángulo total $ABC$ y uno al otro (Prop. 8.VI).

Y, desde que $ABC$ es semejante a $ABD$, luego, como $CB$ es a $BA$, asi es $AB$ a $BD$ (Def. 1.VI).




Y, desde que las tres líneas rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera, asi es la figura sobre la primera a la figura semejante y semejantemente descrita sobre la segunda (Porisma 19.VI).

Luego, como $CB$ es a $BD$, asi es la figura sobre $CB$ a la figura semejante y semejantemente descrita sobre $BA$. Por la misma razón también como $BC$ es a $CD$, asi es la figura sobre $BC$ a aquella sobre $CA$; asi que, en adición, como $BC$ es a $BD$, $DC$, asi la figura sobre $BC$ es a las figuras semejantes y semejantemente descritas sobre $BA$, $AC$.

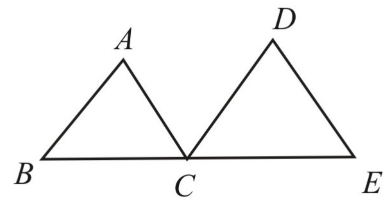
Pero, $BC$ es igual a $BD$, $DC$; luego la figura sobre $BC$ es también igual a las figuras semejantes y semejantemente descritas sobre $BA$, $AC$.

Esto se deseaba probar.

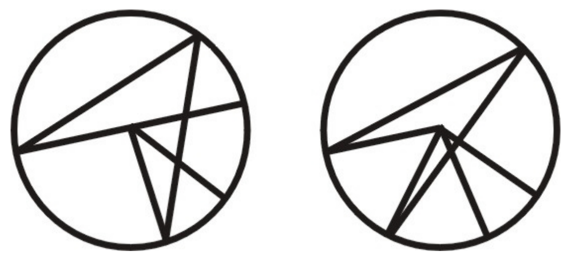
■

**Proposición 32.** *Si dos triángulos que tienen dos lados de uno proporcionales a dos lados del otro, se construyen unidos por un ángulo de manera que sus lados correspondientes sean paralelos, los lados restantes de los trián-*

*gulos estarán en línea recta.*




**Proposición 33.** *En los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias.*



**La Teoría de Números: Libros VII, VIII y IX.**

Los Elementos no trata solamente de la geometría conocida hasta Euclides, sino también de la aritmética cultivada en la Antiguedad, sobre todo del legado que Euclides heredó de Pitágoras y de su Escuela. La teoría de números está magistralmente expuesta en un bloque constituido por tres libros, los Libros VII, VIII y IX. En total hay 102 proposiciones (L. VII: 39, L. VIII: 27 y L. IX:36); en el L. VII se dan 22 definiciones, que Euclides propone como base para construir la teoría de números de aquella época. La presentación es teórica y es la génesis de la futura teoría de números, un área teórica por excelencia.

Euclides representa a los números como segmentos de líneas y al producto de dos números como un rectángulo; sin embargo, él realiza sus argumentos de un modo independiente de la geometría. Es claro, para aquella época, que tanto las definiciones como las proposiciones no tengan el rigor en sus enunciados; ellos fueron dados de un modo verbal. Algunos resultados en este libro fueron ya considerados en el Libro V. Comienza definiendo las ideas de unidad y número; con las palabras "parte" y "partes" se refiere a la idea de "divisor" y "no divisor" respectivamente. No considera axiomas ni postulados en este libro. Es interesante como Euclides construye la aritmética, algo que ha de gobernar por muchísimos siglos. Pasemos a ver algunos detalles.

**LIBRO VII**

Euclides considera 22 definiciones las que han de servir de base para elaborar la teoría de números en este libro y en los dos siguientes.

**Definición 1.** *Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una.*

**Definición 2.** *Un número es una pluralidad compuesta de unidades.*

**Definición 3.** *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.*

**Definición 4.** *Pero partes cuando no lo mide.*

**Definición 5.** *Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor.*

**Definición 6.** *Un número par es el que se divide en dos partes iguales.*

**Definición 7.** *Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o se diferencia de un número par en una unidad.*

**Definición 8.** *Un número parmente par es el medido por un número par según un número par.*

**Definición 9.** *Y parmente impar es el medido por un número par según un número impar.*

**Definición 10.** *Imparmente par es el medido por un número impar según un número impar.*

**Definición 11.** *Un número imparmente impar es el medido por un número impar según un número impar.*

**Definición 12.** *Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común.*

**Definición 13.** *Número compuesto es el medido por algún número [diferente de 1].*

**Definición 14.** *Números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común.*

**Definición 15.** *Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade asi mismo tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número.*

**Definición 16.** *Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado se llama* ***número plano*** *y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.*

**Definición 17.** *Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un* ***número sólido*** *y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.*

**Definición 18.** *Un* ***número cuadrado*** *es el multiplicado por si mismo el comprendido por dos números iguales.*

**Definición 19.** *Y un número* ***cubo*** *el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales.*

**Definición 20.** *Unos números son proporcionales cuando el primer es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.*

**Definición 21.** *Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales.*

**Definición 22.** ***Número perfecto*** *es el que es igual a la suma de sus propias partes.*

Respecto a las proposiciones, Euclides comienza considerando lo que actualmente es conocido como el "**algoritmo de Euclides**", el que consiste en encontrar la mayor medida común de dos números. La palabra "medida", Euclides la usa para denominar a la de "divisor".

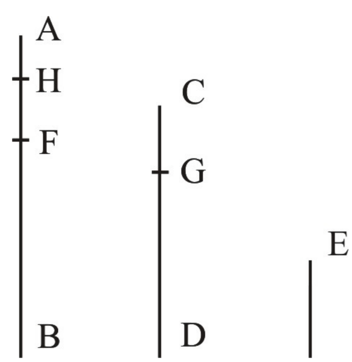
**Proposición 1.** *Dados dos números desiguales y restando sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.*

**Prueba.**

Ya que, al ser el menor de los dos números distintos $AB$ y $CD$ substraido de modo continuo del mayor, asumamos que el resto no mide nunca al que está antes que él, hasta que el resto es de una unidad.

Afirmo [dice Euclides] que $AB$ y $CD$ son primos entre sí, esto es, que una unidad sola mide $AB$ y $CD$.

Si $AB$ y $CD$ no fueran primos entre sí, existen números que los miden. Supongamos que un número los mide, que $E$ es este número y que $CD$, que mide $BF$, deja $FA$, menor que él; que $AF$, que mide $DG$, deja $CG$, menor que él, y que $GC$, que mide $FH$, deja una unidad $HA$.




Puesto que entonces $E$ mide $CD$, y $CD$ mide $BF$, $E$ mide también $BF$. Pero mide también $BA$ entero, y también medirá el resto $AF$; pero $AF$ mide $DG$ y además $E$ mide también $DG$, pero mide $DC$ entero, y por tanto medirá el resto $CG$.

Pero $CG$ mide $FH$ : luego $E$ mide también $FH$, pero mide también $FA$ entero, asi medirá el resto, la unidad $AH$, lo que no es posible. Por tanto, no existe ningún número que mida los números $AB$ y $CD$; por lo tanto son primos entre sí, por la definición 12. VII. Esto se desea demostrar.

$\blacksquare$

Este algoritmo de Euclides es básico en la teoría de números y en el lenguaje actual dice: si $a$ y $b$ son dos números con $a < b$, se resta $b$ de $a$; el resto es $c$; de $b$ y $c$ se resta el menor del mayor. Continuamos así hasta que los dos números sean iguales o hasta que la última substracción de un resto nulo.

**Proposición 2.** *Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*

En esta proposición se trata de demostrar que el último residuo no nulo divide a los dos números dados, y que todo divisor de estos dos números divide también al último resto no nulo. En la siguiente proposición Euclides dá un método para determinar el máximo común divisor (m.c.d.) de tres números, lo que se puede generalizar al caso de varios números.

**Proposición 3.** *Dado tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*

Como observamos, el grupo de estas tres primeras proposiciones dan un método para encontrar la mayor medida común de dos o tres números diferentes. En el segundo grupo, de la proposición 4 hasta 19, Euclides expone las propiedades numéricas de las proporciones, algunas ya aparecidas en el Libro V (razones de segmentos); de la proposición 4 a la 10 se dan resultados preliminares, y de la 11 a la 14 son trasformaciones de proporciones que corresponden a transformaciones similares tratados en el Libro V.

**Proposición 4.** *Todo número es parte de todo número, el menor del mayor.*

**Proposición 5.** *Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro.*

**Proposición 6.** *Si un número es partes de un número y otro número es las mismas partes de otro número, la suma será también las mismas partes de la suma que el uno del otro.*

**Proposición 7.** *Si un número es la misma parte de un número que un número restado de un número restado, el resto será la misma parte del resto que el total del total.*

**Proposición 8.** *Si un número es las mismas partes de un número que un número restado de un número restado, el resto será las mismas partes del resto que el total del total.*

**Proposición 9.** *Si un número es parte de un número y otro número es la misma parte de otro, también, por alternancia, la parte o partes que el primero es del tercero, la misma parte o partes será el segundo del cuarto.*

**Proposición 10.** *Si un número es partes de un número y otro número es las mismas partes de otro, también, por alternancia, las partes o parte que el primer es del tercero, las mismas partes será el segundo del cuarto.*

**Proposición 11.** *Si de la misma forma que un todo es a un todo, también un número restado es a un número restado, también el resto será al resto de la misma forma que el todo es al todo.*

**En otras palabras**, si $a : b = c : d \quad (a > c, \quad b > d)$, entonces $(a - c) : (b - d) = a : b$.

**Proposición 12.** *Si unos números, tantos como se quiera, fueran proporcionales, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, de la misma forma todos los antecedentes serán a todos los consecuentes.*

**En otras palabras**, si $a : a' = b : b' = c : c' = ...$, entonces cada una de las razones es igual a, $(a + b + c + ...) : (a' + b' + c' + ...)$.

**Proposición 13.** *Si cuatro números son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.*

**En otras palabras**, si $a : b = c : d$, entonces $a : c = b : d$.

**Proposición 14.** *Si hay unos números, tantos como se quiera, y otros iguales a ellos en cantidad que, tomados de dos en dos guardan la misma razón, también por igualdad guardarán la misma razón.*

**En otras palabras**, si $a : b = d : e$ y $b : c = e : f$, entonces $a : c = d : f$.

**Proposición 15.** *Si una unidad mide a un número cualquiera, y un segundo número mide el mismo número de veces a otro número cualquiera, por alternancia, la unidad medirá también al tercer número el mismo número de veces que el segundo al cuarto.*

**En otras palabras**, si $1 : m = a : ma$, entonces (alternadamente) $1 : a = m : ma$.

**Proposición 16.** *Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen ciertos números, los números resultantes serán iguales entre sí.* $(ab = ba)$.

**Proposición 17.** *Si un número, al multiplicar a dos números, hace ciertos números, los números resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.* $(b : c = ab : ac)$.

**Proposición 18.** *Si dos números, al multiplicar a un número cualquiera, hacen ciertos números, los resultantes guardarán la misma razón que los multiplicados.* $(a : b = ac : bc)$.

**Proposición 19.** *Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales.*

**En otras palabras**, si $a : b = c : d$, entonces $ad = bc$.

**Proposición 20.** *Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos, miden a los que guardan la misma razón el mismo número de veces, el mayor al mayor y el menor al menor.*

**Proposición 21.** *Los números primos entre sí son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

Ahora Euclides pasa a estudiar números primos y compuestos. Son las proposiciones que van del 22 al 32 e incluyen algunos teoremas fundamentales.

**Proposición 22.** *Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos son números primos.*

**Proposición 23.** *Si dos números son primos entre sí, el número que mide a uno de ellos será número primo respecto del que queda.*

**Proposición 24.** *Si dos números son primos respecto a otro número, también el producto será número primo respecto al mismo número.*

**Proposición 25.** *Si dos números son números primos entre sí, el producto de uno de ellos multiplicado por sí mismo será número primo respecto del que queda.*

**Proposición 26.** *Si dos números son primos respecto a dos números, uno y otro con cada uno de ellos, sus productos también serán primos entre sí.*

**Proposición 27.** *Si dos números son primos entre sí y al multiplicarse cada uno a sí mismo hacen algún otro número, sus productos serán números primos entre sí, y si los números iniciales, al multiplicar a los productos, hacen ciertos números, también ellos serán números primos entre sí. Y siempre sucede esto con los extremos.*

**Proposición 28.** *Si dos números son primos entre sí, su suma también será un número primo respecto a cada uno de ellos; y si la suma de ambos es un número primo respecto a uno cualquiera de ellos, también los números iniciales serán números primos entre sí.*

**Proposición 29.** *Todo número primo es primo respecto a todo número al que no mide.*

**Proposición 30.** *Si dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número y algún número primo mide a su producto, también medirá a uno de los números iniciales.*

La proposición 30 es importante en la moderna teoría de números. Afirma que si un número primo $c$ divide al producto $df$ de dos números $d$ y $f$, entonces $c$ divide a $d$ ó a $f$, ó a ambos. Por ejemplo, el número primo 11 divide a 2310 y $2310 = (33)\,(70)$; vemos que 11 divide a 33.

La siguiente proposición es útil en la prueba de un resultado fundamental en la teoría de números, que veremos después.

**Proposición 31.** *Todo número compuesto es medido por algún número primo.*

En este resultado, Euclides nos dice que si $n$ es un número compuesto, y por tanto él es medido por algún número $b$, entonces si $b$ no fuera primo, es decir, si $b$ fuera compuesto, entonces $b$ sería medido por $c$. Luego $c$ mide $n$. Si $c$ no fuera primo, continuamos con este proceso ... En esta etapa, Euclides afirma: “si esta investigación puede ser continuada de este modo, algún número primo será encontrado el cual medirá al número anterior, y por tanto medirá al número $n$. Esto es válido pues si no fuera así, tendríamos una serie infinita de números los cuales medirán $n$, cada uno menor que el otro, lo cual es imposible en teoría de números”. Así, Euclides asume que cualquier conjunto de números “naturales” posee un menor número .

**Proposición 32.** *Todo número o bien es número primo o es medido por algún número primo.*

**Proposición 33.** *Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

**Proposición 34.** *Dados dos números, hallar el menor número al que miden.*

**Proposición 35.** *Si dos números miden a algún número, el número menor medido por ellos también medirá al mismo número.*

**Proposición 36.** *Dados tres números, hallar el menor número al que miden.*

**Proposición 37.** *Si un número es medido por algún número, el número medido tendrá una parte homónima del número que lo mide.*

**Proposición 38.** *Si un número tiene una parte cualquiera, será medido por un número homónimo de la parte.*

**Proposición 39.** *Hallar un número que sea el menor que tenga unas partes dadas.*

Observemos que de la proposición 33 a la final 39, Euclides trata el problema de encontrar el menor múltiplo común de dos o tres números. Además, en este Libro VII, él trabaja modelos ya considerados anteriormente pero hace algunas mejoras.

### LIBRO VIII

En este libro Euclides continúa con la teoría de números; contiene 27 proposiciones pero no se dá nuevas definiciones; en esta parte se estudian a las progresiones geométricas (números en proporciones continuas). Asi, para Euclides una progresión geométrica es un conjunto de números en proporción continua, esto es, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = ...$ En las primeras proposiciones presenta progresiones que tienen por término general a números de la forma $a^n a^m$ y cuya razón es $\frac{a}{b}$. Se indica como interpolar entre dos números dados, varios medios en progresión geométrica. En una proposición Euclides prueba que entre dos números cuadrados solo se puede encontrar una media proporcional y que la razón entre cuadrados es duplicada a la que hay entre los lados. También considera el caso del cubo.

**Proposición 1.** *Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y sus extremos son números primos entre sí, son los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*

**Proposición 2.** *Hallar tantos números como uno proponga continuamente proporcionales, los menores en una razón dada.*

**Proposición 3.** *Si tantos números como se quiera continuamente proporcionales son los menores de los que guardan la misma razón entre ellos, sus extremos son números primos entre sí.*

**Proposición 4.** *Dadas tantas razones como se quiera en sus menores números, hallar los números continuamente proporcionales menores en las razones dadas.*

**Esto es**, dadas tantas razones como deseáramos, $a : b,\ c : d,\ ...$ encontrar una serie $p, q, r, ...$, los menores posibles términos tal que $p : q = a : b,\ q : r = c : d,\ ...$

**Proposición 5.** *Los números planos guardan entre sí la razón compuesta de las razones de sus lados.*

Euclides continúa con distintas proposiciones sobre teoría de números. En las proposiciones 6 y 7 prueba que si $a^n$ no mide $a^{n-1}b$, ningún término mide cualquier otra, pero si $a^n$ mide $b^n$, entonces él mide $a^{n-1}b$. Estos resultados están relacionados con las proposiciones 14 a 17, en donde se prueba que, según $a^2$ mida o no mida $b^2$, entonces $a$ mide o no mide $b$, y recíprocamente. En forma similar, según $a^3$ mida o no mida $b^3$, $a$ mide o no mide $b$, y recíprocamente. En la **Proposición 13**: "*Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales y cada uno, al multiplicarse por sí mismo, hace algún número, los productos serán proporcionales; y, si los números iniciales, al multiplicar a los productos, hacen ciertos números, también estos últimos serán proporcionales*", Euclides prueba que si $a, b, c, ...$ están en progresión geométrica, entonces asi lo estarán $a^2, b^2, c^2, ...$ y $a^3, b^3, c^3, ....$

Previamente, en las proposiciones 8 a 10, Euclides estudia la interpolación de promedios geométricos entre números. Por ejemplo, en la **Proposición 8** ("*Si entre dos números caen números en proporción continua con ellos, entonces cuantos números como caigan entre ellos en proporción continua, tantos caerán también en proporción continua entre los que guardan la misma razón con los números iniciales*") establece que si $a : b = e : f$ y si existe $n$ promedios geométricos entre $a$ y $b$, hay $n$ promedios geométricos también entre $e$ y $f$. En la

**Proposición 9.** *("Si dos números son primos entre sí, y caen entre ellos números en proporción continua, entonces, cuantos números caigan en proporción continua entre ellos, tantos caerán también en proporción continua* *entre uno de ellos y la unidad") establece que si* $a^n, a^{n-1}b, \ldots\ ab^{n-1}, b^n$ *están en progresión geométrica de* $n+1$ *términos, así lo estarán los* $(n-1)$ *promedios entre* $a^n, b^n$*, habrá (entonces) el mismo número de promedios geométricos entre* $1$ *y* $a^n$*, y entre* $1$ *y* $b^n$ *respectivamente.*

En la **Proposición 10** ("*Si entre cada uno de dos números y una unidad caen números en proporción continua, entonces, tantos números como caigan en proporción continua entre cada uno de ellos y la unidad, tantos caerán también en proporción continua entre ellos*") establece el recíproco:

si $1, a, a^2, ..., a^n$ y $1, b, b^2, ..., b^n$ están en progresión geométrica, habrá el mismo número $(n-1)$ de promedios entre $a^n$ y $b^n$. En la **Proposición 11** considera el caso particular: existe un número media proporcional entre números cuadrados. Euclides continúa elaborando una serie de interesantes resultados sobre la teoría de números, culminando este libro con las siguientes tres proposiciones.

**Proposición 25.** *Si dos números guardan entre sí la razón que un número cubo guarda con un número cubo y el primo es cubo, el segundo también será cubo.*

**Proposición 26.** *Los números planos semejantes guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado*

**Proposición 27.** *Los números sólidos semejantes guardan entre sí la razón que un número cubo guarda con un número cubo.*

## LIBRO IX

En este último libro sobre teoría de números, Euclides presenta resultados de gran interés para la aritmética; por ejemplo, en la Proposición 20 establece que el conjunto de números primos es infinito ("los números primos son mas que cualquier cantidad fijada de antemano de números primos"). Algunos resultados provienen de la Escuela Pitagórica (números pares, impares y sus relaciones). Se conjetura que Euclides haya tomado el contenido de este libro de un texto pitagórico sin hacer cambios substanciales. En la parte final se encuentra una fórmula para hallar la suma de números en progresión geométrica. Estudia también a los números perfectos. El Libro IX contiene 36 proposiciones. Veamos.

**Proposición 1.** *Si dos números planos semejantes, al multiplicarse entre sí, hacen un número, el producto será cuadrado.*

**Proposición 2.** S*i dos números, al multiplicarse entre sí, hacen un número cuadrado, son números planos semejantes.*

**Proposición 3.** *Si un número cubo, al multiplicarse por sí mismo, hace algún número, el producto será cubo.*

**Proposición 4.** *Si un número cubo, al multiplicar a un número cubo, hace algún número, el producto será cubo.*

**Proposición 5.** *Si un número cubo, al multiplicar a algún número, hace un número cubo, el número multiplicado también será cubo. (Si $a^3b$ es un cubo, $b$ es un cubo).*

**Proposición 6.** *Si un número, al multiplicarse por sí mismo, hace un número cubo, también el mismo será cubo. (Si $a^2$ es un cubo, $a$ es un cubo).*

**Proposición 7.** *Si un número compuesto, al multiplicar a un número, hace algún número, el producto será sólido.*

Las proposiciones 8 a 13 tratan sobre series de términos en progresión geométrica las que comienzan con 1. Asi, por ejemplo,

**Proposición 8.** *Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, el tercero a partir de la unidad será cuadrado, de la misma forma que todos los que dejan un intervalo de uno, y el cuarto será cubo, de la misma forma que todos los que dejan un intervalo de dos, y el séptimo será al mismo tiempo cubo y cuadrado, de la misma forma que todos los que dejan un intervalo de cinco.*

Luego de presentar a las proposiciones 9 al 19, que contienen interesantes resultados sobre números, Euclides pasa a considerar la importante proposición 20 sobre la infinitud de los números primos.

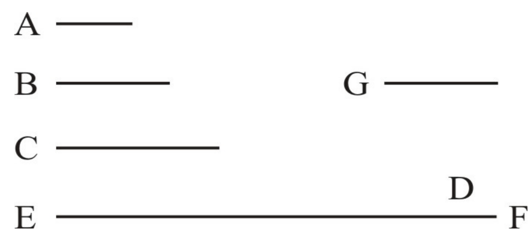
**Proposición 20.** *Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.*

**Prueba.**

Sean $A$, $B$, $C$ los números primos asignados.

Yo digo (dice Euclides) que hay mas números primos que $A$, $B$, $C$.

Ya que sea el menor número medido por $A$ y $B$ ser tomado, y sea él ser $DE$; sea la unidad $DF$ agregada a $DE$. Entonces, $EF$ es primo o no lo es. Primero, si él es primo; entonces los números primos $A$, $B$, $C$, $EF$ han sido encontrados los cuales son mas que $A$, $B$, $C$.




Enseguida, sea $EF$ no primo; luego es el medido por algún número primo (Prop. 31. VII). Sea él medido por el número primo $G$.

Yo digo que $G$ no es el mismo con cualquiera de los números $A$, $B$, $C$.

Porque, si posible, sea ello ser así.

Ahora $A$, $B$, $C$ medible $DE$; luego $G$ será también medible $DE$.

Pero él también mide $EF$. Por tanto $G$, siendo un número, medirá el residuo (resto), la unidad $DF$, lo cual es absurdo.

Luego $G$ no es el mismo que cualquiera de los números $A$, $B$, $C$.

Y por hipótesis él es primo. Por tanto los números primos $A$, $B$, $C$, $G$ han sido encontrados los cuales son mas que la multitud asignada de $A$, $B$, $C$. Esto se quería demostrar.

■

**Proposición 21.** *Si se suman tantos números pares como se quiera, el total es un número par.*

**Prueba.**

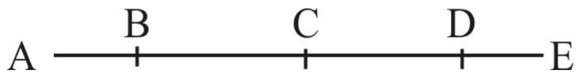

Porque sean muchos números pares como nosotros deseemos $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ que serán sumados juntos; Yo digo que el todo $AE$ es par.

Porque, desde que cada uno de los números $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ es par, ellos tienen una mitad (Def. 6. VII); luego el todo $AE$ tiene también una mitad.

Pero un número par es aquel el cual es divisible en dos partes iguales; luego $AE$ es par. Que es lo que se quería demostrar.

■

**Proposición 22.** *Si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es par, el total será par.*
**Prueba.**




Porque sean muchos números impares como deseemos, $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, par en multitud, que serán sumados juntos; Yo digo que el todo $AE$ es par.

Porque, desde que cada uno de los números $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ es impar, si una unidad es substraida de cada número, cada residuo será par (Definición 7. VII); asi que la suma de ellos será par (Prop. 21. IX).

Pero la multitud de las unidades es también par. Luego el todo $AE$ es también par (Prop. 21. IX). Que se desea probar.

■

Euclides continúa desarrollando un conjunto de resultados sobre números pares, impares, par de veces impar, par de veces par, concluyendo este libro con dos interesantes resultados. Asi,

**Proposición 35.** *Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan del segundo y del último números iguales al primero, entonces, tal y como el exceso del segundo es al primero, de la misma manera el exceso del último será a todos los anteriores a él.*

En esta proposición, Euclides nos da la suma de una progresión geométrica de $n$ términos. Asi, supongamos que $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1}$ sean $n+1$ términos en progresión geométrica, entonces Euclides considera el siguiente argumento:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = ... = \frac{a_2}{a_1};$$

luego

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = ... = \frac{a_2 - a_1}{a_1}.$$

Ahora suma antecedentes y consecuentes para obtener (Prop. 12. VII),

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + ... + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1},$$

de donde:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{a_1\left(a_{n+1} - a_1\right)}{a_2 - a_1} \equiv S_n \bullet$$

**Proposición 36.** *Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su suma total resulte un* ***número primo****, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será un* ***número perfecto****.*

Euclides, en esta última proposición del Libro X nos da un criterio para los números perfectos, esto es, si la suma de cualquier número de términos de la serie $1, 2, 2^2, ..., 2^n$ es un número primo, el producto $(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n)\, 2^n$ es un número perfecto (esto es, es igual a la suma de todos sus factores).

La prueba original de esta proposición es un tanto larga y técnica. Euclides usa la definición de número perfecto dada en el Libro VII. Como hemos mencionado, la Proposición 36 es equivalente a decir que si $S_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^{n-1}$ es primo; entonces $2^{n-1}\,(2^n - 1)$ es perfecto. Es oportuno mencionar que los antiguos griegos conocían a los cuatro primeros números perfectos $6, 28, 496$ y $8128$. ¿Vále el recíproco de la Proposición 36? No tenemos información si esta cuestión continua siendo un problema abierto.

**LIBRO X. Los Números Irracionales.**

En este libro, Euclides estudia a los números irracionales, esto es, trata a los segmentos que son inconmensurables respecto a un segmento rectilíneo dado. Es el libro mas voluminoso de todos los libros de los Elementos y también el mas difícil de traducir y de interpretar. Contiene 16 definiciones (distribuidas en tres grupos) y de 115 proposiciones. Es un libro escrito de modo riguroso y por tanto es el mas admirado respecto a los otros libros.

Euclides estudia la clasificación de los segmentos inconmensurables de la forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, donde $a$ y $b$ son conmensurables. Es oportuno mencionar que el viejo geómetra considera ciertas racionalizaciones en fracciones de la forma $\dfrac{a}{b \pm \sqrt{c}}$ y $\dfrac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$.

Veamos las primeras definiciones.

**Definición 1.** *Se llaman magnitudes* ***conmensurables*** *aquellas que se miden con la misma medida, e* ***inconmensurables*** *aquellas de las que no es posible hallar una medida común.*

**Definición 2.** *Las líneas rectas son* ***conmensurables en cuadrado*** *cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e* ***inconmensurables en cuadrado*** *cuando no es posible que sus cuadrados tengan una área como medida común.*

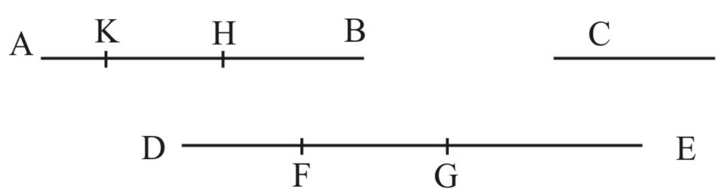
**Definición 3.** *Dadas estas premisas, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada. Se llama entonces **racionalmente expresable** la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien sólo en cuadrado, racionalmente expresables y las inconmensurables con ella se llaman **no racionalmente expresables**.*

**Definición 4.** *Y el cuadrado de la recta determinada se llama **racionalmente expresable**, y los cuadrados conmensurables con éste **racionalmente expresables**; pero los inconmensurables con él se llaman **no racionalmente expresables**; y las rectas que los producen se llaman **no racionalmente expresables**, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas rectas que construyan cuadrados iguales a ellos.*

**Proposición 1.** *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y asi sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor donada.*

**Prueba.**

Sean $AB$, $C$ dos magnitudes desiguales de los cuales $AB$ es el mayor: Yo digo que, si de $AB$ substraemos una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda una magnitud mayor que su mitad, y si este proceso es repetido continuamente, quedará alguna magnitud la cual será menor que la magnitud $C$.




Porque $C$ si multiplicada será en algún momento mayor que $AB$ (Definición 4. V).

Sea él multiplicado, y sea $DE$ un múltiplo de $C$ y mayor que $AB$; sea $DE$ dividido en las partes $DF$, $FG$, $GE$ igual a $C$, de $AB$ substraemos $BH$ mayor que su mitad, y, de $AH$, $HK$ mayor que su mitad, y este proceso es repetido continuamente hasta que los divisores en $AB$ sean iguales en multitud con los divisores en $DE$.

Sea, entonces, $AK$, $KH$, $HB$ divisiones las cuales son iguales en multitud con $DF$, $FG$, $GE$.

Ahora, desde que $DE$ es mayor que $AB$, y desde que de $DE$ ha sido substraido $EG$ menor que su mitad, y, de $AB$, $BH$ mayor que su mitad, entonces el resto $GD$ es mayor que el resto $HA$. Y, desde que $GD$ es mayor que $HA$, y ha sido substraido, de $GD$, la mitad $GF$, y, de $HA$, $HK$ mayor que su mitad, luego el resto $DF$ es mayor que el resto $AK$.

Pero $DF$ es igual a $C$; luego $C$ es también mayor que $AK$.

Luego $AK$ es menor que $C$.

Luego es quitado de la magnitud $AB$ la magnitud $AK$ el cual es menor que la menor magnitud retirada, asi $C$.

■

En las siguientes proposiciones, hasta la 17, Euclides estudia las propiedades generales de las magnitudes conmensurables e inconmensurables. Veamos algunas de ellas.

**Proposición 2.** *Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la que queda nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.*

**Proposición 3.** *Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.*

**Proposición 4.** *Dadas tres magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.*

**Proposición 5.** *Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.*

**Proposición 6.** *Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán conmensurables.*

En las Proposiciones 5 a 8 (ver [HEA], vol.1), Euclides prueba que dos magnitudes son conmensurables o inconmensurables según ellas tengan el uno al otro la razón de un número a otro, lo que conduce a un resultado fundamental debido a Teeteto, y está contenido en la **Proposición 9**: "*Los lados de cuadrados son conmensurables o inconmensurables en longitud según los cuadrados tienen o no tienen la razón de un número cuadrado a un número cuadrado, y recíprocamente*". En las Proposiciones 11 a 16 estudia la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de magnitudes en base a familiares relaciones de otras conectadas entre ellas. Por ejemplo, en la **Proposición**

**14**, Euclides establece: "*si $a : b = c : d$, entonces según $\sqrt{a^2 - b^2}$ es conmensurable o inconmensurable con $a$, $\sqrt{c^2 - d^2}$ es conmensurable o inconmensurable con $c$*".

Luego, en las Proposiciones 17 y 18, Euclides prueba que las raices de la ecuación cuadrática $ax - x^2 = \dfrac{b^2}{4}$ son conmensurables o inconmensurables con $a$ según $\sqrt{a^2 - b^2}$ es conmensurable o inconmensurable con $a$. Luego Euclides pasa a estudiar a los rectángulos racionales e irracionales (Proposiciones 19 a 21); se establece algunas relaciones existentes entre la conmensurabilidad de los lados y la de los cuadrados o rectángulos dibujados sobre ellos; introduce la idea de lado "**medial**" de un cuadrado. Este concepto es introducido en la Proposición 21; un segmento es llamado medial si es la media proporcional entre dos segmentos conmensurables en cuadrado; de esta manera, un medial es un irracional de la forma $\sqrt{aa\sqrt{b}}$ ó $a\sqrt[4]{b}$, donde $a$ y $b$ son fracciones numéricas. A partir de la Proposición 36 se estudian números irracionales de la forma $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, donde $a$ y $b$ son conmensurables; se introducen los irracionales binomiales, los que se estudian hasta la Proposición 72. Se introducen otras seis definiciones. En la parte casi final se considera la idea de **apótomas** las que son expresiones con $\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

Este Libro X, por su complejidad, por su extensión y por su falta de aplicaciones, es un libro difícil de digerir y por ello se le llama "**la cruz de los matemáticos**".

### Geometría del Espacio: LIBROS XI, XII y XIII.

Los Libros XI, XII y XIII, los últimos tres libros de los Elementos, están dedicados a desarrollar la geometría del espacio, cuyo contenido es lo que actualmente se aprende en un primer curso de geometría en el espacio familiar a nosotros. En el Libro XI se exponen 28 definiciones y contiene 39 proposiciones relacionadas a la geometría tridimensional. Las definiciones están expuestas de un modo discutible, como, por ejemplo, cuando dice: "un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad"; pero, al margen de estas posibles imprecisiones hechas en una época en donde recién surgía una teoría matemática formal, lo escrito por Euclides es algo notable al extremo de que aún hoy día se le enseña, con las correcciones correspondientes. El Libro XII contiene 18 proposiciones que tratan sobre la medida de figuras planas usando el método de exhaustación. En esta obra aparece también el recurso de doble reducción al absurdo. En el último libro, el Libro XIII, aparecen 18 proposiciones y está dedicado al estudio de las propiedades de los cinco sólidos regulares, las notables fíguras cósmicas de la Escuela de Platón.

Es concenso de que mucho de los resultados de este libro son debidos al notable matemáticoTeeteto. Euclides culmina esta monumental obra, "Los Elementos" probando que no puede haber mas de cinco poliedros regulares.

**LIBRO XI: Geometría de los Sólidos.**

Comenzamos con las definiciones dadas en este libro.

**Definición 1.** *Un* ***sólido*** *es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.*

**Definición 2.** *Y el extremo de un sólido es una superficie.*

**Definición 3.** *Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano.*

**Definición 4.** *Un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas dibujadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la intersección común a los dos planos forman ángulos rectos con el plano que queda.*

**Definición 5.** *Cuando desde el extremo de una recta elevado sobre un plano se dibuja una perpendicular al plano y se traza otra recta desde el punto que va hasta el extremo que está en el plano de la primera recta, el ángulo comprendido por la recta dibujada y la que está sobre el plano es la inclinación de la recta con respecto al plano.*

**Definición 6.** *La inclinación de un plano respecto a un plano es el ángulo comprendido por las rectas dibujadas a un mismo punto formando ángulos rectos con la sección común en cada uno de los planos.*

**Definición 7.** *Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro plano se inclina sobre otro, cuando los ángulos de inclinación son iguales entre sí.*

**Definición 8.** *Planos paralelos son los que no concurren.*

**Definición 9.** *Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número.*

**Definición 10.** *Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño.*

**Definición 11.** *Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: un ángulo sólido es el que está comprendido por mas de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.*

**Definición 12.** *Una* ***pirámide*** *es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.*

**Definición 13.** *Un* ***prisma*** *es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás planos son paralelogramos.*

**Definición 14.** *Cuando, estando fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición inicial, la figura comprendida es una* ***esfera****.*

**Definición 15.** *Y el eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la que gira el semicírculo.*

**Definición 16.** *Y el centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo.*

**Definición 17.** *Y el diámetro de la esfera es cualquier recta dibujada a través del centro y limitada en las dos direcciones por la superficie de la esfera.*

**Definición 18.** *Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición inicial, la figura comprendida es un* ***cono****. Y si la recta que permanece fija es igual a la que queda del ángulo recto, el cono será rectángulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.*

**Definición 19.** *Y el eje del cono es la recta que permanece fija entorno a la que gira el triángulo.*

**Definición 20.** *Y la base es el círculo que describe la recta que gira.*

**Definición 21.** *Cuando, estando fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la posición inicial la figura comprendida es un* ***cilindro.***

**Definición 22.** *Y el eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.*

**Definición 23.** *Y las bases son los círculos por los dos lados opuestos que giren.*

**Definición 24.** *Conos y cilindros semejantes son aquellos en los que ejes y diámetros de las bases son proporcionales.*

**Definición 25.** *Un* ***cubo*** *es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.*

**Definición 26.** *Un* ***octaedro*** *es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.*

**Definición 27.** *Un* ***icosaedro*** *es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.*

**Definición 28.** *Un* ***dodecaedro*** *es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.*

**Nota.** Observemos que Euclides solo define a cuatro de los famosos poliedros regulares, no define al tetraedro, al que en el Libro XIII la llama “pirámide” (triangular).

Veamos algunas proposiciones contenidas en este libro. De la Proposición 1 a la 19, Euclides estudia las propiedades de las líneas y de los planos; asi, por ejemplo, considera resultados sobre líneas perpendiculares y planos paralelos. De la proposición 20 a la 26 Euclides trata a los ángulos sólidos, y de la 27 hasta la parte final, Proposición 39, estudia a los paralelepípedos y a los prismas.

**Proposición 1.** *No es posible que una parte de una línea recta esté contenida en el plano de referencia y otra parte de la recta en un plano más elevado.*

*(Es decir, una línea recta está totalmente en un plano si una porción de ella está en el plano).*

**Proposición 2.** *Si dos rectas se cortan una a otra están en el mismo plano, y todo triángulo está en un plano.*

**Proposición 3.** *Si dos planos se cortan uno a otro su intersección común es una línea recta.*

**Proposición 4.** *Si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan una a otra en su intersección común, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas.*

**Proposición 5.** *Si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan en su intersección común, las tres rectas están contenidas en el mismo plano.*

**Proposición 6.** *Si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas son paralelas.*

**Proposición 7.** *Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está contenida en el mismo plano que las paralelas.*

**Proposición 8.** *Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la recta que queda formará también ángulos rectos con el mismo plano.*

**Proposición 9.** *Las paralelas a una misma recta y que no están contenidas en el mismo plano que la recta son también paralelas entre sí.*

**Proposición 10.** *Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales.*

**Proposición 11.** *Trazar una línea recta perpendicular a un plano dado desde un punto dado elevado.*

**Proposición 12.** *Levantar una línea recta formando ángulos rectos con un plano dado desde un punto dado y contenido en el plano.*

**Proposición 13.** *No se pueden levantar por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.*

**Proposición 14.** *Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.*

•••

**Proposición 19.** *Si dos planos que se cortan forman ángulos rectos con un plano, la intersección común formará también ángulos rectos con el mismo plano.*

**Proposición 20.** *Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.*

•••

**Proposición 26.** *Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.*

**Proposición 27.** *Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado.*

**Proposición 28.** *Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.*

•••

**Proposición 37.** *Si cuatro rectas son proporcionales, los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, también las propias rectas serán proporcionales.*

**Proposición 38.** *Si los lados de los planos opuestos de un cubo se dividen en dos partes iguales y se trazan planos a través de las secciones, la intersección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales.*

**Proposición 39.** *Si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas serán iguales.*

**LIBRO XII: MÉTODO DE EXHAUSTACIÓN (o del "Agotamiento").**

En este libro, Euclides estudia la forma de calcular el área del círculo y los volúmenes de los sólidos familiares; la idea fundamental es el método del "**agotamiento**" o **exhaustación** que como sabemos fue estudiado por Eudoxo. Este método fue muy eficaz para obtener algunas cuadraturas, como lo obtuvo Arquímedes para el caso de un segmento parabólico. La idea del cálculo integral estuvo muy cerca en las investigaciones de los antiguos matemáticos griegos. Euclides usa métodos de aproximación para obtener algunas áreas. En la última proposición, Proposición 18, calcula el volumen de una esfera.

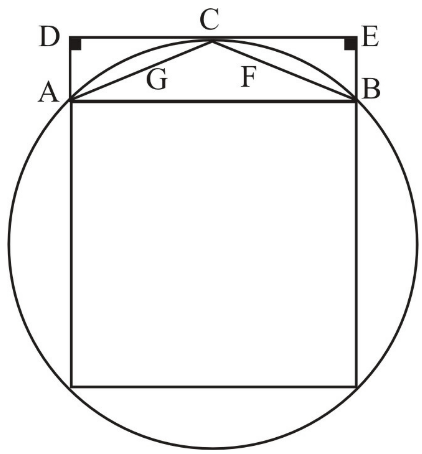
El libro comienza probando dos fundamentales resultados, de los cuales el segundo es vital para obtener otros importantes teoremas.

**Proposición 1.** *Los polígonos semejantes inscritos en círculos son el uno al otro como los cuadrados de los diámetros.*

**Proposición 2.** *Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.*
**Prueba.** ([KLI], vol. 1; [FAU-GRA]).

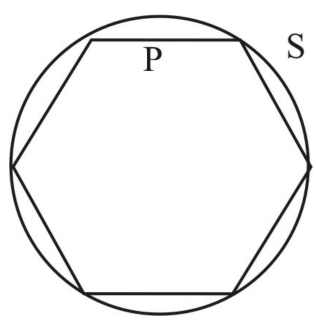
Euclides prueba en primer lugar que el círculo puede ser "agotado" por polígonos. Comienza inscribiendo un cuadrado en el círculo. Observa que el área del cuadrado es mayor que $\frac{1}{2}$ del área del círculo ya que el área de aquel es $\frac{1}{2}$ del área del cuadrado circunscrito, y esta área es mayor que el área del círculo.

Sea $AB$ cualquier lado del cuadrado inscrito. Él bisecta al arco $AB$ en el punto $C$, une $A$ con $C$ y $B$ con $C$, obteniendo $AC$ y $CB$. Luego traza la tangente en $C$ y traza $AD$ y $BE$ perpendiculares a la tangente. Observa que $\measuredangle BCE = \measuredangle BAC$ porque cada uno de ellos es $\frac{1}{2}$ del arco $CB$. Se tiene que $DE$ es paralela a $AB$, y de esta manera $ABED$ es un rectángulo cuya área es mayor a la del segmento $ABFCG$. Luego el triángulo $ABC$, el cual es la mitad del rectángulo, es mayor que $\frac{1}{2}$ del segmento $ABFCG$. Repitiendo el proceso en cada lado del cuadrado, obtenemos un octógono regular, el cual incluye no solamente al cuadrado sino algo mas que la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área del cuadrado.




Sobre cada lado del octógono podemos construir un triángulo, similar a lo hecho con el triángulo $ABC$ construido sobre $AB$. Asi se obtiene un polígono regular de 16 lados, el cual encierra al octógono y mas de la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área del octógono. Este proceso puede ser repetido tanto como se desee. En esta parte Euclides acude a la Proposición 1 del Libro X ("Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de lo que queda, una magnitud mayor que su mitad y asi sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor donada") para afirmar que la diferencia entre el área del círculo y el área de algún polígono regular de un número suficientemente grande de lados, puede ser hecho menor que cualquier magnitud dada.

Sean $S$ y $S'$ las áreas de dos círculos dados y sean $d$ y $d'$ sus respectivos diámetros.

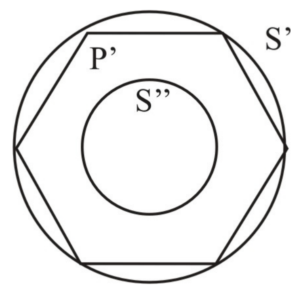



La tesis que Euclides desea probar es

$$\frac{S}{S'} = \frac{d^2}{d'^2} \qquad (*)$$

Supongamos que no tuviéramos (*) pero que si tuviéramos (*) con $S''$ en vez de $S'$, esto es, asumamos que $\dfrac{S}{S''} = \dfrac{d^2}{d'^2}$ donde $S''$ es un área tal que $S'' > S'$ ó $S'' < S'$.

Por ejemplo, asumamos que $S'' < S'$.




Ahora, Euclides construye polígonos regulares en $S'$ con números de lados tan grande como se desee, hasta arribar a un polígono $P'$, el cual es tal que su área difiere del de $S'$ en una cantidad menor que $S' - S''$. Se observa que este polígono puede ser construido ya que se sabe que la diferencia entre el círculo $S'$ y los polígonos regulares inscritos puede ser hecho menor que cualquier magnitud dada, y de esta manera menor que $S' - S''$. Luego se tiene

$$S' > P' > S''. \tag{**}$$

Ahora se escribe en $S$ un polígono $P$, semejante a $P'$. luego, por la Proposición 1, tenemos $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{d^2}{d'^2}$. Ahora, desde que $\dfrac{S}{S''} = \dfrac{d^2}{d'^2}$ se tiene también $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{S}{S''}$, esto es, $\dfrac{P}{S} = \dfrac{P'}{S''}$. Pero $P < S$, entonces $P' < S''$, lo que por (**) es contradicción. De un modo similar, $S' < S''$ nos lleva a un absurdo. Luego, $S'' = S'$. Esto prueba (*), que es lo que se desea probar.

∎

**Proposición 3.** *Toda pirámide que tenga como base un triángulo se divide en dos pirámides iguales, semejantes una a la otra y a la pirámide entera, que tienen triángulos como base, y se divide en dos prismas iguales; y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.*

**Proposición 4.** *Si hay dos pirámides de la misma altura que tienen triángulos como base, y cada una de ellas se divide en dos pirámides iguales entre* *sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; entonces tal y como la base de una pirámide es a la base de la otra, entonces serán todos los prismas de una pirámide a todos los prismas iguales en número a la otra pirámide.*

**Proposición 5.** *Las pirámides que tiene la misma altura y tienen triángulos como base son entre sí como sus bases.*

**Proposición 6.** *Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como base son entre sí como sus bases.*

• • •

**Proposición 10.** *Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y la misma altura.*

**Proposición 11.** *Los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.*

**Proposición 12.** *Los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la que guardan los diámetros de sus bases.*

**Proposición 13.** *Si un cilindro se corta por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, tal y como el cilindro es al cilindro, el eje es al eje.*

**Proposición 14.** *Los conos y cilindros que están sobre bases iguales son entre sí como sus alturas.*

• • •

**Proposición 17.** *Dadas dos esferas con el mismo centro, inscribir en la esfera mayor un sólido poliédrico que no toque la superficie de la esfera menor.*

**Proposición 18.** *Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la razón de sus respectivos diámetros.*

**Nota.** Observemos lo similar de las anteriores proposiciones con las proposiciones que actualmente aprende un estudiante de geometría del espacio.

Finalmente tenemos al último libro de esta gran obra matemática.

**LIBRO XIII: Los Poliedros regulares.**

Este libro está dedicado a la construcción de los cinco poliedros regulares; estudia las propiedades de esos poliedros. Todo ello está contenido en 18 proposiciones; las seis primeras tratan sobre líneas cortadas en media y extrema razón. En la última proposición (18) se comparan entre sí los lados de los cinco poliedros, en particular, con el diámetro de la esfera circunscrita. Como corolario de esta proposición última se prueba que **no hay** mas de cinco poliedros regulares.

Presentemos algunas proposiciones de este libro.

**Proposición 1.** *Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la recta entera es cinco veces el cuadrado de la mitad.*

**Proposición 2.** *Si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella misma, cuando se corta el doble de este segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte que queda de la recta inicial.*

**Proposición 3.** *Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento menor junto con el de la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor.*

**Proposición 4.** *Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado de la recta entera y del segmento menor juntos, son el triple del cuadrado del segmento mayor.*

• • •

**Proposición 7.** *Si tres ángulos de un pentágono equilátero, sucesivos o no, son iguales, el pentágono será equiangular.*

**Proposición 8.** *Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas opuestas a dos ángulos sucesivos se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.*

**Proposición 9.** *Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono.*

**Proposición 10.** *Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual a los cuadrados de los lados del hexágono y del decágono inscritos en el mismo círculo.*

• • •

**Proposición 15.** *Construir un cubo inscrito en una esfera como en la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo.*

**Proposición 16.** *Construir un icosaedro inscrito en una esfera, como en las figuras anteriores, y demostrar que el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada menor.*

**Proposición 17.** *Construir un dodecaedro inscrito en una esfera como en las figuras anteriores, y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.*

**Proposición 18.** *Colocar los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.*

Asi, sean las aristas $l_4$, $l_6$, $l_8$, $l_{12}$ y $l_{20}$ del tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, y sea $d$ el diámetro de la esfera circunscrita, entonces se tiene:

$$l_4 = \frac{\sqrt{2}}{3}d, \quad l_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}d, \quad l_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}d, \quad l_{12} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}d, \quad l_{20} = \frac{\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}}{10}d$$

De esta manera hemos llegado al final de una breve presentación del contenido de los trece libros que constituyen los **Elementos**, una obra monumental pero que debido a la coyuntura de la época en que fue escrita, adolece de ciertas deficiencias en sus definiciones y en los enunciados de ciertas proposiciones. Se especula que la labor de Euclides fue consolidar de un modo notable en una obra gran parte del conocimiento matemático hasta su época. En este sentido se cree que los libros I, III y VI fueron una elaboración hecha por Euclides en base a escritos hechos, por sus predecesores, sobre geometría. Los Libros II, VII, VIII y IX están fuertemente influenciados por el trabajo de los pitagóricos. En el Libro IV existen algunos resultados de Teeteto, de otros matemáticos y sobre todo Euclides hereda los descubrimientos de la

Escuela Pitagórica. Se especula que Euclides en el Libro V desarrolla la idea de definir la igualdad de razones entre magnitudes según lo propuesto por Eudoxo, y que Euclides desarrolla en este libro. En el Libro X, él elabora los escritos de Teeteto. No está muy claro el origen de lo que contiene el Libro XI; se observa influencia de las ideas de Platón y de Aristóteles, y seguramente de otras obras "Elementos", elaborados antes de Euclides. El método del "agotamiento" descubierto por Eudoxo es la idea fundamental tratada en el Libro XII. Se especula que lo desarrollado por Euclides en el Libro XIII son ideas debidas a Teeteto y mejoradas por Aristeo. Finalmente debe ser cierto que existan diversas proposiciones descubiertas por el propio Euclides.

### (iv). Euclides y su Obra.

Es anecdótico el hecho que el geómetra mas conocido por matemáticos y no matemáticos sea Euclides,a quién la historia de la matemática no le debe resultados de gran originalidad (al menos no se conoce), como fue el caso de Arquímedes, por ejemplo, entre otros. Entonces, como decíamos al inicio de la sección (iii), ¿dónde está el valor de la obra de Euclides? Responder esta cuestión no es una tarea fácil, pues lo hecho por este matemático griego tuvo gran influencia en el desarrollo de la matemática, y de la ciencia en general, a través del tiempo. Su obra y la forma como fue hecha, lleva a delicadas discusiones entre historiadores de la ciencia; abarca desde cuestionamientos matemáticos hasta los filosóficos-cósmicos. Los "Elementos", el principal escrito (conocido) por Euclides es una obra que ha perdurado en el tiempo un promedio de 2 300 años; ha guiado al pensamiento geométrico desde aquel entonces, siglo III A.C., hasta nuestros días en el sentido de que aún se le sigue enseñando en sus ideas esenciales; aún se escriben artículos y bellos libros sobre geometría euclideana. Una parcial respuesta a la pregunta planteada anteriormente es que con Euclides se inicia una etapa en que la matemática se la estudia de un modo axiomático, partiendo de ideas primitivas, de ciertos conceptos y de cinco axiomas o postulados, y en base a ello se construye un bello edificio geométrico-aritmético, hecho de un modo abstracto, solo jugando con ideas puras. Debemos remarcar que la pureza del razonamiento fue una característica de los pensadores griegos. Euclides heredó de Platón y de Aristóteles el gusto por la sublime abstracción de los argumentos matemáticos, tanto es asi que en todo los "Elementos" no existe aplicación alguna; ella está divorciada del mundo físico, no aceptando así el origen histórico que tuvo la matemática pues ya en las antiquísimas civilizaciones Babilónica y

Egipcia, la matemática fue cultivada en relación intrínseca a los problemas del mundo físico, aun cuando ya existía cierta abstracción en los argumentos. Esta relación es hoy día una característica esencial de la matemática contemporánea.

#### Los Libros XIV y XV.

Culminada la titánica tarea empleada por Euclides para escribir Los Elementos, surgieron a posterior dos libros extras, no debidos a Euclides y que pretenden continuar con el trabajo iniciado por el gran geómetra griego. Son los llamados **Libro XIV** y **Libro XV**. El primero es atribuido a **Hipsicles** de Alejandría (Siglo II, A.C.) y en donde se continúa las investigaciones hechas por Apolonio; el prefacio de este libro es de gran interés histórico. En este libro aparecen relaciones entre los elementos de los poliedros regulares. El Libro XV es de menor calidad que el anterior y trata, por ejemplo, sobre la inscripción de un sólido regular en otro; se estudia también el problema de determinar el número de aristas y de caras de los poliedros regulares; se estudia la amplitud de los ángulos diedros de los cinco poliedros regulares. Se conjetura que este libro es obra de diversos autores que vivieron entre los siglos V y VI de nuestra Era, aunque hay historiadores que atribuyen también a Hipsicles la autoría del Libro XV.

#### Otras Obras de Euclides.

Otras obras de Euclides han sobrevivido hasta nosotros o que se las conoce por referencias históricas. Entre ellas tenemos:

- **Los Datos.** Este libro, junto con los Elementos, son las únicas obras de Euclides que aún existen. Los Datos fue concebida para facilitar las aplicaciones (que no existen en Los Elementos) y para instruir como resolver problemas. A Pappus matemático e historiador, le debemos algunos comentarios sobre el valor de este libro, en donde aparecen problemas como el siguiente, "si se conoce un ángulo de un triángulo y la razón entre el rectángulo formado por los lados adyacentes al ángulo y el cuadrado del lado opuesto, el triángulo está dado en su forma ("especie")"; y de esta manera queda determinado un conjunto de triángulos semejantes.

- **Sobre la División de las Figuras.** De esta obra se conserva una versión árabe pues el original se perdió; ella contiene 36 proposiciones que tratan sobre la división de figuras planas (triángulos, trapecios y paralelogramos). La cuestión se reduce a dividir una figura (rectilínea) mediante una línea orientada, en dos partes que estén en una razón dada. Tenemos conocimiento de esta obra por los comentarios de Proclo.

- **Lugares Geométricos en Superficies.** Esta obra comprende dos libros en donde estudia, en particular, al cono y al cilindro.

- **Secciones Cónicas.** Es una obra escrita en cuatro libros y que según Pappus, Euclides trabajó arduamente, mejorando la obra de Arísteo, y sirvió de fundamento para la gran obra de Apolonio; tan es asi que en el prefacio de las "cónicas" se lee: ≪el libro tercero encierra muchos teoremas notables que son útiles para la síntesis de los lugares sólidos, y son en su mayor parte bellos y nuevos. Despues de haberlos descubierto, noté que Euclides no había obtenido la síntesis de los lugares geométricos relativos a tres y a cuatro rectas, pero apenas una parte de ellas y de una manera no muy feliz; y que, también, no era posible completar bien esta síntesis sin aquello que yo descubrí.≫

- **Los Porismas.** Esta obra fue escrita en tres libros y mereció una gran discusión por parte de Pappus, quien en su libro VII de "Las Colecciones Matemáticas" nos dice que "Los Porismas contiene una colección ingeniosa de cosas útiles para resolver los problemas mas difíciles ...". Posiblemente esta obra de Euclides sea, después de Los Elementos, de gran importancia para la posteridad; por ello, varios investigadores han tratado de reconstruirla. Ella contiene diversas proposiciones sobre las transversales, y sobre las divisiones homográficas, temas que actualmente estudia la geometría proyectiva, y es base de la geometría moderna. El significado de **porismo** es el de una proposición en que se pide hallar aquello que es propuesto. Se la definió como un teorema incompleto que exprime ciertas relaciones existentes entre seres variables, según una ley común.

A Euclides se le atribuye diversos otros escritos, como son, **La óptica**, que según Proclo es un trabajo en donde se presenta una exposición matemática de los fenómenos de la propagación de la luz. Se le atribuye también la "**Catótrica**", un trabajo sobre física-matemática, aunque existen historiadores que dan como autor de esta obra a Teão de Alejandría; en este libro se estudian los fenómenos que provienen de la reflexión de la luz en espejos planos o esféricos. A Euclides también se le atribuye la autoría de algunos trabajos sobre **astronomía** y algunos otros dedicados a la **música** y a la **mecánica**.

Si bien es cierto que Euclides no trató diversos temas matemáticos importantes de su época, se puede afirmar que la matemática "elemental" estuvo contenida en su obra, preparando asi la ruta por donde han de seguir una nueva generación de brillantes matemáticos de la Escuela de Alejandría, entre los que se destacarón Arquímedes y Apolonio.

**COMENTARIOS 1.2.**

1. Las milenarias culturas Babilónica y Egipcia indudablemente contribuyeron al florecimiento de una nueva cultura, la que se ubicaría a través del mediterráneo. Las mentes inquietas anhelaban viajar a Egipto y a Babilonia para aprender la matemática, la astronomía y otros conocimientos, quienes al retornar a la tierra natal desarrollaron nuevos conocimientos. Asi, Tales de Mileto aprendió en Egipto el conocimiento matemático que le ha de servir para su propia producción. Pitágoras fue un gran viajero; se afirma que estuvo en Babilonia, en Egipcio y en otras ciudades legendarias.

   La evolución de la matemática ha sido un proceso a través del tiempo, a veces lento, de muchos siglos; debido a factores especiales, coyunturales a veces, hubieron etapas en que florecieron pléyades de matemáticos de altísimo nivel que marcarían época. Algo asi ocurrió con el surgimiento de la gran Cultura Griega. Pero, posiblemente, tal situación hubiera tardado en aparecer sin el aporte de otras culturas predecesoras. Como sabemos, la matemática cultivada en Egipto y en Babilonia fue práctica, con aplicaciones a ciertos problemas concretos; fue una matemática utilitaria, al contrario la cultivada en Grecia, la que fue una matemática pura. Las ideas filosóficas de Platón y Aristóteles influyeron en el idealismo matemático cultivado por los griegos. Esto al menos hasta antes de Arquímedes. Tal idealismo era opuesto a la evolución de la matemática durante muchos siglos atrás de tal período griego. La matemática surgió y evolucionó en función a las necesidades que el hombre tuvo frente a la naturaleza, lo que no prohibió que surgieran ya ciertas abstracciones en muchos resultados de los egipcios y babilonios, como lo muestra, por ejemplo, la fórmula que da la suma de los $n$ primeros números naturales, asi como en las fórmulas para calcular áreas y volumenes de figuras geométricas básicas. Con **Arquímedes** se rompe tal idealismo; él fue el primer gran matemático aplicado (y también fue un genial matemático puro) de nuestra ciencia; esta nueva actitud ha de caracterizar a la matemática moderna y contemporánea.

2. La Escuela Pitagórica, con Pitágoras como gran Maestro, influyo mucho en la evolución de la matemática. Pitágoras fué, además, un gran filósofo y tuvo en Platón un pensador que influyó en la característica del pensamiento pitagórico. La Escuela tuvo un cierto carácter religioso, con severas reglas que cumplir, dentro de la que estaba la reserva que deberían tener sus miembros, lo que no permitió conocer la autoría personal de los resultados matemáticos obtenidos por los pitagóricos y que generalmente se atribuían al Maestro.

   Los pitagóricos indagaron sobre la armonía del cosmos, teniendo como fundamento a la idea del número. Para ellos, el pensamiento matemático era una forma de comprender al universo; para llegar a tal concepción, Pitágoras usó lo aprendido en Egipto y en Babilonia sobre astronomía; el movimiento de los astros son regidos por leyes aritméticas. Llegó a concebir, posiblemente vía experimentación, que la armonía de los sonidos está gobernada por los números. El gran pensador y profundo matemático del siglo XX, K. Gödel, asume el pensamiento pitagórico-platónico al proclamar (ver [GUZ. 2]): ≪Existe, si no me equivoco, todo un mundo que es el conjunto de las verdades matemáticas, al que no tenemos acceso más que por la inteligencia, al igual que existe el mundo de las realidades físicas; ambas son independientes de nosotros y de creación divina≫ .

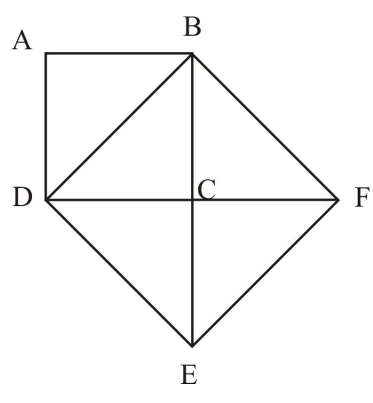
3. En 1.2.4. (i) hemos presentado algunas construcciones geométricas hechas por los antiguos griegos, muchas de ellas muy ingeniosas y que revelan el alto grado de comprensión de los temas que manejaban. Las construcciones geométricas, en general, son una excelente metodología para enseñar - aprender geometría, lo que (creemos) no se hace con la frecuencia necesaria. Algunos célebres problemas en matemática fueron sobre construcciones geométricas, como lo fue el problema de Apolonio

(1.2.4. (i), (8)). Realizar una construcción geométrica implica conocer, lo mejor posible, los requisitos matemáticos a ser empleados, asi como una buena visión (o visualización) espacial para concebir los pasos a ser dados en la construcción. Los antiguos griegos tuvieron esas virtudes y es un legado a la posteridad como un modelo de pensar.

4. En la Grecia antigua surgieron tres clásicos famosos problemas, lo que tuvieron una gran influencia en el desarrollo de la geometría, y que tuvieron ocupados a distintas generaciones de matemáticos. Tales problemas fueron presentados en 1.2.4. (ii), y son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Debemos remarcar que se exige que tales cuestiones sean resueltas solo usando regla (sin divisiones numéricas) y compás. De algún modo, estos problemas están relacionados a la historia del número irracional $\pi$ y cautivaron el interés por su solución a través de muchos siglos.

   En la época de los antiguos griegos, el problema de la duplicación del cubo fue el mas famoso; sin embargo, su origen es un tanto obscuro; asi, se narran algunas historias sobre la proclama de Dios a través del oráculo, que interpretada por Platón significaba que Dios deseaba que le construyeran un altar de doble tamaño. Posiblemente este problema este motivado en que los griegos conocieron como duplicar al cuadrado.

   Asi, sea el cuadrado $ABCD$ y sea la diagonal $BD$; ahora se construye el cuadrado $BDEF$ sobre $BD$. Entonces se observa que $BDEF$ es el doble que $ABCD$.




   Respecto al problema de la trisección del ángulo, usando solo regla y compás, a través del tiempo se hicieron esfuerzos para encontrar su solución, lo cual es imposible bajo tales condiciones; mucha gente creyó haber encontrado la solución pero se encontraron algunos errores en el argumento dado. Respecto a este problema no existe alguna historia confiable sobre su origen. Las características de este problema son diferentes a las de los otros problemas. Es cierto que algunos ángulos pueden ser trisectados, por ejemplo, un ángulo recto (ver 1.2.4. (ii)); el ángulo de 27 grados también puede ser trisectado; sin embargo, el problema es general, para cualquier ángulo.

Respecto al problema de la cuadratura del círculo, como sabemos, la cuestión es: "dado un círculo, ¿es posible construir un cuadrado que tenga exactamente la misma área que la del círculo dado?" En tal construcción, sabemos también, solo se debe usar regla y compás. Fue demostrado que tal construcción exacta **no** es posible realizarse, sin embargo, se encontraron diversas **construcciones aproximadas**, lo que de algún modo está relacionado al problema de aproximar, mejor y mejor, al número $\pi$. Ya hemos tenido oportunidad de ver que el rectángulo, el triángulo, los polígonos, y ciertas "lunas", son cuadrables, es decir, se puede construir cuadrados que tienen la misma área que tales figuras geométricas. De algun modo, debe haber parecido natural preguntarse si el círculo tiene tal propiedad. El origen de este problema se encuentra en la antigua Grecia; uno de los primeros matemáticos en intentar su solución fue Anaxágoras.

Mucho se ha escrito sobre estos tres problemas de la Antiguedad. El lector es invitado a revisar los libros citados en la bibliografía, en donde se puede encontrar distintas referencias sobre estas clásicas cuestiones. En particular sugerimos ver los interesantes artículos, en Internet, de los profesores J. J. O´Connor - E. F. Robertson.

Un estudio detallado de estos problemas, en su aspecto histórico - matemático, es una fascinante tarea por hacerse.

5. Una cuestión de cierta curiosidad puede ser: ¿Cómo conocemos nosotros la matemática elaborada tantos siglos atrás?, ¿Cómo en la actualidad sabemos de la existencia de muchos matemáticos que aportaron trabajos matemáticos de gran valor?. La respuesta no es fácil darse ya que en esa época (un promedio de dos mil quinientos años atrás) no existía, es claro, todos los recursos y tecnologías que disponemos ahora y que

permite garantizar la sobrevivencia del actual conocimiento, en general. Como sabemos, el hombre ya ha enviado información de nuestra existencia hacia los confines del universo. Pero, lo que se hizo en aquella época ha llegado en gran parte a nosotros gracias a los descubrimientos arqueológicos, muchos de ellos realizados en los siglos XIX y XX. También hemos heredado diversas traducciones y ediciones de publicaciones matemáticas hechas por hindúes, chinos y árabes fundamentalmente. La información ha ido procesándose de generación en generación. Muchos escritos originales se han perdido y conocemos de sus existencias por la mención que hacen de ellas historiadores y matemáticos que vivieron en los primeros siglos de nuestra Era.

Por otro lado, la información matemática que tenemos es producto de grandes esfuerzos de equipos de investigadores quienes hicieron los descubrimientos de los documentos,las traducciones del idioma original de aquella época a diversas lenguas a través del tiempo. Es conveniente que seamos concientes que algunos de tales documentos (tablillas, papiros, ...) fueron encontrados mutilados, no nítidos, y en base a esta situación había que reconstruir la información que se tenía. Por esta y otras razones, el escribir la historia de la matemática en la Antiguedad fue una ardua y difícil tarea; además, lo escrito en los libros podría ser una cuestión no completamente cerrada pues nuevos documentos podrían ser encontrados. No obstante este panorama, es algo fascinante el conocer los bellos trabajos matemáticos provenientes de culturas antiquísimas, como el período de Tales a Euclides. Este nivel llegó a su cumbre con las aportaciones de Arquímedes y Apolonio, como veremos en el próximo capítulo.

Un ejemplo típico de herencia histórico - matemático es lo sucedido con los Elementos de Euclides, libro que sufrió diversas ediciones, traducciones, interpretaciones, agregados, correcciones, y poco a poco fue adquiriendo la forma como conocemos a la llamada geometría euclideana. En los libros [ALM] y [HEA], el lector puede encontrar una buena información sobre la matemática en la Antiguedad, con énfasis en la matemática griega. También es invitado a recorrer las diversas páginas en Internet, en donde puede encontrar abundante información sobre lo sucedido en el período entre Tales y Euclides.

6. **El Teorema de Pitágoras.**

Durante muchos siglos los matemáticos prestaron atención al teorema de Pitágoras, un resultado ya conocido por las legendarias culturas de Babilonia y Egipto (alrededor de dos mil años antes de Cristo). En esa época llegaron a establecer una fórmula que proveía de ternas pitagóricas, algo realmente sorprendente para una matemática que era fundamentalmente utilitaria. Con los griegos, en particular con Pitágoras y su Escuela, y luego con Euclides (Proposición 47. Libro I), el teorema adquiere una madurez matemática. Sin embargo, no obstante esta cierta completitud dada por los griegos (llegaron a demostrar que el recíproco del teorema también es cierto) la posteridad siguió prestando atención a tal resultado (geométrico en su origen) buscando nuevas demostraciones. Se ha contabilizado al menos 367 demostraciones del teorema de Pitágoras, muchas de ellas análogas unas de otras.

E. S. Loomis publicó, a inicios del siglo XX, un libro ("La Proposición Pitagórica") en donde se exhiben muchas de tales demostraciones; esto nos indica el grado de atracción que tuvo el teorema desde épocas remotas hasta tiempos recientes. Muchas de tales demostraciones fueron dadas por matemáticos no muy conocidos, o aún por aficionados a la matemática como fue el caso del presidente de EEUU, James A. Garfield, quien ofreció una ingeniosa demostración del teorema. Que algunos políticos tengan aficiones matemáticas es una gran idea pues asi se entrenan en el rigor del pensamiento lo que los beneficia ante sus electores con un comportamiento ordenado y lógico.

Ilustremos algunas demostraciones del teorema de Pitágoras; para ello seguiremos al entretenido libro de W. Dunham ([DUN. 2]), quien presenta una prueba debida a un antiguo documento chino, otra debido a John Wallis (siglo XVII) y finalmente la demostración por Garfield (1876).

- La matemática debe también la contribución de los antiguos chinos, una antiquísima cultura. En el libro "Chou pei suan ching" (entre mil años antes de Cristo e inicios de nuestra Era) se discute al teorema de

Pitágoras según la figura (a).

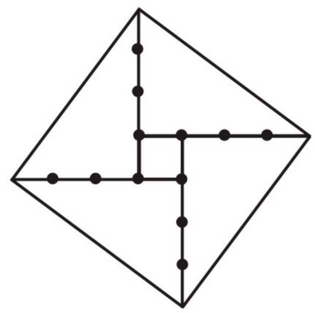


Figura (a)

Partimos de que los chinos conocían al teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo de lados de longitudes 3, 4 y 5. En esta orientación completemos la figura (a) en la figura (b), lo que sugiere visualmente al teorema de Pitágoras. De un modo mas conveniente, sea el triángulo rectángulo $ABC$ según la figura (c).

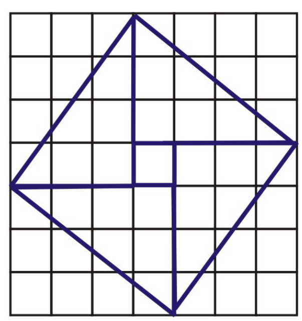


Figura (b)

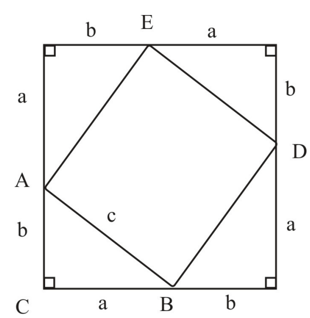



Figura (c)

Se construye un cuadrado con lado de longitud $a+b$. Luego se construye el cuadrilátero $ABDE$ (versión generalizada del hsuan - thu). Los cuatro triángulos rectángulos que aparecen, son congruentes (LAL). Se prueba que tal cuadrilátero es un cuadrado. Luego, el área del cuadrado interno es $c^2$ y el área del cuadrado externo es

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Pero,

$$(a+b)^2 = 4\,(\text{área }\Delta ABC) + c^2.$$

Es decir, tenemos

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2,$$

de donde $a^2 + b^2 = c^2$, como postula el teorema de Pitágoras.

$\blacksquare$

- La siguiente prueba del teorema de Pitágoras se atribuye a J. Wallis, matemático inglés, y que tiene la virtud de ser simple y corta. En tal demostración se usa semejanza de triángulos (algo que aparece en el Libro VI de los Elementos de Euclides; observemos que en el Libro I, Euclides ya había probado al teorema de Pitágoras). Veamos.

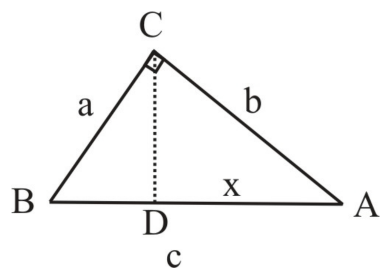



Figura (d)

Sea el triángulo rectángulo $ABC$, con catetos $a$, $b$ e hipotenusa $c$; ver figura (d). De $C$ trazemos la perpendicular $CD$ a $AB$. Pongamos $x = \overline{AD}$. Se verifica que el triángulo $ABC$ es semejante a los triángulos $BDC$ y $ADC$. De la semejanza entre $\Delta ABC$ y $\Delta ADC$ se obtiene la razón $\dfrac{b}{x} = \dfrac{c}{b}$, de donde $b^2 = ac$ y de la semejanza entre los triángulos $ABC$ y $BDC$, se tiene

$$\frac{a}{c-x} = \frac{c}{a}, \qquad \text{ó} \qquad a^2 = c^2 - xc \ .$$

Por tanto se tiene, $a^2 + b^2 = c^2$.

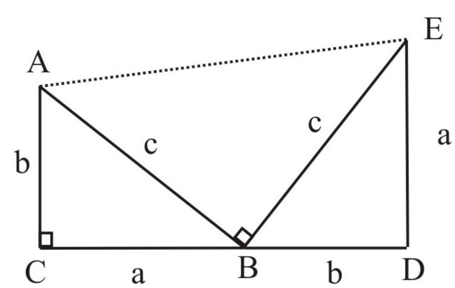
$\blacksquare$

- **La Demostración de Garfield.**

Un caso similar al presidente Garfield sucedió en el Perú; el presidente Manuel Prado estudió matemática en la Universidad de San Marcos y se conjetura que obtuvo el doctorado. No conocemos que él haya ejercido la docencia como profesor de matemáticas (sus períodos como presidente fueron, 1939 - 45 y 1956 - 62) ni que haya publicado algún trabajo matemático; mas bien algunos militares fueron profesores de matemática. En general es usual que alguien cultive alguna disciplina ajena a su propia especialidad, como es el caso de la música. Respecto a Garfield, luego de obtener la licenciatura (en 1856) en el College de Massachusetts, enseño matemática por un tiempo. En aquella época el ambiente político en los EEUU estaba inquieto; se venía la guerra civil. Garfield participa en el escenario político ocupando diversos cargos; en 1881 toma posesión como presidente del país; asi se tuvo a un presidente matemático. Lamentablemente su período duró muy poco tiempo pues murió en aquel año. Dejó su herencia como gobernante interesado en la educación de sus conciudadanos pero también nos dejó una herencia matemática: un método para resolver al teorema de Pitágoras.

**El Método Trapezoidal.**

Sea el triángulo rectángulo $ACB$. Por $B$ construimos una perpendicular a $\overline{AB}$ tal que $BE = c$. De $E$ construimos la perpendicular $\overline{ED}$ a $\overline{CD}$ ($\overline{BD}$ es la prolongación de $\overline{CB}$). Se observa que el $\Delta ACB$ es congruente con el $\Delta BDE$ (ALA). Luego, $\measuredangle CAB = \measuredangle DBE$ y $\measuredangle CBA = \measuredangle BED$. Sea el segmento $\overline{AE}$. El cuadrilátero $ACDE$ es trapezoide $\left(\overline{AC}//\overline{DE}\right)$.




Por otro lado,

$$\text{área trapecio } ACDE = \text{suma de las áreas de los tres triángulos.}$$

Por tanto,

$$\frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})\,\text{altura}}{2} = 2\left(\frac{ab}{2}\right) + \frac{c^2}{2} ,$$

de donde

$$(a+b)\,(a+b) = 2ab + c^2,$$

esto es,

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

de donde se tiene la tesis, $a^2 + b^2 = c^2$.

■

La idea de esta prueba es muy ingeniosa. Un periodista de aquella época lo comentó diciendo: "pensamos que esto es algo en lo que los miembros de ambas cámaras podemos estar de acuerdo sin distinción de partidos".

7. **Euclides y "Los Elementos".** ¿Porqué hemos dedicado muchas páginas a los Elementos de Euclides? Posiblemente hubiera sido suficiente dar unos cuantos comentarios para tener una idea del valor de esta monumental obra. En verdad, asi lo habíamos planificado inicialmente pero, conforme avanzábamos y nos documentábamos comenzó nuestro interés y curiosidad por conocer mas y mas sobre detalles de los Libros en su conjunto, luego de cada Libro y de cada proposición; fue algo cautivante. Era la oportunidad de conocer, de tener alguna idea de como Euclides escribió Los Elementos, al menos en la forma como ha llegado a nuestra época. El plan que comenzó a surgir fue la conveniencia de que en nuestro país el lector co-participe del placer de apreciar algunos detalles de la estructura de esta singular obra. Tampoco hemos pretendido ser completos en tal apreciación pues ello es una tarea que está mucho mas allá de nuestra competencia. Posiblemente este intento sirva como una motivación para posteriores trabajos sobre Euclides y su obra. Esto puede ser un reto para el lector y para nosotros. Capaz pueda ser discutible la utilidad de hacer tal esfuerzo en el contexto de los actuales tiempos; sin embargo, consideramos que todo matemático profesional debería tener alguna información, la mejor posible, sobre Los Elementos; esto es parte de la cultura matemática que deberíamos poseer para comprender mejor como la evolución de la concepción del espacio fue procesándose desde lejanos tiempos hasta la época contemporánea. En armonía con esta idea, las bibliotecas de matemática de nuestras universidades deberían tener un ejemplar de Los Elementos de Euclides (existen ediciones de esta obra). De esta manera podríamos satisfacer lo planteado arriba; en particular, para que nuestros jóvenes estudiantes de matemáticas, y de ciencias (o aún

de otras áreas) puedan apreciar el gran aporte histórico - matemático de la antigua cultura griega.

Del estudio de Los Elementos pueden surgir diversos proyectos de investigación, como se realiza en diversas universidades extranjeras. Por ejemplo, hacer un estudio crítico de la teoría de números presentado por Euclides en base a lo hecho por sus comtemporáneos; en particular, estudiar a Pitágoras y su Escuela en relación a la teoría de números. El profesor Miguel de Guzmán fue un ardiente admirador de Pitágoras y de su obra; él escribió diversos interesantes artículos sobre Pitágoras (ver, por ejemplo, [GUZ. 1], [GUZ. 2]). El Profesor M. de Guzmán falleció meses atrás dejándonos muchos escritos relacionados con la historia de la matemática en donde nos revela su gran competencia académica, y amplia cultura, para tratar estos delicados temas.

**EJERCICIOS 1.2.**

1. (a) Describa, usando un mapa de aquella época, la ubicación de algunas ciudades ubicadas en el entorno del Mar Mediterráneo, mencionado porque ellas fueron importantes en el desarrollo de la matemática en la Antiguedad.

   (b) Explique como pudo haber surgido la civilización griega. ¿Cómo influyó en ella lo logrado por las culturas egipcia y la babilónica?

   (c) Redacta un breve informe sobre Tales de mileto mencionando la obra matemática atribuida a él. Haga un breve análisis - crítico de tal obra.

2. (a) Pruebe, al menos, dos de los resultados atribuidos a Tales. ¿Ud. podría haber coincidido con lo hecho por Tales?

   (b) Si ud. hubiera vivido en la época de Tales, ¿Cómo lo habría calificado luego que él predijiera un eclipse de Sol?, ¿qué opinión se habría formado sobre la utilidad de la matemática para interpretar al mundo físico?

   (c) ¿Cuál fue el elemento básico de su filosofía natural?; ¿porqué Tales lo tomaría como elemento básico del universo?

3. (a) Redacte un breve informe sobre la influencia de Pitágoras y su Escuela en el desarrollo de la matemática en la Antiguedad.

   (b) ¿Cuál es su crítica por la naturaleza estrictamente teórica de la matemática pitagórica?

   (c) Elabore un informe sobre el teorema de Pitágoras, sus variantes y demostraciones.

4. (a) Explique en que consiste el problema de "cuadrar" una figura plana.

   (b) Explique como un rectángulo, un triángulo y un polígono son cuadrables. Explique la cuadratura de una lúnula (Hipócrates).

   (c) ¿Qué puede decir de la cuadratura del círculo?

5. Informe sobre algunos aspectos de la obra matemática de Arquitas de Tarento.

6. Investigue algunos aspectos históricos del problema de Apolonio (1.2.4. (i). (8)).

7. Redacte un informe sobre los tres clásicos problemas de la Antiguedad. (Use información extraida de Internet).

8. ¿Cómo fue la influencia de Platón y de Aristóteles en la evolución de la matemática en su tiempo?, ¿y en la posteridad? Mencione a los matemáticos que florecieron bajo sus directas influencias.

9. Remarque la figura de Eudoxo de Cnido; explique el método exhaustivo y a la teoría de las proporciones.

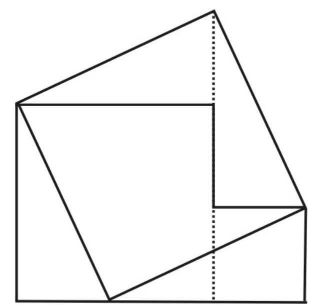
10. ¿Cómo fue el entorno matemático al final del Período Elénico?

11. Explique cual fue el papel que tuvo la Biblioteca y el Museo en la Antigua Alejandría.

12. De los trece libros que tiene Los Elementos, ¿cuál es el que mas aprecia ud.? (su respuesta podría ser en plural).

13. Dé una síntesis sobre la teoría de números presentado en los Libros VII, VIII y IX.

14. Haciendo uso de la figura adjunta, dé una demostración del teorema de Pitágoras. (Use congruencia por adición).



15. Sean $a$ y $b$ dos números positivos. Si $A = \dfrac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ y $H = \dfrac{2ab}{a+b}$, pruebe que:

    *a*) $H \leq G \leq A$. Se tiene la igualdad si y solo si $a = b$.

    *b*) $a : H = H : b$ (proporción musical).

    *c*) (Definición pitagórica de la media armónica de $a$ y $b$). $H$ es la media armónica de $a$ y $b$ si existe un número $n$ tal que $a = H + \dfrac{a}{n}$ y $H = b + \dfrac{b}{n}$.

    *d*) $\dfrac{1}{H-a} + \dfrac{1}{H-b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

16. Pruebe que no existe ningún triángulo rectángulo isósceles cuyos lados son enteros.

17. Pruebe que no existe ninguna terna pitagórica en la cual uno de los enteros es la media geométrica de los otros dos.

18. ¿Cuáles son los cuatro primeros números heptagonales (correspondientes a polígonos regulares de siete lados)? (Haga los gráficos correspondientes).

19. Usando cartón, y otros materiales, construya los cinco poliedros regulares.

20. **Teorema Fundamental de la Aritmética.** [EVE]. "Dado un número entero positivo $a$, existe una única sucesión $a_1,\ a_2, ...,\ a_n, ...$ de enteros, donde el número de términos no - nulos es finito y tal que

$$a = 2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}...$$

donde $2,\ 3,\ 5, ...$ son números primos consecutivos".

**Notación.** $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, con $a_n$ el último exponente no nulo. (Asi, $12 = (2,1)\,,\ \ 14 = (1,0,0,1)\,,\ \ 27 = (0,3)\,,\ \ 360 = (3,2,1)$).

Pruebe los teoremas:

**T.1.** $ab = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...)\,.$

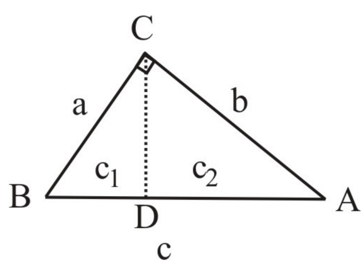
**T.2.** $b$ es divisor de $a$ **si y solo si** $b_i \leq a_i,\ \ \forall\, i.$

**T.3.** El número de divisores de $a$ es: $(a_1 + 1)\,(a_2 + 1)\,...\,(a_n + 1)\,.$

21. Pruebe que cualquier entero cuadrado permite 0 ó 1 cuando se le divide por 4.

22. Usando el ejercicio 21, deduzca que si $(a, b, c)$ es un triple pitagórico $(a^2 + b^2 = c^2)$ entonces $a$ y $b$ no pueden ser ambos números impares.

23. En la figura adjunta, el triángulo $ACB$ es rectángulo en $C$. Pruebe que los tres triángulos $ACB,\ ADC$ y $BDC$ son semejantes. De esto, dé otra demostración del teorema de Pitágoras. (Trate aún de hacer este ejercicio, hecho ya por Wallis).




24. Escribamos un número impar arbitrario $m$ en la forma $2q + 1$, para algún entero $q$. Pruebe que $m^2$ tiene también la forma $2r + 1$ (esto prueba que $m^2$ es aún un número impar).

25. Pruebe que el cuadrado de $2q+1$ es de la forma $4s+1$, lo que nos explica porqué todo número entero cuadrado produce residuo 0 ó 1 al dividirse por 4 (ejercicio 21).

26. Si $(a,b,c)$ es un triple pitagórico $(a^2+b^2=c^2)$ y $a$, $b$, $c$ no tienen un factor común, pruebe que uno, $a$ ó $b$, es par y el otro es impar.

27. Explique, matemáticamente, porqué solo existen cinco poliedros regulares. [Teeteto].

28. Platón afirma que Teodoro demostró que $\sqrt{3}$ es irracional. Intente dar una demostración de esta afirmación.

29. **El Algoritmo de Euclides ([EVE]).**

    En el Libro VII de los Elementos está el llamado **algoritmo euclideano**, y que sirve para hallar el máximo divisor común (m.d.c.) de dos números enteros. Este algoritmo ya era conocido mucho antes que Euclides y consiste en:

    $\ll$ divida el mayor de dos números enteros positivos por el menor y entonces divida el divisor por el resto. Continúe ese proceso de dividir el último divisor por el último resto, hasta que la división sea exacta. El divisor final es el m.d.c. buscado $\gg$.

    (a) Encuentre, con el algoritmo euclideano, el m.d.c. de 679 y 1680.

    (b) Pruebe que el algoritmo euclideano lleva en efecto al m.d.c.

    (c) Sea $h$ el m.d.c. de dos enteros positivos $a$ y $b$. Pruebe que existen enteros $p$ y $q$ (no necesariamente positivos) para los cuales $h = pa + qb$.

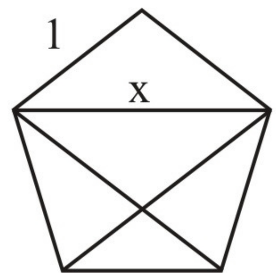
    (d) Encuentre $p$ y $q$ para los enteros dados en la parte (a).

    (e) Pruebe que: $a$ y $b$ son primos si y solo si existen enteros $p$ y $q$ tal que $pa + qb = 1$.

    (f) Usando (e), pruebe que si $p$ es primo y divide al producto $uv$, entonces $p$ divide a $u$ ó $p$ divide a $v$.

    (g) A partir de (f), pruebe el teorema fundamental de la aritmética: $\ll$ todo entero mayor que 1 puede ser factorizado unívocamente en un producto de números primos$\gg$.

30. [STI]. Usando paralelas y triángulos semejantes en la figura adjunta, pruebe que la diagonal $x$ del pentágono regular de lado 1 satisface




$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

31. Por los “elementos” de un estudio deductivo, los griegos quisieron decir los teoremas guía o clave que son de uso amplio y general en la materia. La selección de los teoremas que deben tomarse como los elementos de la materia requiere el ejercicio de cierto criterio.

    Si se debieran elegir dos de los siguientes teoremas para “elementos” de un curso de geometría plana, ¿cuál elegiría?

    (i) La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

    (ii) Las tres alturas de un triángulo, prolongadas si es necesario, concurren en un punto.

    (iii) Un ángulo inscrito en una circunferencia se mide por la mitad de su arco.

32. Redacte un breve informe histórico sobre los números perfectos; ubique estos números dentro de Los Elementos. (Obtenga información vía Internet).

# Capítulo 2

# Arquímedes - Apolonio.

## Declinación de la Matemática Griega.

Hemos tenido la oportunidad de ver en 1.2.5 la grandiosa obra matemática de Euclides, quien fundó la Escuela Matemática de Alejandría que ha de florecer por varios siglos; ahí se llego a formar una grandiosa biblioteca. La influencia del pensamiento euclideano permitió que alrededor del Tercer Siglo A.C. surgieran matemáticos de altísimo nivel, entre los que mencionamos a:

- Aristarco de Samos, 300 - 250 A.C.
- Arquímedes de Siracuso, 287 - 212 A.C.
- Apolonio de Perga, 260 - 190 A.C.
- Eratóstenes de Cirene, 275 - 195 A.C.

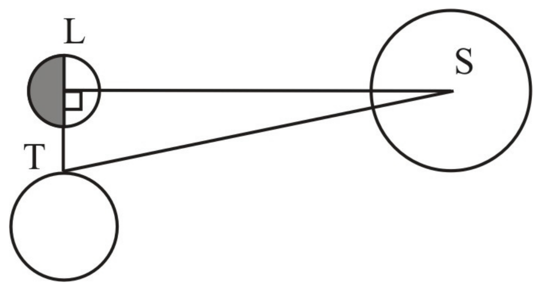
De ellos, Arquímedes constituye la máxima expresión matemática en la Antiguedad y uno de los mayores genios en toda la Historia de la Matemática.

## 2.1. ARISTARCO.

(Hay autores que señalan el año 310 A.C. como la fecha de su nacimiento). Aristarco fue un notable astrónomo que vino a Alejandría desde la isla de

Samos; usó la matemática en sus investigaciones astronómicas. Fue el primero en afirmar que la Tierra y los planetas giran alrededor del Sol, y que la Luna gira alrededor de la Tierra. Sus cálculos fueron hechos en base a pura geometría pues la trigonometría era desconocida en su época.

Escribió una obra, llamada "Sobre las dimensiones y las distancias del Sol y de la Luna", la que contiene 18 proposiciones. Aristarco conocía que la luz de la Luna que recibimos **es reflexión de la luz solar sobre la Luna**.




Emprende la tarea de determinar la relación entre las distancias de la Tierra a la Luna y al Sol; emplea el método llamado de la dicotomía. Sea $T$ la tierra, $S$ el Sol y $L$ la Luna y consideramos, en general, el triángulo $STL$. Tal método tiene como punto de partida a la observación de que este triángulo es rectángulo en $L$ en el momento en que la luna aparece "dicótoma", esto es, en el momento en que el Sol ilumina solo la mitad del disco lunar (primer cuadrante). Además, en estas circunstancias, podemos ver a la Luna y al Sol en el firmamento al mismo tiempo. Este notable astrónomo - matemático fue capaz de postular que el ángulo $STL$ es $\frac{29}{30}$ de un ángulo recto (un valor mas preciso, en la actualidad es 0.9981 de un ángulo recto). Bajo esta hipótesis y de admitir que la Tierra se puede considerar como un punto respecto a la órbita lunar, se concluye que el ángulo en $T$ es de $87°$. (Observaciones hechas en 1919 dan el valor $89°50'$).

Debemos resaltar que Aristarco usó regla y compás en sus construcciones, al estilo de la geometría euclideana. Teniendo un triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual a $\frac{29}{30}$ de ángulo recto, él encuentra que la razón de $TL$ a $TS$ es de alrededor de $\frac{1}{19}$, mas precisamente llega a establecer que: $18 < \frac{TS}{TL} < 20$. [+]

Por tanto, Aristarco concluye que la distancia de la Tierra al Sol es de alrededor 19 veces la distancia de la Tierra a la Luna. Reiteramos que si él hubiera dispuesto de la trigonometría se hubiera tenido el siguiente simple argumento:

Si $\measuredangle STL = 87°$, entonces $\measuredangle TSL = 3° = \frac{\pi}{60}$ radianes; luego, $\frac{TL}{TS} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{60}\right) \simeq \frac{\pi}{60} \simeq \frac{1}{19}$, tal como concluyó Aristarco luego de técnicos argumentos geométricos.

Precisemos que Aristarco estuvo en posición de las siguientes afirmaciones, algo extraordinario en un ser pensante en el siglo III A.C., ellos son:

- la Tierra, el Sol y la Luna son esferas;
- la Tierra gira alrededor del Sol, y la Luna alrededor de la Tierra;
- la luz viaja a través de líneas rectas;
- la luz de la Luna es reflexión de la luz del Sol;
- los eclipses del Sol son causados por el bloqueo de la Luna de los rayos solares que se dirigen a la Tierra, y los eclipses de Luna son causados por el bloqueo de la Tierra de los rayos solares que se dirigen a la Luna.

Como observamos, Aristarco postuló (tres siglos antes de Cristo) el sistema heliocéntrico de nuestro sistema solar. Copérnico, en el siglo XV, ¿conoció el trabajo de Aristarco?

Aplicando los anteriores argumentos, Aristarco establece que el Sol es 7 000 veces mas grande que la Luna; ahora se sabe que es de 64,000,000 veces. Sin embargo, aún con las deficiencias numéricas de algunos de sus resultados, producto de la ausencia de una matemática adecuada, lo hecho por este notable científico está a la altura de los grandes pensadores de la Escuela de Alejandría.

## 2.2. ARQUÍMEDES.

"Serán mas queridos aquellos que hayan
contribuido en mayor grado a la elevación
de la raza y de la vida humana"

A. Einstein

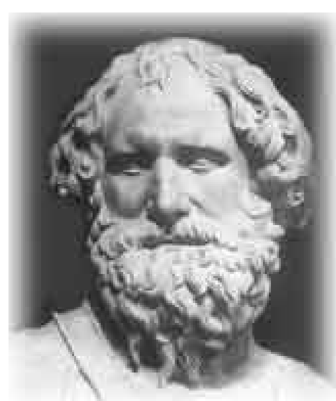
Arquímedes, **un científico antiguo con una mente contemporánea**. Posiblemente esta frase defina bien al personaje que vamos a estudiar en esta oportunidad. En efecto, Arquímedes representa la inteligencia matemática en una elevada expresión, tanto como científico puro como científico aplicado, y eso que algunas de sus obras se perdieron y nos son desconocidas. Es una de las mentes mas brillantes en toda la historia de la matemática. Es claro que solo pretendemos presentar algunos aspectos de su rica producción científica.

### 2.2.1. Algunos Aspectos de su Vida.

Arquímedes vivió entre los años 287 y 212 antes de Cristo; fue hijo del astrónomo Fidias y nació en Siracusa, Sicilia. Tuvo excelentes relaciones con el rey Hierón, quien admiraba su genio matemático, al extremo que llegó a proclamar:

> ≪ Nadie en el reino podrá dudar de una sola de sus palabras o de las afirmaciones de Arquímedes ≫ .

Si bien Arquímedes llegó a ser genial en las aplicaciones de la matemática, fue el primer genio en la mecánica, él se sentía mejor con sus estudios en matemática pura. Desde muy joven se dedicó al estudio y a la investigación, lo que fue una característica de toda su vida. A temprana edad viajó a Alejandría, el mayor centro científico de entonces, en donde aprendió e hizo amistad con los Maestros de la Escuela de Alejandría. Toda su vida fue una continua meditación en la solución de problemas de toda naturaleza; fue un hombre abstraido en sus propios pensamientos pero pisaba tierra, y la pisaba bien!



Hemos dicho que tuvo una "mente contemporánea"; en efecto, sus trabajos fueron verdaderos artículos de investigación, al estilo de los actuales tiempos; fue agudo y sagaz e inventaba sus propios recursos para resolver delicados problemas, tanto en matemática pura como en la aplicada. Arquímedes fue un hombre al servicio de su ciudad; fue un sabio que se identificó con sus ciudadanos. Estando en Alejandría, Arquímedes estableció una gran amistad con Eratóstenes y Conon, ambos grandes matemáticos y parece fueron las únicas personas a quienes Arquímedes les confió sus descubrimientos.

Pasemos a presentar, de un modo no formal matemáticamente, algunas contribuciones de Arquímedes a fin de precisar mas su personalidad como hombre al servicio de su comunidad. Algunas son anécdotas que algunos autores le restan credibilidad. Veamos.

**(i) Agua para el desierto.** El problema consistió en obtener agua del río Nilo para irrigar ciertos sectores áridos del desierto. Arquímedes construyó un cilindro en cuyo interior puso una roscca helicoidal; luego, sumergía la parte inferior poniendo en movimiento la rosca lo que producía que el agua subiera y saliera por la parte superior, obteniéndose el agua deseada.

**(ii) Nace un planetario.** Arquímedes construyó una esfera para representar al Sol, luego construyó otras esferas para simbolizar a la Tierra, a la Luna y a los planetas conocidos en esa época. Todo este sistema lo movió con una fuerza hidráulica e hizo una construcción tan perfecta y se producían las fases de la Luna, los eclipses y otros fenómenos celestes con una precisión admirable, tanto asi que Platón exclamó: "La ley de los movimientos celestes es mas hermosa que la poética contemplación de las estrellas".

**(iii) Arquímedes mueve un barco.** En cierta ocasión el gran siracusano exclamó: "dadme un punto de apoyo y levantaré al mundo". El rey Hierón le dió la oportunidad de probar tal afirmación cuando sus ingenieros navales se sintieron incapaces de lanzar al mar un enorme barco carguero. El rey propuso el problema al matemático, quien aceptó el desafío. Arquímedes construyó unas roldanas y dispuso un sistema de ellas alrededor del barco y entrenó a un conjunto de hombres para su manejo. Al final ligó todas las roldanas con una cuerda cuyo extremo puso en las manos de una frágil joven, quien al jalar la cuerda puso el sistema de roldanas en movimiento y el barco se movió lenta y majestuosamente hacia el mar. El rey sobrecogido por lo que vió, decretó: ≪Nadie en el reino ... ≫ .

**(iv) Se descubre una alteración.** El rey Hierón mandó preparar una rica corona para la cual entregó una gran cantidad de oro a un artista. Al ser entregada la joya, el rey desconfió de la honradez del artista y encargó a Arquímedes el problema de saber si hubo o no mezcla. El problema no era fácil. Arquímedes fue un gran observador de las cosas que sucedían a su alrededor; tenía una rara y sorprendente combinación de la intuición objetiva con una profunda abstracción de las ideas que recibía del mundo físico. Al entrar a la tina a tomar un baño sintió la sensación de que su cuerpo perdía peso. Meditó en la idea y concluyó que: "un cuerpo sumergido en el agua pierde de su peso tanto cuanto pesa el agua que él desalojó".

Esta conclusión le daba la solución del problema. Se afirma que Arquímedes salió corriendo completamente desnudo exclamando: "Eureka, eureka" ("lo encontré, lo encontré"). Se iniciaba así un capítulo de la física: la hidrostática.

**Solución del problema:** hizo confeccionar dos masas, una de oro y otra de plata, de igual peso que la corona, luego midió el volumen del agua desalojada por cada uno de esos cuerpos y verificó que los volúmenes eran distintos. Luego, la corona fue mezclada con plata. Una mente genial la de Arquímedes !

**(v) Un matemático contra un ejército.** En esta historia veremos como el ingenio de un hombre es capaz de vencer a un ejército; de como el conocimiento matemático puede ayudarnos en nuestra sobrevivencia, pero también puede servir para nuestra destrucción.

La ciudad de Siracusa fue sitiada por los soldados romanos al mando del general Marcelo. La situación era muy difícil para los siracusanos pues la caida de la ciudad era inminente; el rey Hierón busca la ayuda del anciano matemático para que se dedicara a construir todo tipo de máquinas, tanto para la ofensiva como para la defensiva. La mente creadora de Arquímedes comienza a trabajar. Los romanos, dueños de una superioridad numérica, pensaron que la dominación de la ciudad era una cuestión fácil; de pronto ! ... por las murallas de la ciudad aparecieron extraños aparatos que arrojaban a gran velocidad todo tipo de proyectiles y grandes piedras que causaban grandes daños a la tropa de Marcelo.

Cuando los romanos intentaron nuevamente el asalto por tierra y mar, aparecieron por las murallas unos enormes brazos mecánicos que tomaban a las naves, las sacudían, las levantaban y luego las sumergían causando muchos estragos y bajas en las filas romanas. Contra este tipo de ofensiva y armas, Marcelo no podía hacer algo, por lo contrario el pánico se apoderó de sus soldados que veían en el autor de esas ingeniosas armas, al mismo demonio.

El general romano herido en su orgullo prometió no abandonar la lucha, y el sitio de Siracusa duró mas de dos años. En el transcurso de este tiempo, y cuando los romanos atacaban otra vez, vieron aparecer por las murallas unos espejos cóncavos.

¿De qué se trataba esta vez?, ¿alguna broma del enemigo?, pensaron los romanos entre curiosos y atemorizados. El terror debe haber sido inmenso cuando vieron que los espejos lanzaban rayos solares concentrados que provocaban incendios en las naves y en la gente que atacaba por tierra. Este cuadro dantesco de destrucción era la aplicación del conocimiento de Arquímedes sobre las leyes físicas de los espejos cóncavos.

Asi fue pasando el tiempo y Arquímedes era un hombre de ciencia que no podía vivir sin sus meditaciones matemáticas. Solo en estas circunstancias, cuando el anciano se abstraía del mundo exterior, los romanos lograron capturar a la ciudad, saquearla y destruirla. Marcelo ordenó que se respetara la vida del genial matemático, acto que amerita la sensibilidad del general. Durante el saqueo, un soldado entra en una casa llena de aparatos y papiros; en el jardín encuentra a un anciano encanecido y sentado en el mas completo silencio y que meditaba sobre un problema geométrico en base a figuras hechas en el piso. El soldado, que seguramente no sabía ante quien estaba, le ordenó que se presentara inmediatamente ante Marcelo, lo que Arquímedes no aceptó sin antes resolver el problema y escribir la demostración.

El soldado indignado por la respuesta sacó su espada y lo atravesó, siendo “no borres mis círculos” las últimas palabras de Arquímedes.

Esto es un episodio en que se enfrenta la inteligencia contra la estupidez y la brutalidad de algunos hombres, algo que lamentablemente se ha de repetir a través de la historia de la ciencia.

Marcelo se indignó de este trágico suceso y ordenó, como un homenaje a un gran hombre, se construyera (como Arquímedes ya lo había dispuesto) sobre su tumba una placa en donde se aprecia uno de sus mas bellos teoremas: “una esfera inscrita en un cilindro”.

El prestigioso matemático contemporáneo Whitehead dijo: ≪Ningún romano ha perdido su vida por estar absorvido en la contemplación de una figura matemática≫ .

### 2.2.2. La Obra Científica de Arquímedes.

La obra de este genial matemático es muy amplia y compleja en sus argumentos matemáticos; conocemos parte de su obra pues algunos se perdieron (¿cuántos?, ¿qué contenían?, ...). Algunos de sus trabajos se conocen por escritos hechos por posteriores matemáticos e historiadores de la ciencia griega.

Veamos una visión de las obras de Arquímedes, sin aún usar argumentos matemáticos. Ellas son:

1. **"Primer libro de los equilibrios":** trata de los centros de gravedad, de los paralelogramos y de los triángulos.

2. **"Cuadratura de la parábola":** estudia la cuadratura de cualquier segmento parabólico; da dos soluciones, una mecánica y otra geométrica.

3. **"Segundo libro de los equilibrios":** trata de los centros de gravedad de los segmentos de parábola.

4. **"Sobre la esfera y el cilindro I y II":**

    *a*) La superficie de una esfera es cuatro veces la del gran círculo.

    *b*) La superficie de un segmento de esfera es igual a un círculo de radio igual a un segmento de recta trazado desde el vértice del segmento al punto sobre la circunferencia de la base.

    *c*) Si un cilindro está circunscrito a una esfera y su altura es igual al diámetro de la esfera, entonces: el volumen y la superficie del cilindro (con sus dos bases) son una vez y media el volumen, la superficie, de la esfera respectivamente.

5. **"Sobre las espirales":** estudia a la espiral $f = r\theta$, asi como a las tangentes y a las áreas barridas por el radio vector.

6. **"Sobre los conoides y los esferoides":** trata sobre los volúmenes barridos por las elipses y las parábolas que giran alrededor de un eje de simetría y por las hipérbolas que giran alrededor de un eje transversal.

7. **"Medida del círculo":**

a) Prueba la equivalencia de los problemas de la cuadratura y de la rectificación.

b) Prueba que el círculo es los $\dfrac{11}{14}$ del cuadrado circunscrito si la longitud de la circunferencia es 3 veces el diámetro mas $\dfrac{1}{7}$.

c) El perímetro del círculo es menor que los $3\,\dfrac{1}{7}$ del diámetro.

8. **"Arenario":** contiene un sistema de numeración de grandes números.

9. **"Los cuerpos flotantes, libros I y II":** trata del equilibrio de un segmento de paraboloide de revolución que flota en un líquido, etc.

10. **"Tratado del método":** Arquímedes revela a Eratóstenes algunos de sus métodos de investigación utilizados para descubrir varios de sus teoremas.

Los trabajos de Arquímedes son originales, algunos de alta originalidad; sus escritos aportaron ideas y métodos nuevos; fue un matemático puro con mente moderna. Siguió rigurosamente el método de Euclides de fijar los postulados previamente, luego venían los teoremas, lo que eran tratados con mucho cuidado y rigor. Contribuyó notablemente en toda la matemática griega (que era fundamentalmente la geometría y la aritmética), pero también contribuyó con el progreso de la astronomía, de la hidrostática y en la estática. Como hemos mencionado, en geometría escribió cuatro libros, dos de geometría plana: "De las espirales" y "De la medida del círculo"; y dos de geometría del espacio: "De la esfera y del cilindro" y "De los conoides y de los esferoides". Es también notable su trabajo "cuadratura de la parábola", que discutiremos después.

En el libro "De la esfera y del cilindro" se encuentran **seis definiciones**, que son, en las propias palabras de Arquímedes:

D.1. Existen en el plano ciertos arcos de curva totalmente situados de un mismo lado de las rectas que unen los extremos del arco.

D.2. Llamo **cóncava** en la misma dirección una línea tal que la recta que une dos puntos cualquiera de ella, o bien está toda del mismo lado de la línea o bien está parte del mismo lado y parte sobre la línea misma.

D.3. De igual modo, hay ciertas porciones de superficies no situadas en un plano pero cuya línea extrema está en un plano situado totalmente del mismo lado respecto de la superficie.

D.4. Llamo **cóncavas en la misma dirección** a superficies tales que las rectas que unen dos puntos cualesquiera de ellas, o bién están todas del mismo lado de la superficie o bien parte del mismo lado y parte sobre la superficie misma.

D.5. y D.6. se refieren al sector esférico y a un sólido especial: el "rombo sólido", constituido por dos conos de igual base y eje, y cuyos vértices están en semi-espacios diferentes respecto de la base común.

En relación a las cuatro primeras definiciones están asociados **cinco postulados**, que son:

P.1. La recta es la mas corta entre todas las líneas de iguales extremos.

P.2. En cuanto a las demás líneas planas con los mismos extremos, son desiguales cuando siendo cóncavas en la misma dirección una de ellas está totalmente comprendida entre otra y la recta con los mismos extremos, o en parte está comprendida y en parte es común; y la línea comprendida es menor.

P.3. Del mismo modo, cuando varias superficies tienen los mismos extremos y esos extremos están en un plano, esa figura plana es la menor.

P.4. Por otra parte, entre las líneas, superficies y sólidos desiguales, la mayor excede a la menor de una cantidad tal que agregada así misma puede superar a cualquier cantidad dada homogénea con las dos anteriores.•

Luego de las definiciones y postulados, Arquímedes estudia una serie de resultados (teoremas) relativos a las áreas y volúmenes de los cuerpos redondos. Estos resultados geométricos no aparecen en los Elementos de Euclides. Arquímedes estuvo muy cerca de descubrir al **cálculo integral**; en verdad, él hacía verdaderas integraciones en el cálculo de áreas y volúmenes; no llegó a este descubrimiento dado que la cuestión del infinito era algo no preciso en su época.

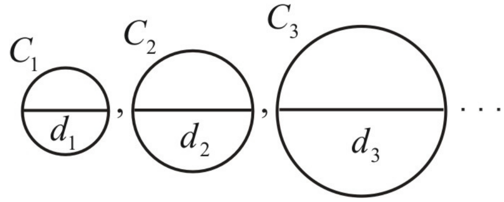
En 1906, en Constantinopla se encontró el Método, un escrito de Arquímedes que estaba escondido dentro de un texto religioso. Como hemos dicho (ver 10), Arquímedes narra a Eratóstenes como descubrió ciertos teoremas relacionados con la curvatura y con la cuadratura usando sólidos argumentos geométricos; él acostumbraba usar ciertos métodos mecánicos para explorar la validez de sus argumentos; luego de tener ciertas guías pasaba a demostrar sus teoremas de un modo consistente.

En su libro "De la esfera y del cilindro", luego de las definiciones y postulados mencionados antes, Arquímedes estudia y prueba una serie de teoremas sobre áreas y volúmenes de cuerpos redondos; acá, él usa ciertas sumas y el ya mencionado método de exhaustación y estuvo muy cerca de llegar al cálculo integral, como hemos mencionado arriba. En la segunda parte del libro mencionado, Arquímedes ataca complejos problemas los que conducen a problemas del tipo de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo. Hay que destacar que sus contribuciones a la geometría del espacio son mayores en número que sus contribuciones a la geometría plana. Por otro lado, su libro sobre las espirales sea uno de sus libros mas difícil de comprender; la demostración de los teoremas son largas y bastante técnicas.

Se atribuyen a este genio matemático algunas obras que se perdieron pero se sabe que existieron por ciertas fuentes de los griegos mismos asi como de origen árabe. Una pregunta que podemos hacernos es: ¿cómo es que llegaron hasta nosotros los trabajos de los matemáticos de la Antiguedad, y de Arquímedes en particular? ... En parte esto se debe a que hubieron matemáticos en los primeros siglos de nuestra era que escribieron diferentes textos sobre la matemática hecha por sus antepasados. Los árabes también contribuyeron con la difusión del conocimiento antiguo dentro de occidente.

### 2.2.3. La Cacería de $\pi$.

Actualmente sabemos que la razón de la longitud de una circunferencia con la longitud del diámetro respectivo es la misma para cualquier circunferencia.



Asi,

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \frac{C_3}{D_3} = \frac{C_4}{D_4} = \cdots = \quad \text{constante} \quad \equiv k.$$

Por **definición**, $\pi = k$. En general, $\pi = \dfrac{C}{D}$ ó $C = \pi D$.

Desde la época de la Antiguedad, en particular en el período de los griegos, el cálculo del valor de $\pi$ fue un reto a la inteligencia humana. **Arquímedes** atacó este problema con mucha imaginación. En su libro "**De la medida del círculo**" nos dice que la razón de la circunferencia al diámetro está comprendida entre $3\,\dfrac{10}{71}$ y $3\,\dfrac{1}{7}$. También nos dice que la razón (del área) del círculo con el cuadrado (de la longitud) del diámetro es 11:14.

Veamos algunos argumentos. El libro XII de Euclides contiene la

**Proposición XII.2.** *Círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.*

**Nota.** Este resultado fue usado por Hipócrates en la cuadratura de la luna.

**En efecto**, sea $C_1$ una circunferencia, $A_1$ el área del círculo respectivo y $D_1$ es su diámetro. Similar con la circunferencia $C_2$. Entonces tenemos ($R$ =radio)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{(2R_1)^2}{(2R_2)^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}\,,$$

esto es, $\dfrac{A_1}{D_1^2} = \dfrac{A_2}{D_2^2} = \text{constante} = k_1$.

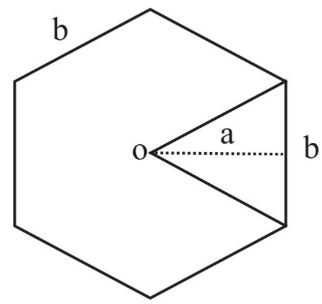
■

En general, $\dfrac{A}{D^2} = k_1$. ¿Existe alguna conexión entre las constantes $k$ (uni-dimensional) y la constante $k_1$ (bi-dimensional)? Parece que Euclides no encontró tal conexión. En el libro citado, Arquímedes probó la fórmula para encontrar el área circular en función de $\pi$, estableciendo un puente crítico entre la circunferencia y el área del círculo. En esta dirección veamos algunas ideas preliminares. Consideremos un polígono regular con centro $O$, perímetro $P$ y apotema $a$. Se tiene el

**Teorema 1.** *El área de un poligono regular es* $\dfrac{1}{2}\,aP$.

**Prueba.**

Supongamos que el polígono tuviera $n$ lados, cada uno de longitud $b$.




Uniendo el centro $O$ con los vértices se obtiene $n$ triángulos congruentes, con base $b$ y altura $a$. Luego, si $A$ es el área del polígono regular, se tiene ($n$ veces)

$$A = \frac{1}{2}\, ba + ... + \frac{1}{2}\, ba = \frac{1}{2}\, a\,(b + ... + b) = \frac{1}{2}\, aP.$$

■

Ahora, la idea esencial es que este proceso puede ser continuado indefinidamente; acá está la esencia del conocido método del "agotamiento" de Eudoxo.

**Método del Agotamiento de Eudoxo.**

En la Antigua Grecia se calculaban áreas, volúmenes y longitudes de arcos; ellos fueron, en algún sentido, los pioneros del cálculo integral. En esta dirección el método del agotamiento o "**exhaustación**" de **Eudoxo** (408 - 355 A.C.) fue vital para obtener resultados en tales cálculos.

**Proposición [E].** ≪ *Si de cualquier magnitud se substrae una parte no menor que su mitad, y de esta diferencia se substrae otra parte no menor que su mitad, y si asi continuamos habrá una magnitud restante que será menor que cualquier magnitud preasignada* ≫ .

En esta dirección se tiene el

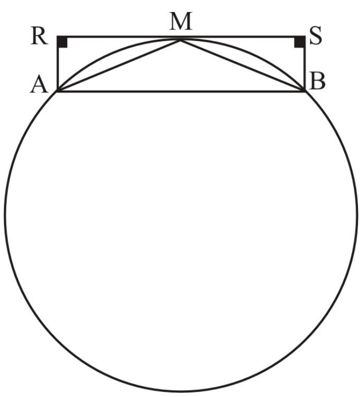
**Lema 1.** *La diferencia en área entre un círculo y un polígono regular inscrito puede ser hecho tan pequeño como se desee.*

**Prueba.**

Sea $\overline{AB}$ un lado de un polígono regular inscrito y $M$ el punto medio del arco $AB$. Se tiene

$$\text{área } \triangle AMB = \frac{1}{2}\ \text{área} \square ABSR.$$

Entonces se obtendrá, duplicando el número de lados del polígono, que el área del polígono se incrementará en mas de la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el polígono.




Luego, continuando duplicando el número de lados con la frecuencia deseada, podemos hacer la diferencia en áreas del círculo y del polígono tan pequeño como se desee.

∎

Apliquemos el lema a otro enfoque de la Proposición XII.2. que enunciamos en la forma: "Si $A_1$ y $A_2$ son las áreas de dos círculos que tienen diámetros $D_1$ y $D_2$, entonces

$$A_1 : A_2 = D_1^2 : D_2^2 \text{''}.$$

**Prueba.** Supongamos que tuviéramos $A_1 : A_2 > D_1^2 : D_2^2$. Entonces podemos inscribir en la primera circunferencia un polígono regular cuya área $P_1$ difiere de $A_1$ en una pequeña magnitud tal que $P_1 : A_2 > D_1^2 : D_2^2$. Inscribamos en la segunda circunferencia un polígono regular, similar al anterior polígono, y sea $P_2$ el área del círculo asociado. Entonces, (se sabe para polígonos regulares similares) $P_1 : P_2 = D_1^2 : D_2^2$.

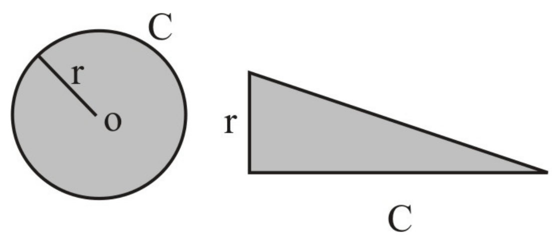
Entonces se tendrá $P_1 : A_2 > P_1 : P_2$, esto es, $P_2 > A_2$, lo que es absurdo.

De un modo similar, $A_1 : A_2 < D_1^2 : D_2^2$ nos llevaría a una contradicción.

**Conclusión:** $A_1 : A_2 = D_1^2 : D_2^2$. De este modo, en general, $A = kD^2$, donde $k = \dfrac{1}{4}\,\pi$.

∎

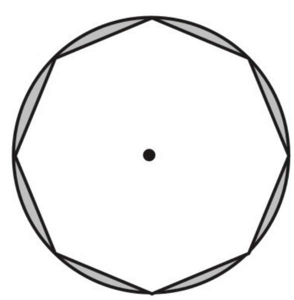
**Área del Círculo.** $A = \pi r^2$.




$A =$ área del circulo $\quad T =$ área del triángulo

**Proposición 1.** *El área de cualquier círculo es igual al área del triángulo rectángulo en el cual uno de los lados que forma el ángulo recto es igual al radio y el otro es la circunferencia, asociada al círculo.*
**Prueba.** Arquímedes comienza con un círculo con centro $O$, radio $r$ y circunferencia $C$; y con un triángulo rectángulo teniendo como base la longitud de $C$ y altura de longitud $r$.
**Objetivo:** probar que $A = T$.
**En efecto**, Arquímedes ya conocía que $T = \dfrac{1}{2}\, rC$ y por reducción al absurdo supone que $A > T$.

Entonces, $A - T$ es alguna cantidad positiva; Arquímedes conocía que inscribiendo un cuadrado en su círculo y repitiendo vía bisección de sus lados, él podía llegar a un polígono regular inscrito en el círculo cuya área difiere del área del círculo es una magnitud menor que el número positivo $A - T$. Esto es, $A-$ área del polígono inscrito $< A - T$. Luego, $T <$ área del polígono inscrito.

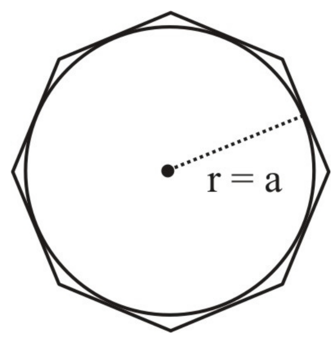


Ahora se observa (ver figura) que el perímetro $P$ del polígono es menor que $C$, y que $a < r$ ($a$ apotema). Luego, área del polígono inscrito $= \dfrac{1}{2}\, aP < \dfrac{1}{2}\, rC = T$.

De esta manera Arquímedes llega a una contradicción pues arribó a:
$T <$ área del polígono inscrito y $T >$ área del polígono inscrito.
De esta manera $A > T$ no es posible.

Supongamos ahora que $A < T$.

De esta manera, Arquímedes asume que podemos considerar $T - A$ como el exceso del área del triángulo sobre la del círculo. Por otro lado, se sabe que se puede circunscribir un polígono regular tal que el área del "polígono menos círculo" sea menor que $T - A$.




De esta manera, área del polígono circunscrito $-A < T - A$.

Luego, área del polígono circunscrito $< T$. **Pero**, $r = a$ y $P > C$; entonces, área del polígono circunscrito $= \dfrac{1}{2}\, aP > \dfrac{1}{2}\, rC = T$.

De esta manera se llega a una contradicción.

**Conclusión.** $A = T$.

$\blacksquare$

**Observación.** $A = \dfrac{1}{2}\, rC = \dfrac{1}{2}\, r2\pi r = \pi r^2$.

Por razones didácticas veamos el caso de un polígono de **16 lados** inscrito en una circunferencia de radio 1. ¿Cuánto valdrá $\pi$ en este caso?

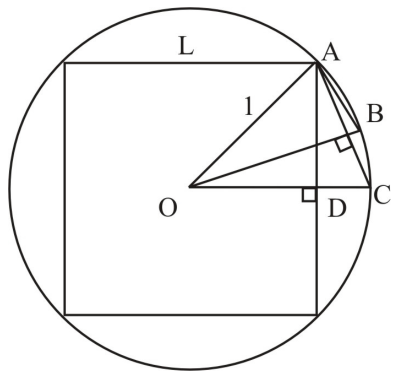
**Solución.**

Usando reiteradamente el teorema de Pitágoras, la figura nos lleva a $AC = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Por tanto, si $n = 8$ tendremos

$$\pi = \frac{C}{D} \simeq \frac{\text{perímetro}}{D} = \frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Esto es, $\pi \simeq 3{,}061467...$




Veamos el caso $n = 16$. Ahora el lado del polígono es $\overline{AB}$. Nuevamente por Pitágoras se tiene que

$$AB = \sqrt{2 - \sqrt{4 - AC^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

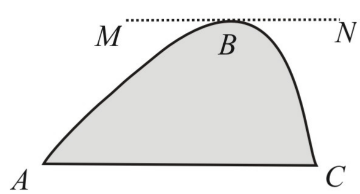
Entonces,

$$\pi \simeq \frac{\text{perímetro}}{D} = \frac{16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \simeq 3{,}121445...$$

Para $n = 36$ se calcula $\pi \simeq 3{,}136548...$, y para $n = 64$ se tiene $\pi \simeq 3{,}140331...$ .

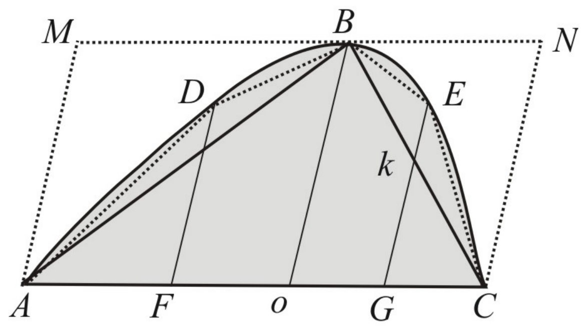
### 2.2.4. La Cuadratura de la Parábola.

**Problema.** Encontrar el área de un segmento parabólico oblícuo $ABC$, cortado por la cuerda $AC$, donde la tangente en $B$ es paralela a $AC$.




**Solución.** Por hipótesis: $MBN//AC$.

**Plan:** construir una sucesión de figuras "agotadoras" $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ .




Por construcción, $A_1 = \triangle ABC$.
$A_2$ es construido vía:

$$A_2 = \triangle ABC + \triangle ADB + \triangle BCE$$

¿Cómo se construyen $\triangle ADB$ y $\triangle BCE$ ? ...
Se divide $AC$ en 4 partes iguales y se trazan $FD//OB$ y $GE//OB$.
Análogamente se construyen $A_3,\ A_4,\ \dots,\ A_n$.

**Lema 2.** *Se tiene*

$$|\triangle ABC| = 4\left(|\triangle ADB| + |\triangle BEC|\right),$$

*donde, en general, $|\triangle ABC|$ significa "área del $\triangle ABC$".*
**Prueba.**

Tomemos $OB$ y $MN$ respectivamente como los ejes $x$ e $y$ de un sistema oblícuo de coordenadas. Las coordenadas del punto $E\left(\xi, \frac{1}{2}\,y\right)$ satisfacen la condición $\left(\frac{1}{2}\,y\right)^2 = m\xi$, de donde

$$\xi = \frac{y^2}{4m} \quad , \qquad GE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4m} = \frac{3}{4}\frac{y^2}{m} = \frac{3}{4}\,x = \frac{3}{4}\,OB.$$

Desde que $GK = \frac{1}{2}\,OB$, tenemos

$$KE = \frac{1}{4}\,OB \qquad \text{y} \qquad GK = 2\,KE.$$

Luego podemos comparar las áreas de tales triángulos

$$|\triangle CKG| = 2\,|\triangle KCE| = |\triangle BCE| \ ,$$

$$|\triangle OBC| = 4\,|\triangle GKC| = 4\,|\triangle BCE|\,.$$

En forma análoga se obtiene la relación:

$$|\triangle AOB| = 4\,|\triangle ABD|\,.$$

Por lo tanto,

$$|\triangle OBC| + |\triangle AOB| = 4\left(|\triangle BCE| + |\triangle ABD|\right),$$

lo que prueba el lema.

■

Por otro lado, si $|A_1| = |\triangle|$, entonces

$$|A_2| = |\triangle| + \frac{1}{4}\,|\triangle|$$

$$|A_3| = |\triangle| + \frac{1}{4}\,|\triangle| + \left(\frac{1}{4}\right)^2 |\triangle|$$

...............................

$$|A_n| = |\triangle| + \frac{1}{4}\,|\triangle| + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |\triangle|\,.$$

**Lema 3.** *La sucesión* $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ *"agota" (realmente) el segmento parabólico, esto es, se tiene:*

$$S - |A_n| < \varepsilon$$

*donde* $n = n(\varepsilon)$ *y* $S$ *denota el área del segmento parabólico oblícuo* $ABC$.

**Prueba.**

Circunscribamos el paralelogramo $AMNC$, en el cual $AM//NC//BO$. Tenemos $|A_1| = \dfrac{1}{2}\, S_{AMNC}$ donde $S_{AMNC}$ denota el área del paralelogramo $AMNC$.

Pero $S < S_{AMNC}$, luego $|A_1| > \dfrac{1}{2}\, S$ y $S - |A_1| < \dfrac{1}{2}\, S$.

Asi, el triángulo $A_1$ "agotó" mas de la mitad del área $S$ y las figuras siguientes agotarán mas de la mitad de los correspondientes restos del área $S$.

Por lo tanto se satisface el

**Lema 4. Lema Fundamental del Método de Exhaustación.**

*"Si de una magnitud dada se quita una parte mayor que su mitad, luego se vuelve a substraer una y otra vez,* ***entonces*** *el resto puede hacerse tan pequeño como se quiera".*

Ahora buscamos el "límite" de la sucesión de las figuras inscritas.

Arquímedes usa el siguiente

**Teorema 2.** *Sea*

$$S = |A| + |B| + |C| + |D| + |E|$$

*tal que*

$$|A| : |B| = |B| : |C| = |C| : |D| = |D| : |E| = 4 : 1.$$

*Entonces* $S = \frac{4}{3}\ |A| - \frac{1}{3}\ |E|$ .

**Prueba.**

Por hipótesis, $|B| = \frac{1}{4}\ |A|$, $|C| = \frac{1}{4}\ |B|$, $|D| = \frac{1}{4}\ |C|$ y $|E| = \frac{1}{4}\ |D|$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\,S &= \frac{4}{3}\,(|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) \\ &= \frac{4}{3}\ |A| + \frac{4}{3}\,(|B| + |C| + |D| + |E|) \\ &= \frac{4}{3}\ |A| + \frac{1}{3}\,(|A| + |B| + |C| + |D|) \\ &= \frac{4}{3}\ |A| + \frac{1}{3}\,(|A| + |B| + |C| + |D| + |E|) - \frac{1}{3}\ |E|, \end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{4}{3}\,S = \frac{4}{3}\ |A| + \frac{1}{3}\,S - \frac{1}{3}\ |E|.$$

Asi, $S = \frac{4}{3}\ |A| - \frac{1}{3}\ |E|$

■

**Nota.** El teorema puede ser extendido a cualquier número de sumandos.

Usando el teorema, Arquímedes llega a la igualdad:

$$|A_n| = |\triangle| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k}\,|\triangle| = \frac{4}{3}\;|\triangle| - \frac{1}{3}\;\frac{|\triangle|}{4^{n-1}}\;.$$

Como el substraendo puede ser hecho tan pequeño como se quiera, Arquímedes afirma que $S = \dfrac{4}{3}\;|\triangle|\,.$

**Conclusión.** $S = \dfrac{4}{3}\;|\triangle ABC|$, que es la respuesta al problema planteado. ■

**Comentario.** El método de exhaustación fue uno de los métodos mas difundidos en la matemática antigua; fue muy utilizada por Arquímedes. Euclides lo incluyó en los "**Elementos**". Históricamente es la primera forma del método de límites.

### 2.2.5. Sobre la Esfera y el Cilindro.

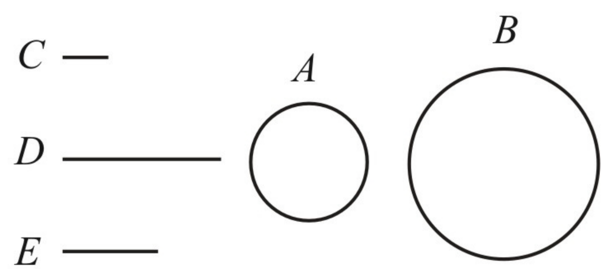
Hemos mencionado que Arquímedes había dispuesto que sobre su tumba se tallara una representación de una esfera inscrita en un cilindro circular recto de altura igual al diámetro de la esfera. ¿Porqué? ..., no es posible responder a esta cuestión pues fue una decisión personal pero posiblemente se debió a que Arquímedes encontró una hermosa relación entre el volumen del cilindro con la de la esfera; la razón es de tres a dos. Se afirma que fué Arquímedes el primer matemático en descubrir y demostrar que el área de la esfera es igual a cuatro veces el área de un círculo máximo de tal esfera. Asi mismo demostró que la superficie de un segmento esférico es igual a un círculo cuyo radio es el segmento trazado desde el vértice del segmento esférico a un punto cualquiera de la circunferencia base de tal segmento esférico; equivalentemente, “el área de cualquier segmento esférico es igual a la de un cilindro cuyo radio es el de la esfera y cuya altura es la misma que la del segmento”.

El tratado “Sobre la esfera y el cilindro” fue escrito en dos libros, I y II; como hemos visto, Arquímedes investiga importantes resultados sobre la esfera, el cilindro y el círculo. En el Libro I comienza con algunas definiciones; luego siguen cinco postulados (por ejemplo: “de todas las líneas las cuales tienen los mismos extremos, la línea recta es la menor”). El $5^{\text{to}}$ postulado es el famoso “axioma de Arquímedes” el cual es equivalente a la Definición 4 del Libro V de Euclides.

Arquímedes usa el método de exhaustación o del agotamiento en el cálculo de ciertas áreas y volúmenes; la idea es inscribir y circunscribir figuras que delimiten a la figura curvilínea que ha de ser medida. Ver 2.2.3. Veamos ahora como Arquímedes encuentra la **superficie de un cono recto** (Proposición 14).

Sea $A$ la base del cono, $C$ una línea recta igual a su radio; $D$ es una línea igual al generador del cono, y $E$ es la media proporcional de $C$ y $D$. $B$ es un círculo con radio $E$.

Arquímedes prueba que: $\ll$ **la superficie del cono es igual a la del círculo cuyo radio es la media proporcional entre el generador del cono y el radio de la base** $\gg$ .




Si $S$ es la superficie del cono, entonces se debe probar que $S = B$.

(Remarcamos que $B$ expresa, también, el área del círculo de radio $E$).

El argumento usado por Arquímedes fue: supongamos que $S \neq B$. Entonces discute los casos $B < S$ y $S < B$.

**Caso** $B < S$**.** Arquímedes circunscribe un polígono regular a $B$ e inscribe un polígono similar en $B$ tal que la razón del primer polígono al segundo es menor que $\frac{S}{B}$. Este resultado es su Proposición 5. Ahora describe alrededor de $A$ un polígono similar y construye a partir de esto una pirámide que circunscribe al cono. Entonces se tiene

$$\frac{\text{polígono alrededor de } A}{\text{polígono alrededor de } B} = \frac{C^2}{B^2} = \frac{C}{D} = \frac{\text{polígono alrededor de } A}{\text{superficie de la pirámide}} \ .$$

Luego,

$$\text{superficie de la pirámide} = \text{polígono alrededor de } B \ .$$

Por otro lado sabemos que $\dfrac{\text{polígono alrededor de } B}{\text{polígono en } B} < \dfrac{S}{B}$. Luego,

$$\frac{\text{superficie de la pirámide}}{\text{polígono en } B} < \frac{S}{B} \ .$$

Pero esto **no** es posible ya que

$$\text{superficie de la pirámide} > S \qquad \text{y} \qquad \text{polígono en } B < B \ .$$

**Conclusión:** $B$ **no** es menor que $S$.

**Caso** $B > S$**.** Nuevamente, Arquímedes circunscribe e inscribe polígonos regulares similares en $B$ tal que la razón del primer al segundo es menor que $\frac{B}{S}$. Luego inscribe en $A$ un polígono similar y construye sobre $A$ una pirámide inscrita. Entonces se tiene,

$$\frac{\text{polígono en } A}{\text{polígono en } B} = \frac{C^2}{E^2} = \frac{C}{D} > \frac{\text{polígono en } A}{\text{superficie de la pirámide}} \ ,$$

(la desigualdad es debido a que la razón $\frac{C}{D}$ es mayor que la razón de las perpendiculares desde el centro de $A$ y desde el vértice de la pirámide, respectivamente, sobre cualquier lado del polígono en $A$).

Por lo tanto,

$$\text{superficie de la pirámide} > \text{polígono en } B \ .$$

Pero, se tiene también $\dfrac{\text{polígono alrededor de } B}{\text{polígono en } B} < \dfrac{B}{S}$, y por lo tanto, "a fortiori", $\dfrac{\text{polígono alrededor de } B}{\text{superficie de la pirámide}} < \dfrac{B}{S}$.

Esto **no** es posible ya que:

$$\text{polígono alrededor de } B > B \qquad \text{y} \qquad \text{superficie de la pirámide} < S \;\; .$$

Por lo tanto, $B$ **no** es mayor que $S$.

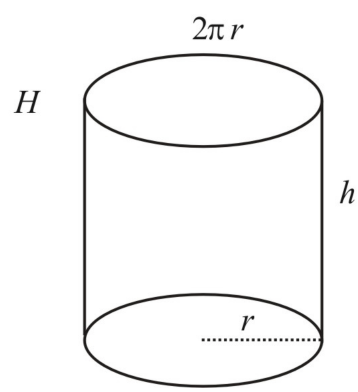
**Conclusión final:** $S = B$.

**Nota.** Remarcamos que cuando se dice: "la superficie" se debe entender por "el área de la superficie".

Como hemos manifestado, Arquímedes trabajó con la geometría del espacio, con sólidos geométricos en el espacio tridimensional, obteniendo resultados maravillosos con tales sólidos, en particular con la esfera y el cilindro.

- **Área de la Superficie Lateral de un Cilindro (recto).**

  Dado un cilindro $H$, lo cortamos verticalmente y lo extendemos sobre un plano. Al hacer esto se obtiene un rectángulo con lados $2\pi r$ y $h$.

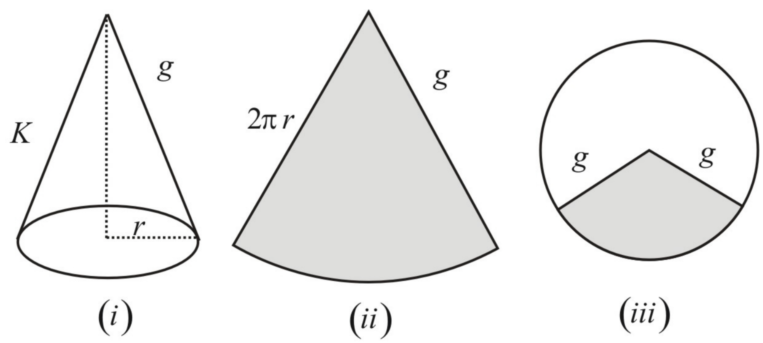



  Luego, área de la superficie lateral de $H = (2\pi r)\, h = 2\pi r h$.

$\blacksquare$

- **Área de la Superficie Lateral de un Cono (recto).**

Sea $K$ un cono cuyo círculo base tiene radio $r$, y sea $g$ su generatriz. Esta vez




se corta al cono desde un punto de la circunferencia del círculo base hacia el vértice. Desenrrollamos la figura y la aplanamos, obteniéndose un sector circular como se muestra en la figura (ii). La idea ahora es considerar este sector como una parte del círculo de radio $g$. Arquímedes conocía la siguiente relación:

$$\frac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}} = \frac{\text{longitud del arco del sector}}{\text{circunferencia del círculo}} .$$

Observemos que el área del círculo es $\pi g^2$, y su circunferencia tiene longitud $2\pi g$; además, la longitud del arco del sector es igual a $2\pi r$. Luego, de tal relación se obtiene,

$$\frac{\text{área del sector}}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g} = \frac{r}{g} .$$

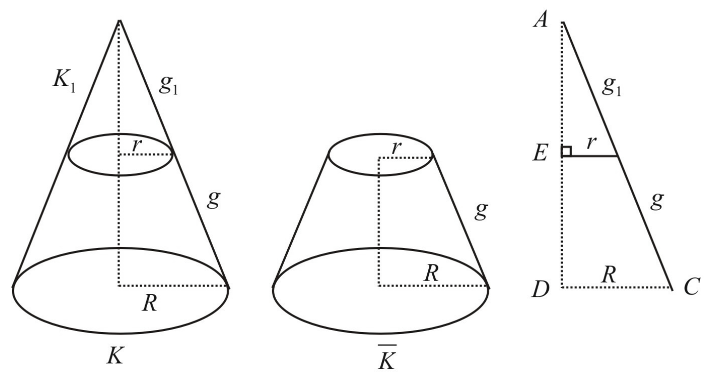
Por lo tanto, área del sector $= \dfrac{r}{g}\,(\pi g^2) = \pi r g$.

**Conclusión:** área de la superficie lateral del cono $= \pi r g$.

■

- **Área de la Superficie Lateral del Tronco de Cono.**

En su estudio de la esfera, Arquímedes necesitó conocer a la superficie lateral del tronco de cono (recto). Como sabemos un tronco de cono se obtiene cuando un cono es cortado por un plano paralelo a la base y se retira la parte superior (un cono mas pequeño).




Sea el tronco de cono $\overline{K}$, el que proviene del cono $K$, cuyos elementos se muestran en las figuras adjuntas. Tenemos,

área de la superficie lateral del tronco de cono =

$$\Big(\text{ área superficie lateral del cono } K\ \Big) - \Big(\text{ área superficie lateral del cono } K_1\ \Big)$$

$$= \pi R\,(g + g_1) - \pi r g_1 = \pi\,(Rg + (Rg_1 - rg_1))\,.$$

Ahora observemos a los triángulos rectángulos semejantes $AEF$ y $ADC$. Se tiene, $\dfrac{g_1}{g+g_1} = \dfrac{r}{g}$, es decir, $Rg_1 - rg_1 = rg$. Por tanto,

$$\text{área de la superficie lateral del tronco de cono} = \pi\,(Rg + rg) = \pi g\,(R + r)\ .$$

■

- **Área de la Superficie de la Esfera.**

El cálculo del área de la superficie de una esfera fue un difícil reto al genio de Arquímedes. Es asombrosa la metodología que siguió para lograr su objetivo, pues en vez de considerar a la esfera tridimensional comienza analizando a una “tajada” infinitesimal, es decir, estudia al círculo bidimensional. Miremos con atención a la

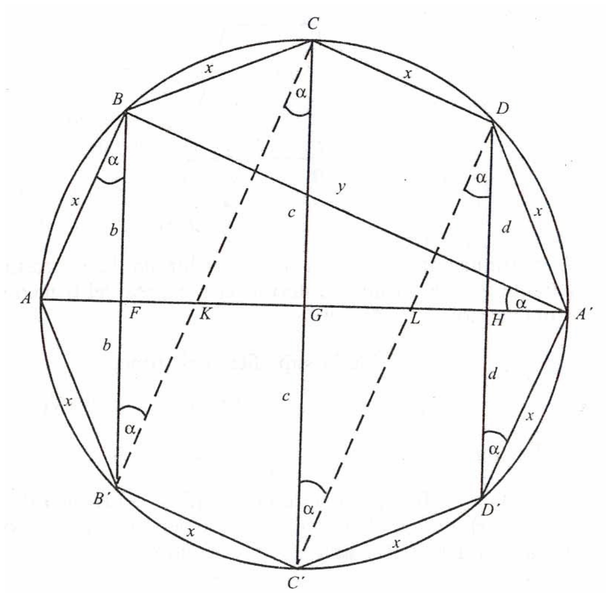



Figura A.1

figura A.1 adjunta. Se considera un círculo de radio $r$ y diámetro $AA'$, en donde se inscribe un polígono regular con un número par de lados (en el caso de la figura consideramos a un octógono regular); cada lado mide $x$. El siguiente argumento es válido para cualquier número par de lados. Entonces sea el octógono $ABCDA'D'C'B'$.

Arquímedes traza las líneas verticales $BB'$, $CC'$ y $DD'$ las que cortan al diámetro $AA'$ en los puntos $F$, $G$ y $H$ respectivamente. Además considera las líneas punteadas $B'C$ y $C'D$ que cortan a tal diámetro en $K$ y $L$. Además traza la línea $A'B$ (¿para qué?). De esta manera se obtiene un panorama algo complicado de muchas figuras geométricas. ¿Qué hacer ahora?. ¿qué hizo Arquímedes? ...

¿Cuál será el papel de la línea $A'B$, cuya longitud es $y$?

**Nota.** En primer lugar observo que $BF = FB'$, $CG = GC'$ y $DH = HD'$, que llamó $b$, $c$ y $d$ a las longitudes respectivas ($BF = b$, ...). Ahora él apela a un resultado que está en el Libro III de los Elementos de Euclides: "los ángulos en los círculos que intersectan arcos iguales, son iguales entre si".

Luego, desde que el polígono es regular, se tendrá

$$\measuredangle BA'A = \measuredangle ABB' = \measuredangle BB'C = \ \ldots ,$$

ángulos que se denotan con $\alpha$.

Por otro lado, Arquímedes observa que los triángulos $\triangle ABA'$ y $\triangle AFB$ son semejantes (ambos comparten el $\measuredangle BAA'$ y ambos tienen un ángulo que mide $\alpha$).

Luego, por Tales, se tiene:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AB}{A'B} \qquad \text{ó} \qquad \frac{AF}{b} = \frac{x}{y} \ .$$

Por lo tanto,

$$xb = y\,(AF) \tag{i}$$

Similarmente, el $\triangle AFB$ es semejante al $\triangle KFB'$ (ambos contienen un ángulo que vale $\alpha$, y $\measuredangle AFB = \measuredangle KFB'$). Entonces,

$$\frac{FK}{B'F} = \frac{AF}{BF} \qquad \text{ó} \qquad \frac{FK}{b} = \frac{AF}{b} = \frac{x}{y} \ .$$

Luego,

$$xb = y\,(FK) \tag{ii}$$

Continuando se observa que el $\triangle KFB'$ es semejante al $\triangle KGC$ (¿porqué? ...)

Luego,

$$\frac{KG}{CG} = \frac{FK}{B'F} \qquad \text{ó} \qquad \frac{KG}{c} = \frac{FK}{b} = \frac{x}{y} \tag{iii}$$

Continuando con el resto de triángulos semejantes, se obtienen las siguientes relaciones:

$$xc = y\,(GL) \tag{iv}$$

$$xd = y\,(LH) \tag{v}$$

$$xd = y\,(HA') \tag{vi}$$

Ahora Arquímedes suma: (i)+(ii)+...+(vi) para obtener

$$xb+xb+xc+xc+xd+xd = y\,(AF + FK + KG + GL + LH + HA')\,,$$

esto es,

$$x\,(2b + 2c + 2d) = y\,(AA') = 2ry. \qquad (+)$$

Y ahora, ¿cuál será la estrategia de Arquímedes?, ¿cómo usar (+)? El gran geómetra siracusano considera una esfera, la que es obtenida haciendo girar (gran idea!) la figura A.1 alrededor del eje horizontal $AA'$. Ya Euclides decía que en este caso se obtiene una esfera y el polígono de revolución genera un sólido que consiste en una serie de troncos de conos (cuyas áreas de sus superficies laterales ya conocía Arquímedes) y con dos conos pegados en los extremos. Ver Figura A.2. Se observa que la generatriz de cada cono y de cada tronco de cono es $x$. Ahora estamos en condiciones de cálcular el área de la superficie de este sólido. Bien, veamos al cono de la izquierda: $b$ es el radio de la base, $x$ es la generatriz, luego el área de la superficie (lateral) de ese cono es $\pi x b$. Continuando, el tronco de cono de la izquierda tiene generatriz $x$, $b$ como radio superior, $c$ como radio inferior; luego, el área de su superficie (lateral) es $\pi x\,(b + c)$. El tronco de cono de la derecha es tal que el área de su superficie (lateral) es igual a $\pi x\,(c + d)$, y

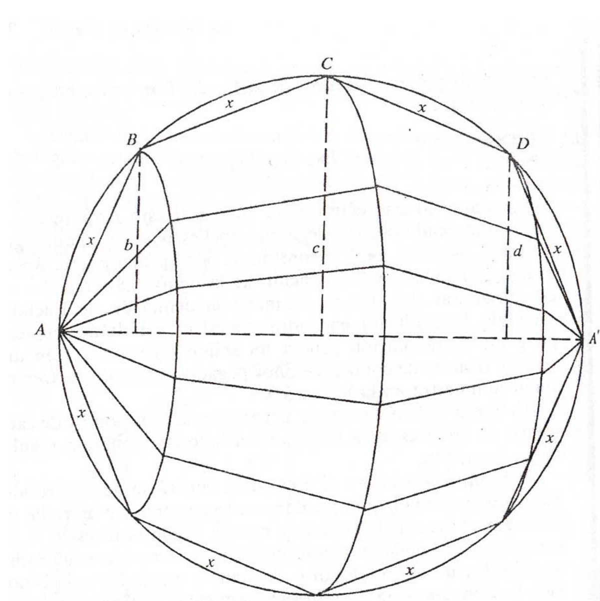



Figura A.2

el cono de la derecha tiene una superficie de área (lateral) igual a $\pi x d$.

**Conclusión:**

$$\textbf{área de la superficie del sólido inscrito} = \pi x b + \pi x\,(b+c) + \pi x\,(c+d) + \pi x d = \pi x\,(2b+2c+2d)\,.$$

Observemos que en esta fórmula está (+)!, y por tanto se tiene:

$$\textbf{área de la superficie del sólido inscrito} = \pi\,(2ry)\,.$$

Observemos que en esta interesante fórmula aparece $y$, la longitud de la enigmática línea $A'B$. También esa fórmula nos sugiere porqué Arquímedes impuso la condición de que el polígono regular tenga un número par de lados, pues asi cada radio $b$, $c$ y $d$ es compartido por dos sólidos.

Ahora, ¿cómo obtener el área de la superficie de la esfera? Posiblemente el lector ya intuído el paso siguiente; esto ayudado por la idea de límite que ahora disponemos, pero que en el tiempo de Arquímedes no existía (al menos formalmente!). Acá entró a trabajar la gran intuición de este notable geómetra. Es natural sentir que el área de la superficie del sólido (del octógono en este caso) es una **aproximación** del área de la superficie de la esfera, y también, es un **sentimiento confiable** creer que si el número de lados (par) del polígono regular aumenta en número, entonces tal área va aproximándose al área deseada. Esto fue la etapa cruccial en el argumento de Arquímedes.

Con los argumentos actuales se puede escribir:

$$\begin{aligned} \text{área de la superficie de la esfera} &= \text{lím}\ \ (\text{área de las superficies de} \\ &\qquad\qquad \text{los sólidos inscritos}) \\ &= \text{lím}\,\pi\,(2ry)\,. \end{aligned}$$

**Nota.** Enfatizamos que el límite es tomado cuando el número de lados del polígono crece y crece.

Ahora, otra vez apelamos a los "sentimientos matemáticos": viendo la Figura A.2 se observa que

$$\text{lím}\,y = \text{lím}\,A'B = A'A = 2r.$$

Así, Arquímedes llega a la bella fórmula:

$$\textbf{área de la superficie de la esfera} = \text{lím}\,\pi\,(2ry) = \pi 2r\,\text{lím}\,y = 4\pi r^2.$$

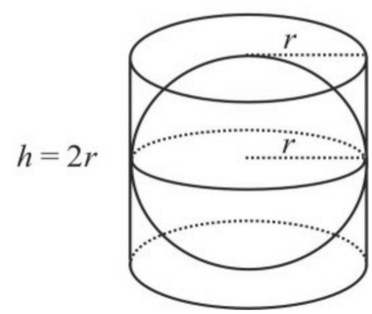
■

En [HEA], el lector puede encontrar un amplio material sobre Arquímedes; el Prof. T. Heath fue un gran investigador sobre los trabajos del genial matemático griego. Nosotros hemos seguido, también, a [DUN. 2]. Es claro que la prueba dada trata de conservar el pensamiento de Arquímedes pero como hemos visto se han usado argumentos y notaciones que en su época no existían. Arquímedes expresó su resultado diciendo: ≪La superficie de cualquier esfera es cuatro veces el círculo máximo de ella≫, algo que ya hemos mencionado (4.(a).2.2.2).

- **Esfera Inscrita en un Cilindro.**

Arquímedes prueba el siguiente bello resultado, el gran teorema sobre la esfera y el cilindro:

≪ **Cualquier cilindro que tiene su base igual al círculo máximo de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es la mitad de grande más que la superficie de la esfera** ≫ .




¿Cuál es la interpretación de "la mitad de grande más"?

Para Arquímedes esto significaba:

$$\text{" superficie del cilindro} \quad = \quad \text{superficie de la esfera} + \frac{1}{2}\,\text{(superficie de la esfera). "}$$

Observemos que ya se ha probado:

$$\text{" área de la superficie del cilindro} = 2\pi r h \text{ ".}$$

Luego, en este caso en que la esfera está inscrita en el cilindro y que se tiene $h = 2r$, el área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi r\,(2r) = 4\pi r^2$, que es el área de la superficie de la esfera.

En este caso se debe enfatizar que Arquímedes cuando habla del área del cilindro, él está incluyendo ahora a la parte superior y a la inferior. De esta manera se tiene,

$$\begin{aligned} \text{superficie total del cilindro} &= \text{superficie lateral} + \text{superficie parte superior} \\ &\quad + \text{superficie parte inferior} \\ &= 4\pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2 = 6\pi r^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tesis del teorema de Arquímedes:

$$\text{superficie total del cilindro} = \text{mitad mas que la superficie de la esfera,}$$

toma la forma: $6\pi r^2 = E + \dfrac{1}{2}\, E$, donde $E$ representa el área de la superficie de la esfera. Luego, $12\pi r^2 = 2E + E = 3E$, esto es, $E = 4\pi r^2$, algo que sabemos es cierto. De esta manera se tiene verificado al teorema de Arquímedes.

$\blacksquare$

- ¿Qué se puede afirmar respecto a los **volúmenes**?

  Seguimos con el caso de una esfera inscrita en un cilindro. Se sabía que el volumen de un cilindro, en general, es $\pi r^2 h$. Asi, en tal caso se tendrá,

  $$\text{volumen del cilindro} = \pi r^2\,(2r) = 2\pi r^3 \qquad (+)$$

  Arquímedes conocía su **Proposición 34:** $\ll$ cualquier esfera es igual a cuatro veces el cono, el cual tiene como base al mas grande círculo en la esfera y su altura es igual al radio de la esfera $\gg$ .

  Arquímedes conocía también que: "volumen del cono $= \dfrac{1}{3}\,\pi r^2 h$", y en el caso de la Proposición 34 se tiene: "volumen del cono $= \dfrac{1}{3}\,\pi r^3$"

  Por tanto la proposición 34 nos dice:

  $$\text{volumen de la esfera} = 4(\text{volumen del cono}) = \frac{4}{3}\,\pi r^3.$$

  Regresando a la fórmula (+) se tiene,

  $$\text{volumen del cilindro} = 2\pi r^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\,\pi r^3\right).$$

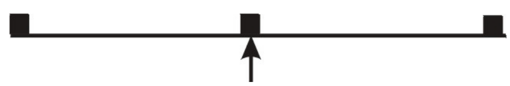
**Conclusión:** $\ll$ volumen del cilindro $= \dfrac{3}{2}$ (volumen de la esfera) $\gg$ .

Es decir, nuevamente: "volumen del cilindro =volumen de la esfera $+\dfrac{1}{2}$ (volumen de la esfera)". En otras palabras, el volumen del cilindro es la "mitad de grande mas" que el volumen de la esfera. Un bello resultado.

■

### 2.2.6. Comentarios Generales de Otras Contribuciones.

- Antes de Arquímedes ya se había usado la palanca y aún la ley de la palanca en diversas aplicaciones, tal como Aristóteles lo indica en algunas de sus obras. Arquímedes estudia la ley de la palanca dentro de su propia visión. Afirma que si tuviéramos una barra sin peso, de longitud cuatro unidades y que soporta tres unidades de peso, una en cada extremo y la tercera se coloca en el centro, entonces el sistema está en un estado de equilibrio.



  Arquímedes hace toda una discusión sobre algunas variantes de la ubicación de los pesos, obteniendo algunas interesantes observaciones. Estos estudios forman parte de sus dos libros "**Sobre el equilibrio de los planos**", una obra de física en que usa fuertemente argumentos matemáticos. Arquímedes, al estilo de "Los Elementos" de Euclides, parte de un conjunto de postulados y luego va construyendo una serie de resultados bastantes elaborados. Calcula el centro de gravedad de diversas figuras geométricas (de un segmento parabólico, por ejemplo).

  Arquímedes fue un verdadero físico - matemático de un altísimo nivel científico. Además de la obra citada, escribió "**Sobre los cuerpos flotantes**". A partir de un postulado sobre la naturaleza de la presión de un líquido, obtiene resultados de gran profundidad, como es su "principio hidrostático". Apoyándose en el hecho de que la Tierra es redonda y que su centro de gravedad está en su centro, Arquímedes prueba que la superficie de un fluido en equilibrio debe ser esférica. Estudiando la presión de un fluido sobre los cuerpos inmersos, obtiene la posición de equilibrio de los cuerpos flotantes. Muchos siglos después, Lagrange en su "Mecánica Analítica" (1811) considera a la "Mecánica de los fluidos" como uno de los mas bellos monumentos del genio de Arquímedes. Debemos resaltar que estos estudios, sobre problemas del mundo físico, fueron hechos por el Maestro griego utilizando un gran rigor matemático, de gran valor científico. En estas investigaciones, Arquímedes puso el germen de algunas ideas sobre trigonometría, sobre geometría analítica y sobre rudimentos de álgebra. Es decir, fue un notable precursor de teorías matemáticas centrales, las que serían decisivas en el posterior progreso de la matemática.

- En su estudio sobre la esfera y el cilindro, Arquímedes llega a resultados en donde aparecen ecuaciones de primer y segundo grado, lo que resolvió vía el álgebra geométrica y con la teoría de la semejanza. Pero, en el problema: "**dividir una esfera por un plano en dos segmentos que tengan entre sí una relación dada**", surge una ecuación de tercer grado,

$$x^3 - 3R^2x + 2R^3\left(\frac{n-m}{n+m}\right) = 0,$$

donde $x$ es la distancia del centro (de la esfera) a la base común de los dos segmentos, $R$ es radio de la esfera y $\frac{m}{n}$ es la relación dada de los dos segmentos. La citada ecuación cúbica no pudo ser resuelta usando solo regla y compás. La dificultad de resolver tal ecuación fue un reto para Arquímedes quién prometió dedicarse a su estudio posteriormente.

El problema de la división de la esfera es del tipo de problemas sobre sólidos geométricos cuyas soluciones dependían de ecuaciones de tercer grado. En esta dirección están los problemas sobre "secciones cónicas". Arquímedes estudia también el problema de determinar segmentos de elipsoides y de hiperboloides cuando se conoce el volumen. Este tipo de problemas los estudia en su escrito: "**Sobre los conoides y los esferoides**" (6). Según Arquímedes, un **conoide** es un sólido generado por la revolución de una parábola alrededor de su eje, o aquel sólido generado por la rotación de una de las ramas de una hipérbola alrededor de su eje trasverso. Un **esferoide alargado** es un sólido descrito por una elipse girando en torno de su eje mayor; un **esferoide achatado** se produce cuando la elipse gira en torno de su eje menor.

Es digno resaltar que en estos trabajos, el gran Arquímedes establece métodos muy cercanos a la idea de "**integración**", la que ha de formalizarse muchos siglos después. Debe resaltarse que las "integraciones" hechas por Arquímedes fueron realizadas sin tenerse el "algoritmo infinitesimal". Posiblemente si Arquímedes hubiera tenido mas claro la idea de la "infinitamente pequeño" (¿cuál fue el contenido de las obras de Arquímedes que se perdieron?), el cálculo integral hubiera nacido en Grecia en el siglo III A.C. y ¿qué rumbo hubiera tenido la matemática? ... Estos trabajos de Arquímedes fueron la motivación que tuvieron Cavalieri, Kepler, Fermat, ... para sembrar el terreno cuyo fruto sería el surgimiento del cálculo integral con Newton y Leibniz.

En su escrito "sobre los conoides y los esferoides", Arquímedes considera tres proposiciones aritméticas, escritas en el lenguaje geométrico. En una de ellas dice: "si tuviéramos una sucesión de grandezas aritméticamente crecientes, cuya diferencia sea igual a menor, y tomáramos un número igual de grandezas todas iguales a mayor, la suma de éstas será menor que el doble de la suma de todas las primeras, pero excederá el doble de esta suma disminuida del mayor".

Se observa que esta proposición corresponde a la siguiente expresión matemática

$$\frac{n^2}{2}\,a < a + 2a + 3a + \cdots + na < \frac{(n+1)^2}{2}\,a,$$

y ésta equivale a la fórmula

$$\int_0^n ax\,dx = a\,\frac{n^2}{2}\ .$$

En el citado libro, Arquímedes estudia las propiedades de los conoides y de los esferoides; sus aportes están contenidos en doce proposiciones y establece las equivalencias entre segmentos de esos sólidos con sólidos conocidos. Entre otros resultados prueba que:

(1). Todo segmento de conoide rectángulo es equivalente a una vez y media el cono de igual base que el segmento, y cuyo vértice es el punto del conoide en el cual el plano tangente es paralelo a la base.

(2). La razón entre un segmento de conoide obtusángulo y el cono no es ahora constante, sino que es igual a la razón entre los dos segmentos que se obtienen agregando al eje del segmento el triple y el doble, respectivamente, de la porción de recta "agregada" que es la longitud del semidiámetro conjugado a la dirección determinada por la base del segmento.

(3). Si un plano determina en un esferoide dos segmentos, la razón entre uno de ellos y el cono (definido como siempre) es igual a la razón entre el eje correspondiente al otro segmento, agregándole la semirecta que une los vértices (semidiámetro conjugado a la dirección de la base) y ese eje.

- Arquímedes fue un verdadero precursor del cálculo integral, lo que hemos mencionado ya en algunas de sus contribuciones mencionadas. En su libro "**Tratado de las Espirales**", él continúa aportando de modo extraordinario investigaciones sobre los infinitesimales, lo que hace al usar el método del "agotamiento"; establece teoremas en que usa series convergentes, asi como sumas infinitas de cantidades muy pequeñas. ¡ Arquímedes estuvo muy cerca de la noción de "**límite**"! Al inicio de su libro, en el Prefacio, Arquímedes se dirige a Dositen en los siguientes términos:

  ≪ Arquímedes a Dositen, saludos!

  Me pides con insistencia que escriba las demostraciones de los teoremas que yo había mandado a Conon. Ya tienes algunas de estas demostraciones en los libros que Heráclides te llevó y otras se encuentran en este escrito que ahora te envío. No estés admirado por haber demorado tanto en la publicación de las demostraciones de los mismos teoremas. La causa está en que yo quise dar bastante tiempo para que lo hicieran , las personas versadas en las Matemáticas que desearan ocuparse de estas investigaciones. Porque, ¿cuántos teoremas de geometría hay, que parecen, al principio, no presentan algún modo de ser conocidos, y que después se tornan evidentes?

  **Conon** falleció sin haber podido hallar esas demostraciones y dejó los teoremas en la oscuridad. Si él no hubiera desaparecido tan temprano, las habría encontrado, sin duda, y por estos descubrimientos, y por varios otros, los habría puesto dentro de los límites de la geometría, porque nosotros no ignoramos que este hombre poseía una capacidad y un ingenio admirable para nuestra ciencia. Han pasado varios años

> desde su muerte, y entre tanto no me consta que haya surgido alguien que tenga resuelto alguno de esos problemas. Asi que, voy a exponerlos sucesivamente, unos después de otros ≫ .

Por lo mencionado en tal Prefacio, Arquímedes procede a desarrollar los teoremas enunciados y enviados a Conon. Según Arquímedes,

"Una **espiral** es una curva generada por un punto que se mueve sobre una recta con movimiento uniforme a partir de un punto fijo, al mismo tiempo que esta recta gira en torno de este punto con movimiento también uniforme".

Usando votación moderna, la ecuación de una espiral en coordenadas polares es,

$$r = a\theta$$

con un punto fijo como polo, y $a$ es un número dado.

Arquímedes estudia a la espiral apoyándose en resultados de la cinemática relativos al movimiento uniforme; también en resultados sobre geometría que se refieren a construcciones de figuras cuando son satisfechas ciertas condiciones; también le es útil la álgebra geométrica.

Algunos de los mas importantes resultados sobre la espiral son los siguientes.

(1). "Mediante el trazado de la tangente a la espiral en uno de sus puntos puede obtenerse un segmento igual a la longitud de un arco de circunferencia de radio y ángulo central dado, es decir, que mediante esta curva puede resolverse el problema correlativo de la cuadratura del círculo: el de la rectificación de la circunferencia o de uno de sus arcos".

(2). "El área barrida por el radio vector en la primera revolución es la tercera parte del círculo cuyo radio es la posición final del radio vector. Ese área barrida en la segunda revolución está en la razón 7:12 con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector".

**Nota.** En un corolario posterior, Arquímedes da la expresión general, en forma geométrica, de esta razón, para cualquier revolución.

(3). Expresa, en forma bastante general, "la razón entre las áreas comprendidas entre las espirales engendradas en las revoluciones sucesivas y la porción de recta correspondiente a la posición inicial; así como la razón en que queda dividido por el arco de espiral al trapecio circular situado en un sector circular cuyos extremos corresponden a las posiciones inicial y final del radio vector, y cuyos arcos de circunferencias bases son los que tienen por radios esos radios vectores".

Precisemos algunas proposiciones contenidos en el citado libro sobre las espirales.

**Proposición 1.** *"Si un punto se mueve con una razón uniforme a lo largo de cualquier línea, y dos longitudes son tomadas sobre ella, ellas serán proporcionales a los tiempos usados en describir tales longitudes".*

(En los Elementos de Euclides, Libro V. Def. 5 se expresa algo similar a esta proposición).

**Proposición 2.** *"Si cada uno de dos puntos situados en líneas diferentes, respectivamente, se mueven a lo largo de ellas con una razón uniforme, y si longitudes son tomadas, una sobre cada línea, formando pares, tal que cada par son descritas en tiempos iguales, las longitudes serán proporcionales".*

(La estrategia es igualar la razón de las longitudes tomadas sobre una línea a aquellas de los tiempos de descripción, la cual debe ser igual a la razón de las longitudes tomadas sobre la otra línea).

**Proposición 3.** *"Dado cualquier número de círculos, es posible encontrar una línea recta mayor que la suma de todas sus circunferencias".*

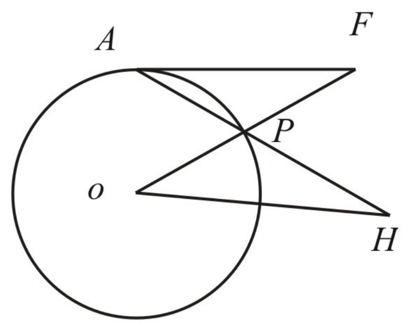
(Basta circunscribir polígonos a cada círculo y tomar la línea recta que sea igual a la suma de los perímetros de los polígonos).

**Proposición 4.** *"Dadas dos líneas desiguales, por ejemplo, una línea recta y la circunferencia de un círculo, es posible encontrar una línea recta menor que el mayor de las dos líneas, y mayor que la menor".*

(Observemos que el exceso puede, siendo agregado un número suficiente de veces a si mismo, ser hecho a fin de exceder a la menor línea. Asi, sea $c$ la circunferencia de un círculo y $l$ la longitud de una línea recta; si $c > l$, podemos encontrar un número $n$ tal que $n\,(c-l) > l$; luego $c - l > \dfrac{l}{n}$ ó $c > l + \dfrac{l}{n}$. De esta manera, basta tomar la línea recta de longitud $l + \dfrac{l}{n}$. Se tendrá, $l < l + \dfrac{l}{n} < c$).

**Proposición 5.** *"Dado un círculo con centro $O$, una tangente a ella en $A$, y $c$ la circunferencia de cualquier círculo que sea; es posible trazar una línea recta $OPF$ que encuentra al círculo en $P$ y a la tangente en $F$ tal que* $FP : OP <$ (arc $AP$): $c$*".*

Arquímedes toma $D$, una línea recta mayor que $c$, dibuja $OH$ paralela a la tangente en $A$ y dice: $\ll$ sea $PH$ ser puesta igual a $D$ "verging" hacia $A$ $\gg$.




$(i)$

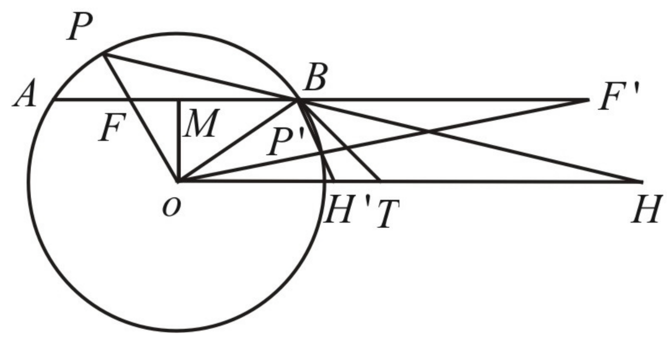
Interpretemos la palabra "verging". Ella corresponde al tipo de problema, conocido como "$\nu \in \hat{\nu}\sigma\iota s$", donde una línea recta de longitud dada tiene que ser puesta entre dos líneas o curvas en tal posición que si, se extendiera, ella pasa a través de un punto dado. Esto significa "verging".

En general, es oportuno remarcar que, excepto la Proposición 5, este tipo de problemas no pueden ser resueltos por medio de líneas rectas y círculos; ellos dependen de la solución de ecuaciones de cuarto grado, los cuales se resuelven con puntos de intersección de ciertas hipérbolas rectángulares con ciertas parábolas. Posiblemente esta clase de problemas se hayan resuelto vía métodos mecánicos.

En las **Proposiciones 6** a **9** se tiene un círculo con centro $O$, una cuerda $AB$ menor que el diámetro, $OM$ es la pendiente de $O$ a $AB$, $BT$ es tangente en $B$, $OT$ es la línea recta a través de $O$ paralela a $AB$. $D : E$ es cualquier razón menor o mayor, según el caso, que la razón $BM : MO$.

En las **Proposiciones 6** y **7**, Arquímedes prueba que es posible determinarse una línea recta $OFP$, que encuentra $AB$ en $F$ y al círculo en $P$ tal que $FP : PB = D : E$ (se remarca que $OP$ encuentra a $AB$ en el caso $D : E < BM : MO$, y encuentra a $AB$ extendido cuando $D : E > BM : MO$).

Ver Fig. (ii).



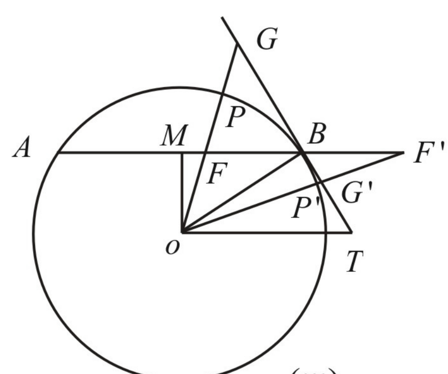

$(ii)$

En las **Proposiciones 8** y **9** (ver Fig. (iii)), Arquímedes prueba que es posible trazarse una línea recta $OFP$ que encuentra $AB$ en $F$, al círculo en $P$ y a la tangente en $B$ en el punto $G$ tal que $FP : BG = D : E$ ($OP$ encuentra $AB$ mismo si $D : E < BM : MO$, y encuentra a la prolongación de $AB$ en el caso $D : E > BM : MO$).

**Proposición 7.** *Si $D : E$ es cualquier razón* ***mayor*** *que $BM : MO$, se requiere (ver Fig. (ii)) trazar $OP'F'$ que encuentre al círculo en $P'$ y $AB$ extendido en $F'$, tal que $F'B' : P'B = D : E$.*

**Prueba.**

Tracemos $OT$ paralelo a $AB$, y sea la tangente al círculo en $B$, que encuentra $OT$ en $T$. Entonces, $D : E > BM : MO$ (por hipótesis) $> OB : BT$ (triángulos semejantes).




$(iii)$

Tomemos una línea recta $P'H'$ ($< BT$) tal que $D : E = OB : P'H'$ y coloquemos $P'H'$ entre el círculo y $OT$ "verging" hacia $B$ (esta construcción se asume). Luego,

$$F'B' : P'B = OP' : P'H' = OB : P'H' = D : E.$$

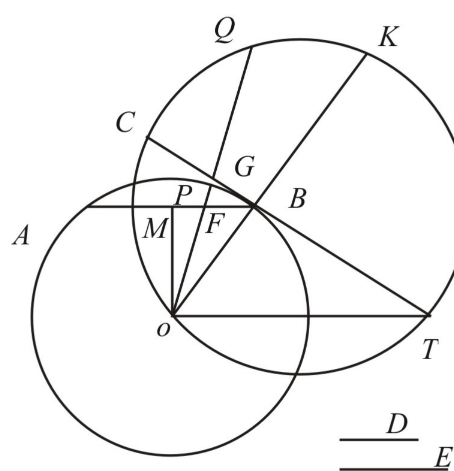
■

**Proposición 8.** *Si $D : E$ es cualquier razón dada* ***menor*** *que $BM : MO$, se requiere trazar $OFPG$ que encuentre $AB$ en $F$, al círculo en $P$ y a la tangente en $B$ al círculo en el punto $G$, tal que $FP : BG = D : E$.*

**Prueba.**

Si $OT$ es paralela a $AB$ y encuentra a la tangente en $B$, en $T$, se tiene $BM : MO = OB : BT$ (triángulos semejantes), luego, $D : E < OB : BT$.

Extendamos $TB$ hasta $C$, haciendo $BC$ de tal longitud que $D : E = OB : BC$; luego $BC > BT$.




Describamos un círculo a través de los puntos $O$, $T$ y $C$, y prolonguemos $OB$ hasta encontrar al círculo en $K$. "Entonces, desde que $BC > BT$, y $OK$ es perpendicular a $CT$, es posible colocar $QG$ [entre el círculo $TKC$ y $BC$] igual a $BK$ y ≪verging≫ hacia $O$" (se asume esta construcción).

Sea $QGO$ que encuentra al original círculo en $P$ y a $AB$ en $F$. Entonces $OFPG$ es la línea recta requerida. En efecto,

$$CG.GT = OG.GQ = OG.BK.$$

Pero, $OF : OG = BT : GT$ (por paralelas); de acá, $OF.GT = OG.BT$.

Luego, $CG.GT : OF.GT = OG.BK : OG.BT$, de donde

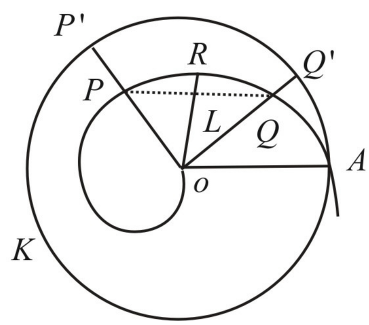
$$CG : OF = BK : BT = BC : OB = BC : OP.$$

Por lo tanto, $OP : OF = BC : CG$; y de acá, $PF : OP = BG : BC$ ó $PF : BG = OB : BC = D : E$.

■

En las **Proposiciones 12**, **14** y **15** Arquímedes proporciona la propiedad fundamental que relaciona la longitud del radio vector con el ángulo a través del cual la línea inicial gira desde su posición inicial, y esto corresponde a la ecuación (en coordenadas polares) $r = a\theta$. Veamos el caso del "primer círculo". Si $P$ y $Q$ son dos puntos de este primer turno, se tiene

$$OP : OQ = (\text{arco} AKP') : (\text{arco} AKQ').$$




De un modo general, si $P$ y $Q$ son puntos del "n - turno" de la espiral, y si $c$ está sobre la circunferencia del primer círculo, se tiene

$$OP : OQ = \{(n-1)\,c + \text{arco } AKP'\} : \{(n-1)\,c + \text{arco } AKQ'\}\,.$$

En la **Proposición 13**, Arquímedes prueba que si una línea recta "toca" a la espiral, ella la toca en solamente un punto. **En efecto**, supongamos que la tocara en otro punto; sea la tangente en $P$ y que toca a la espiral en otro punto $Q$ (ver la figura adjunta), entonces si bisectamos el ángulo $POQ$ por $OL$, la que encuentra $PQ$ en $L$ y a la espiral en $R$. Entonces, por propiedad de la espiral se tendrá $OP + OQ = 2OR$. Pero, por propiedad del triángulo se tiene $OP + OQ > 2OL$. Luego, $OL < OR$ y algún punto de $PQ$ está dentro de la espiral. De acá, $PQ$ corta a la espiral, una contradicción con la hipótesis.

En las proposiciones 16 y 17 prueba que el ángulo hecho por la tangente en un punto con el radio vector en aquel punto, es obtuso hacia el lado delantero y agudo hacia el lado trasero del radio vector.

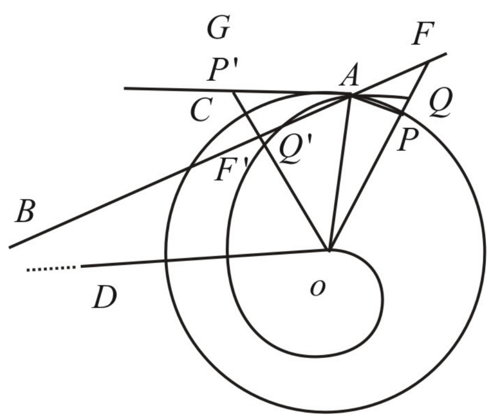
**Notas.**

1. Si del origen de la espiral cualquier línea recta es trazada, sea aquel lado de ella el cual está en la misma dirección que aquella de la revolución; este lado se llama el "**lado delantero**", y aquel el cual está en la otra dirección se llama "**lado trasero**".

2. La longitud, la cual el punto, que se mueve a lo largo de la línea recta, describe en una revolución se llama la "**primera distancia**"; aquella (distancia) la cual el mismo punto describe en la segunda revolución, se llama la "**segunda distancia**", y asi ...

3. Sea el círculo construido con el origen (de la espiral) como centro y la primera distancia como radio; tal círculo se llama el "**primer círculo**", y aquel trazado con el mismo centro y el doble radio, se llama el "**segundo círculo**", y asi ...

**Proposición 18.** *Si $OA$ es la línea inicial, $A$ es el punto final del primer turno de la espiral, y si la tangente a la espiral en $A$ es trazada, la línea $OB$ trazada de $O$ perpendicular a $OA$* ***encontrará*** *a dicha tangente en algún punto $B$, y $OB$ será igual a la circunferencia del primer círculo.*
**Prueba.** [FAU-GRA].




Sea $AKC$ el "primer círculo"; el ángulo posterior (trasero) entre $OA$ y la tangente en $A$, es agudo; luego la tangente encontrará al primer círculo en un segundo punto $C$; los ángulos $CAO$, $BOA$ son juntos menor que dos ángulos rectos, luego $OB$ encontrará $AC$ en algún punto $B$. Entonces, si $c$ es la circunferencia del primer círculo, se tiene que probar: $OB = c$.

- **Supongamos $OB > c$.** A lo largo de $OB$ midamos una longitud $OD$ menor que $OB$ pero mayor que $c$. Entonces se tiene un círculo $AKC$, una cuerda $AC$ en ello menor que el diámetro, y una razón $AO : OD$ mayor que la razón $AO : OB$ ó (por semejanza de triángulos, igual a ello) la razón de $\frac{1}{2}$ $AC$ a la perpendicular de $O$ sobre $AC$. Luego (Proposición 7) podemos trazar una línea recta $OPF$, que encuentra al círculo en $P$ y a la prolongación de $CA$ en $F$, tal que $FP : PA = AO : OD$.

  Asi, alternativamente, desde que $AO = PO$, $FP : PO = PA : OD <$ (arc $PA$) : $c$, desde que (arc $PA$) $> PA$ y $OD > c$. Componiendo se tiene
  $$FO : PO < (c{+}\text{arc } PA) : c < OQ : OA \ ,$$
  donde $OF$ encuentra a la espiral en $Q$ (Proposición 15). Luego, desde que $OA = OP$, $FO < OQ$, imposible. Por tanto, $OB \not> c$.

- **Supongamos $OB < c$.** Midamos $OE$ a lo largo de $OB$ tal que $OE$ sea mayor que $OB$ pero menor que $c$. En esta situación se tiene que la razón $AO : OE$ es menor que la razón $AO : OB$ (o la razón de $\frac{1}{2}$ $AC$ a la perpendicular de $O$ sobre $AC$); luego, podemos (por la Proposición 8) trazar una línea $OF'P'G$, que encuentra $AC$ en $F'$, al círculo en $P'$ y a la tangente en $A$ al círculo, en $G$ y tal que $F'P' : AG = AO = OE$. $Q'$ es el punto en que $OP'G$ corta a la espiral.

  Entonces tenemos, alternativamente, $F'P' : P'O = AG : OE >$ (arc $AP'$) : $c$, desde que $AG >$ (arc $AP'$) y $OE < c$. Luego,
  $$F'O : P'O < (\text{arc } AKP') : c < OQ' : OA \qquad \text{(Proposición 14)},$$
  lo que no es posible, ya que $OA = OP'$ y $OQ' < OF'$.

  De esta manera, $OB \not< c$.

**Conclusión:** Desde que $OB \not> c$ y $OB \not< c$, se tiene $OB = c$, como se desea. ■

En las **Proposiciones 21-28** (parte final del libro), Arquímedes estudia la manera de encontrar las áreas de porciones de la espiral determinada por dos cualquier radios vectores, en diversos turnos (o giros).

**Proposición 24.** *El área limitada, en cualquier turno, de la espiral y la línea inicial es igual a un tercio del "primer círculo". Esto es,*

$$\text{área} = \frac{1}{3}\,\pi\,(2\pi a)^2 \ ,$$

*donde $r = a\theta$ es la ecuación de la espiral.*

**Prueba.** ([FAU-GRA], pag. 164). Sea $O$ el origen, $OA$ la línea inicial, $A$ es la extremidad del primer turno. Trazamos el "primer círculo", esto es, el círculo con centro $O$ y radio $OA$. Luego, si $C_1$ es el área del primer círculo y $R_1$ aquel (área) del primer turno de la espiral limitado por $OA$, se tiene que **probar**: $R_1 = \frac{1}{3}\,C_1$.

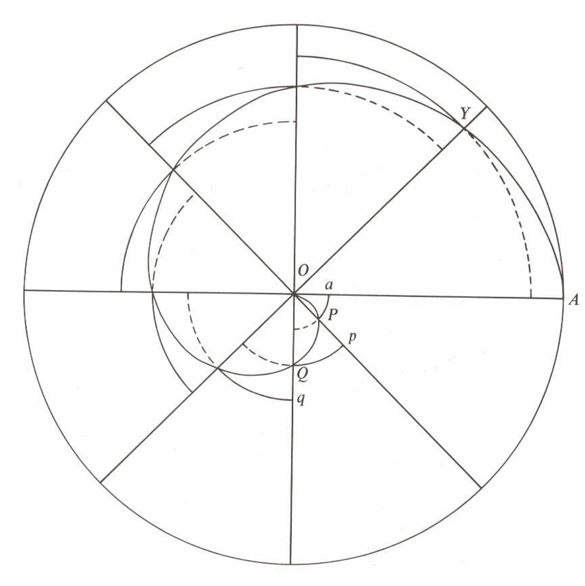
Nuevamente, si esta igualdad no fuera factible se tendría $R_1 < \frac{1}{3}\,C_1$ ó $R_1 > \frac{1}{3}\,C_1$.

(•) **Supongamos** que $R_1 < \frac{1}{3}\,C_1$.

Podemos circunscribir una figura alrededor de $R_1$ vía sectores de círculos semejantes tal que, si $F$ es el área de esta figura, entonces $F - R_1 < \frac{1}{3}\,C_1 - R_1$; luego, $F < \frac{1}{3}\,C_1$.

Sean $OP,\ OQ,\ \ldots$ los radios de los sectores circulares, comenzando desde el mas pequeño; (el radio del mas grande es, desde luego, $OA$). Entonces, los radios forman una progresión aritmética creciente, en la cual la diferencia común es igual al menor término $OP$. Si $n$ es número de los sectores, se tiene (por la Proposición 10. Corolario 1) que:

$$n.OA^2 < 3\left(OP^2 + OQ^2 + \cdots + OA^2\right).$$




Pero, desde que los sectores semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus radios, se tiene que $C_1 < 3F$ ó $F > \frac{1}{3}\,C_1$, lo que no es posible pues $F < \frac{1}{3}\,C_1$.

Luego, $R_1 \not< \frac{1}{3}\,C_1$.

(•) **Supongamos** que $R_1 > \frac{1}{3}\,C_1$.

La idea ahora es inscribir una figura hecha por sectores circulares semejantes tal que si $f$ es su área, se tenga $R_1 - f < R_1 - \frac{1}{3}\,C_1$. Luego, $f > \frac{1}{3}\,C_1$. Si hubieran $(n-1)$ sectores, sus radios $OP$, $OQ$, ... forman una progresión aritmética creciente en la cual el menor término es igual a la común diferencia, y el mayor, como $OY$, es igual a $(n-1)\,OP$.

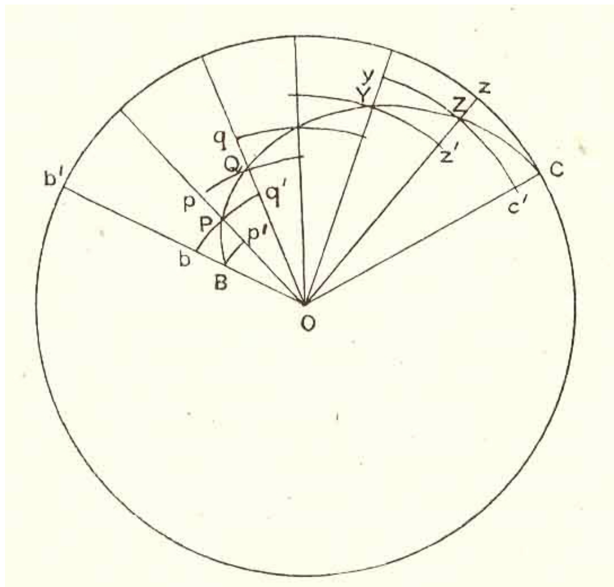
Asi (Proposición 10. Corolario 1) se tiene

$$n.OA^2 > 3\left(OP^2 + OQ^2 + \cdots + OY^2\right);$$

de acá, $C_1 > 3f$ ó $f < \frac{1}{3}\,C_1$, algo imposible ya que $f > \frac{1}{3}\,C_1$. Luego, $R_1 \not> \frac{1}{3}\,C_1$.

**Conclusión.** Como $R_1 \not< \frac{1}{3}\, C_1$ y $R_1 \not> \frac{1}{3}\, C_1$ se tendrá $R_1 = \frac{1}{3}\, C_1$. ■

En la **Proposición 26**, Arquímedes toma $OB$, $OC$, dos radios vectores




Figura[*] ([HEA],vol.II)

limitantes que incluye un arco $BC$ de la espiral. Con centro $O$ y radio $OC$ describe un círculo. Luego divide el ángulo $BOC$ en cualquier número de partes iguales vía radios del círculo. La espiral encuentra a esos radios en los puntos $P$, $Q$, ..., $Y$, $Z$ tal que los radios vectores $OB$, $OP$, $OQ$, ..., $OZ$, $OC$ están en progresión aritmética. Luego traza arcos de círculos con radios $OB$, $OP$, $OQ$, ... (ver Figura [*]). Esto produce una figura circunscrita a la espiral y consiste de la suma de pequeños sectores de círculos, y también produce una figura inscrita del mismo tipo.

Como el primer sector en la figura circunscrita es igual al segundo sector en la inscrita, se observa que las áreas de las figuras circunscritas e inscritas difieren por la diferencia entre los sectores $OzC$ y $OBp'$; luego, aumentando el número de divisiones del ángulo $BOC$ podemos hacer la diferencia entre las áreas de las figuras circunscritas e inscritas tan pequeños como deseemos; de esta manera se tienen los argumentos para aplicar el método del "agotamiento" (o exhaustación).

Si hubieran $n$ radios $OB,\ OP,\ ...,\ OC$, habrán $(n-1)$ partes del ángulo $BOC$. Desde que los ángulos de todos los pequeños sectores son iguales, los sectores están en la proporción como los cuadrados de sus radios; de esta manera se tiene

$$\text{(total sector } Ob'C\text{):(figura circunscrita)} = (n-1)\,OC^2 : \left(OP^2 + OQ^2 + \cdots + OC^2\right),$$

y

$$\text{(total sector } Ob'C\text{):(figura inscrita)} = (n-1)\,OC^2 : \left(OB^2 + OP^2 + OQ^2 + \cdots + OZ^2\right).$$

Arquímedes observa que $OB,\ OP,\ OQ,\ ...,\ OZ,\ OC$ están en progresión aritmética con $n$ términos; luego (Proposición 11, Corolario),

$$\begin{aligned}(n-1)\,OC^2 : \left(OP^2 + OQ^2 + \cdots + OC^2\right) \quad &< \quad OC^2 : \left\{OC.OB + \frac{1}{3}\left(OC - OB\right)^2\right\} \\ &< \quad (n-1)\,OC^2 : \left(OB^2 + OP^2 + \cdots + OZ^2\right).\end{aligned}$$

Comprimiendo las figuras circunscritas e inscritas simultáneamente (del modo familiar), Arquímedes llega, vía “agotamiento”, a verificar que

$$\text{(sector } Ob'C\text{):(área de la espiral } OBC\text{)} = OC^2 : \left\{OC.OB + \frac{1}{3}\left(OC - OB\right)^2\right\}.$$

(Arquímedes está llegando al **cálculo integral** ! ... ). Si $OB = b,\ OC = c$ y $(c-b) = (n-1)\,h$, tal resultado es equivalente a decir que, cuando $h$ disminuye $n$ crece mas y mas, mientras $c-b$ permanece constante,

$$\begin{aligned}&\text{límite de } h\left\{b^2 + (b+h)^2 + (b+2h)^2 + \cdots + (b+n-2h)^2\right\} \\ &= (c-b)\left\{cb + \frac{1}{3}(c-b)^2\right\} = \frac{1}{3}\left(c^3 - b^3\right).\end{aligned}$$

Se observa que esta expresión es equivalente (en la actual notación) a

$$\int_b^c x^2 dx = \frac{1}{3}\left(c^3 - b^3\right).$$

Es admirable como el genio de Arquímedes, en una época en que ni remotamente se conocía a la teoría de la integral, gracias a su gran intuición haya llegado muy cerca de la idea de integral; en verdad, él hizo verdaderas integraciones.

Volviendo al anterior argumento se observa en particular que el área incluida en el primer turno y la línea inicial está acotada por los radios vectores $O$ y $2\pi a$. Luego,

$$\text{(área de la espiral):(círculo con radio } 2\pi a) = \frac{1}{3}\,(2\pi a)^2 : (2\pi a)^2 \ ,$$

de donde,

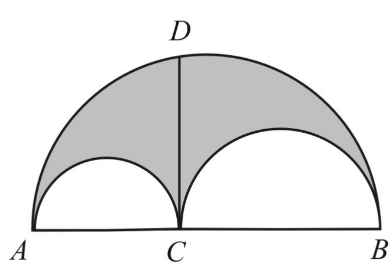
$$\text{(área de la espiral)} = \frac{1}{3}\,\pi 4\pi^2 a^2 \ ,$$

tal como fue probado en la Proposición 24.

Arquímedes prueba también bellos resultados respecto a la tangente en un punto de la espiral. Asi, verifica que la tangente a la espiral en un punto correspondiente a una revolución completa $2\pi a$ del radio vector, encuentra a la perpendicular conducida por el polo al radio vector que pasa por aquel punto, a una distancia del polo igual a la circunferencia del círculo. La tangente en el fin de la segunda revolución determina un segmento igual al doble de la circunferencia del círculo; y asi sucesivamente; de esta forma Arquímedes, vía la espiral, trata el problema de la rectificación de la circunferencia (o de cualquiera de sus arcos). Arquímedes también calcula la superficie de un sector de espiral vía el argumento visto anteriormente.

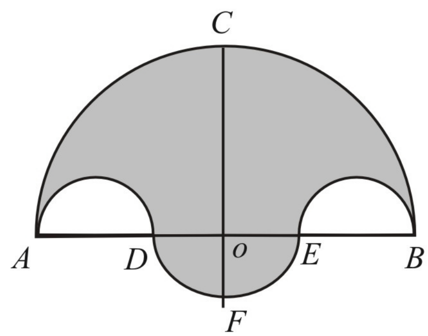
**• El Libro de los Lemas (o El "Liber Assumptorum").**

Si bien los escritos de Arquímedes se caracterizan por el uso de una matemática de alto nivel, él también escribió una obra dedicada a problemas sencillos, como es el caso del "Libro de los Lemas". Este manuscrito se preservó en una versión árabe y contiene algunos interesantes teoremas sobre geometría. Por ejemplo, estudia una figura llamada arbelos o "cuchillo de zapatero", la que es una región del plano limitada por tres semicírculos tangentes dos a dos.



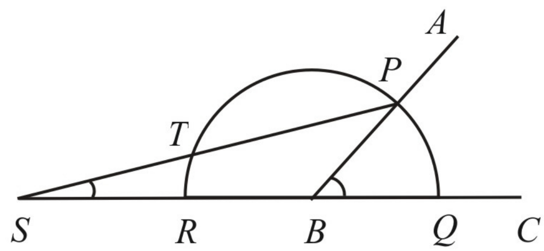
En la **Proposición 4**, Arquímedes prueba que si $CD$ es perpendicular a $AB$, entonces el círculo de diámetro $CD$ es igual al área del arbelo. En la **Proposición 5** prueba que los círculos inscritos en las dos regiones en que $CD$ divide al "cuchillo de zapatero", son iguales.

**Proposición 14.** ("Bodega para Sal"). *"Dibújense cuatro semi-circunferencias de diámetros $AB$, $AD$, $DE$ y $EB$ tal que $AD = EB$. Entonces el área total limitada por la "bodega para sal", es decir, de la región limitada por los arcos semi-circulares, es igual al área del círculo que tiene como diámetro el eje de simetría $FOC$ de la figura".*




El lector podrá apreciar que aún en este tipo de problemas, Arquímedes conserva su alta originalidad y belleza de sus resultados.

En la **Proposición 8**, Arquímedes considera el problema de la **trisección del ángulo**. Asi, sea $ABC$ el ángulo que deseamos trisecar. Con centro en $B$ construyamos una circunferencia de radio arbitrario que corta a $AB$ en $P$ y a $BC$ en $Q$, y también a la prolongación de $BC$ en $R$. Constrúyase ahora la recta $STP$ tal que $S$ esté sobre la prolongación $CQBR$, y que $T$ esté sobre la circunferencia y tal que



$ST = BQ = BP = BT$. Desde que los triángulos $STB$ y $TBP$ son isósceles, Arquímedes verifica que el ángulo $BST$ es igual a un tercio del ángulo $QBP$, que es el ángulo $ABC$.

■

¿Arquímedes ha resuelto al famoso problema de la trisección del ángulo? Recordemos que el problema planteado en la Antiguedad exigía solo usar regla (no "numerada") y compás. Además, existen ángulos que si se pueden trisecar (un ángulo recto). El problema es general, en el sentido platónico (solo regla y compás). Ya en la época de Arquímedes, y él mismo, eran concientes que en la demostración dada se inserta una longitud dada ($ST = BQ$) entre dos figuras, la recta $QR$ prolongada y la circunferencia.

La versión árabe sobre "El Libro de los Lemas" fue objeto de algunas conjeturas sobre la autoría de Arquímedes; luego de algunas investigaciones se ha concluido que Arquímedes es el autor de los resultados establecidos, en donde se encuentran otras contribuciones, como son: "sobre el círculo", "sobre el heptágono en un círculo", "sobre círculos tangentes", "sobre líneas paralelas", "sobre triángulos", "sobre las propiedades de los triángulos rectángulos", entre otros temas. Respecto al triángulo se establecen dos cuestiones, atribuidas también a Heron: "encontrar las perpendiculares de un triángulo cuando los lados son dados", y "encontrar el área de un triángulo en términos de sus lados". ["área" $= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, donde $s = \dfrac{1}{2}\,(a+b+c)$].

**• Los Sólidos Semi - Regulares.**

Existe la certeza de que algunas obras de Arquímedes no han llegado a la posteridad, se perdieron. Asi, por Pappus (casi 300 D.C.) nos enteramos que Arquímedes investigó poliedros de cierto tipo, los sólidos o poliedros semiregulares; él llega a descubrir que existen 13 de sólidos de tal tipo. Sabemos que un poliedro regular tiene polígonos regulares del mismo tipo como caras, en tanto que un **sólido semiregular** es un poliedro convexo cuyas caras son también polígonos regulares, pero no todos del mismo tipo. Por ejemplo, tomemos un cubo de arista $a$. A partir de este cubo se puede construir un sólido semiregular limitado por 8 triángulos equiláteros y 6 octógonos regulares. [Para ello, de cada una de las 8 esquinas se corta un tetraedro de arista $\dfrac{a}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$]. En este caso el poliedro semiregular $P$ se denotará con $(8_3, 6_8)$. De un modo general, los 13 sólidos (poliedros) semiregulares de Arquímedes son: ([HEA], Vol. 2)

$P_1 \equiv (4_3, 4_6)$ , poliedro con 8 caras;

$\left.\begin{array}{l} P_2 \equiv (8_3, 6_4) \\ P_3 \equiv (6_4, 8_6) \\ P_4 \equiv (8_3, 6_8) \end{array}\right\}$ poliedros con 14 caras;

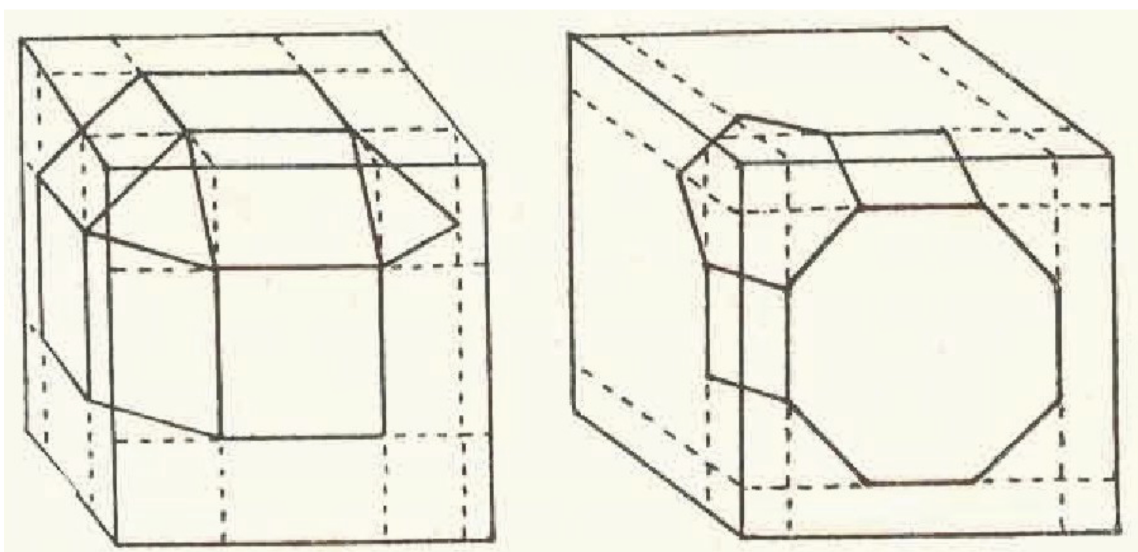
$\left.\begin{array}{l} P_5 \equiv (8_3, 18_4) \\ P_6 \equiv (12_4, 8_6, 6_8) \end{array}\right\}$ poliedros con 26 caras;

$\left.\begin{array}{l} P_7 \equiv (20_3, 12_5) \\ P_8 \equiv (12_5, 20_6) \\ P_9 \equiv (20_3, 12_{10}) \end{array}\right\}$ poliedros con 32 caras;

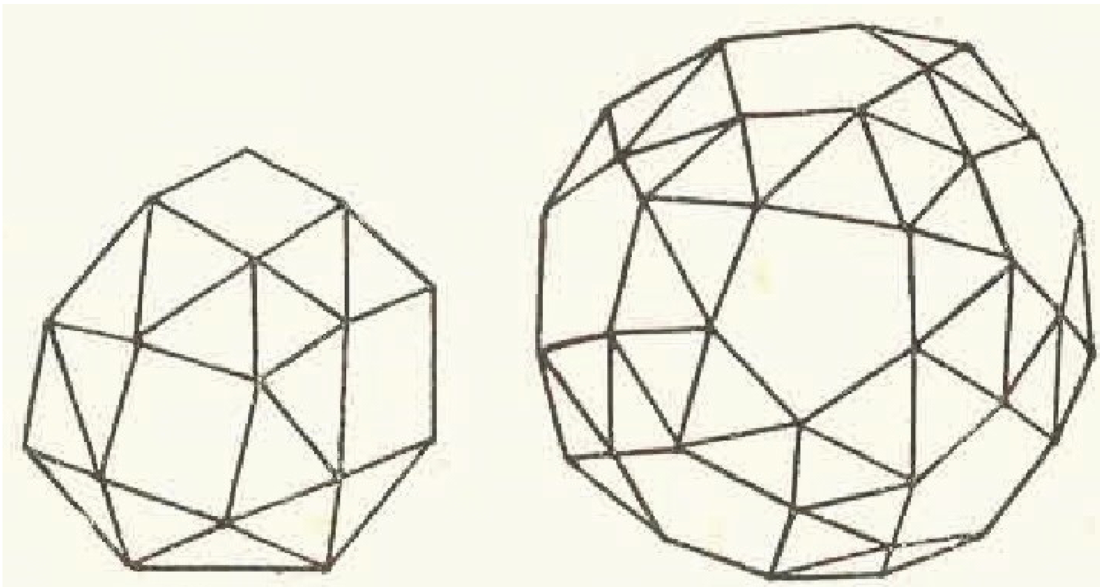
$P_{10} \equiv (32_3, 6_4)$ , poliedro con 38 caras;

$\left.\begin{array}{l} P_{11} \equiv (20_3, 30_4, 12_5) \\ P_{12} \equiv (30_4, 20_6, 12_{10}) \end{array}\right\}$ poliedros con 62 caras;

$P_{13} \equiv (80_3, 12_5)$ , poliedro con 92 caras;



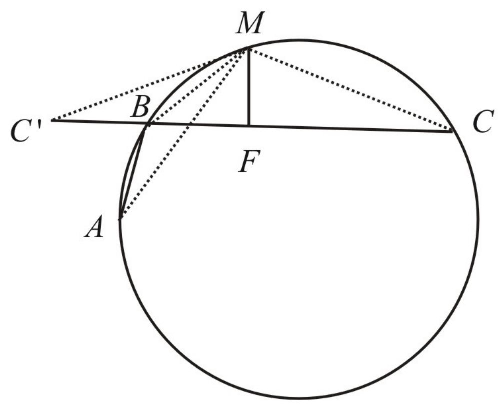
Ya en la Antiguedad tenían métodos para construir estos poliedros semiregulares; ellos pueden ser obtenidos de los poliedros regulares o de los mismos poliedros semiregulares; por ejemplo, seccionando los vértices de un cubo (como ya hemos mencionado) de modo que se bisequen sus aristas se obtiene el poliedro semiregular $P_2$. **Kepler** (1571 - 1630), famoso matemático y astrónomo, fue un gran admirador de esta clase de poliedros; él obtuvo los siguientes gráficos para $P_{10}$ y $P_{13}$ ([HEA], Vol. 2):



• **El Teorema de la "Cuerda Rota".**

Abu´l Raihan (973 - 1048), un culto personaje árabe, atribuyó a Arquímedes un curioso resultado, llamado el teorema de la "cuerda rota", que dice:

≪ si $AB$ y $BC$ forman una cuerda rota cualquiera en una circunferencia con la condición $AB \neq BC$ ($BC > AB$ en la figura), y si $M$ es el punto medio del arco $ABC$ y $F$ es el pie de la perpendicular trazada por $M$ a la mas larga de las dos cuerdas, entonces $F$ es el punto medio de la “cuerda rota” $ABC \gg$ .




Se afirma que Arquímedes dió varias pruebas de este teorema. Veamos la siguiente.

Se construyen los segmentos de rectas que aparecen en la figura adjunta tal que $FC' = FC$. Se observa que $\triangle MBC' \simeq \triangle MBA$, y por tanto $BC' = BA$. Luego, $C'F = AB + BF = FC$.

■

**Nota.** El teorema de la “cuerda rota” contiene un interesante mensaje trigonométrico; ella es equivalente a la fórmula:

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \qquad (*)$$

**En efecto**, póngase $\overset{\frown}{MC} = 2x$, $\overset{\frown}{BM} = 2y$; luego $\overset{\frown}{AB} = 2x - 2y$ ($M$ es punto medio de $ABC$). Obsérvese que las cuerdas correspondientes a estos arcos son,

$$MC = 2\operatorname{sen} x \quad , \qquad BM = 2\operatorname{sen} y \quad , \qquad AB = 2\operatorname{sen}(x-y)\,.$$

Se tiene

$$2\operatorname{sen} x \cos y = \text{proyección de } MC \text{ sobre } BC = FC$$

$$2\operatorname{sen} y \cos x = \text{proyección de } BM \text{ sobre } BC = FB.$$

Sabemos que $AB = FC - BF$, es decir, $2\operatorname{sen}(x-y) = 2(\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x)$, de donde se obtiene (*).

■

En **resumen**: podemos apreciar la gran profundidad, originalidad y belleza de la obra matemática de Arquímedes, uno de los mas grandes matemáticos de todos los tiempos y con seguridad, el mayor en la Antiguedad. Las obras que se perdieron, según hay testimonios, ¿qué contenían? ...

**COMENTARIOS 2.1 - 2.2**

1. Es digno resaltar como en la Antiguedad se plantearon complejos problemas del mundo físico y se buscó la solución de los mismos vía ingeniosos argumentos matemáticos. En esta dirección, los trabajos de **Aristarco** en astronomía fueron de un gran valor y audacia; se le conoce como el Copérnico de la Antiguedad pues él afirmaba que el Sol era el centro de nuestro sistema solar. Lo admirable es que usando instrumentos bastante limitados haya llegado a conclusiones valederas en nuestros días, y aquellos que no lo fueran encierran argumentos matemáticos de valor. En su obra "**Sobre los Tamaños y Distancias del Sol y de la Luna**", Aristarco emplea cierto argumento el que es equivalente a:
$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b} < \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}\,,$$
siendo $0 < b < a < \dfrac{\pi}{2}$ .

2. En la obra mencionada, Aristarco afirma que conoce los siguientes resultados (entre otros):

   (i). **(Proposición 7).** "La distancia del Sol a la Tierra es mayor que 18 veces, pero menor que 20 veces, la distancia de la Luna a la Tierra".

   (ii). **(Proposición 15).** "El diámetro del Sol tiene al diámetro de la Tierra una razón mayor que $\dfrac{19}{3}$ pero menor que $\dfrac{43}{6}$".

   (iii). **(Proposición 17).** $\dfrac{108}{43} < \dfrac{\text{diámetro de la Tierra}}{\text{diámetro de la Luna}} < \dfrac{60}{19}$ .

3. Las ideas astronómicas de Aristarco de Samos fueron recibidas por sus contemporáneos con una gran indiferencia y a veces fueron mal intencionadas, y sus notables contribuciones fueron pronto olvidadas. Fueron

muy pocos los que aceptaron y defendieron sus notables contribuciones. Lamentablemente, a veces, esto sigue ocurriendo en nuestros días. La cultura de la época de Aristarco no estaba preparada para asimilar tan notables ideas revolucionarias, como lo fue su idea del sistema heliocéntrico; incluso se llegó a pensar que sus ideas científicas eran peligrosas para el modelo que se tenía en aquella época. La astronomía en la Antiguedad consideró a la Tierra como algo distinto de los otros astros. Aristarco concibió un universo con el Sol al centro y los planetas, incluyendo a la Tierra, giraban a su alrededor; descubrió que el diámetro del Sol es $\frac{1}{720}$ del círculo del Zodíaco. Es sorprendente pensar que tuvo que pasar cerca de 1 800 años para que sus profundas ideas fueran revividas por Copérnico, época en que también hubieron serias polémicas sobre el correcto modelo de nuestro sistema solar.

Ya el mismo Arquímedes ver [NEW], Vol. 4. pag. 4, cuando se dirige al rey Gelón en su obra, el **Arenario**, decía que: $\ll$ los astrónomos llaman **cosmos** a la esfera cuyo centro es el centro de la Tierra y cuyo radio es igual al segmento entre el centro del Sol y el centro de la Tierra. Esto lo conoces por las demostraciones escritas de los astrónomos. Pero Aristarco de Samos editó un libro con algunas hipótesis, en el cual se deduce de las premisas que el cosmos es **muchas veces mayor** de lo que hemos dicho ahora. Supone en efecto que las estrellas fijas y el Sol permanecen inmóviles, mientras que la Tierra gira alrededor del Sol según la trayectoria de un círculo, estando situado el Sol en el centro de la órbita, y que la esfera de las estrellas fijas que tiene el centro cerca del Sol es de una tal magnitud, que el círculo según el cual se supone que gira la Tierra, tiene la misma razón respecto a la distancia de las estrellas fijas, que la que tiene el centro de la esfera a la superficie. Esto evidentemente es imposible, puesto que el centro de la esfera no tiene magnitud, ni puede pensarse que tenga ninguna razón con respecto a la superficie de la esfera. Hay que ver que Aristarco pensaba esto: puesto que suponemos que la Tierra es el centro del cosmos, la razón que tiene la Tierra con respecto al cosmos de que hablamos, es la razón que tiene la esfera, en la que hay un círculo según el cual se supone que gira la Tierra, con respecto a la esfera de las estrellas fijas. De este modo ajusta a la hipótesis las demostraciones de los fenómenos, y sobre todo parece que supone la magnitud de la esfera en la cual hace mover la Tierra, igual al cosmos de que hablamos.

$\cdots$ Aristarco ha tratado de demostrar que el diámetro del Sol es mayor que dieciocho veces el diámetro de la Luna y menor que veinte veces. Yo, sin embargo, superando esto para que lo propuesto quede demostrado sin discusión, supongo que el diámetro del Sol es treinta veces mayor que el diámetro de la Luna y no más.

Además, el diámetro del Sol es mayor que el lado del polígono de mil lados inscrito en el círculo máximo del cosmos. Supongo esto por haber encontrado Aristarco que el Sol aparece como una setecientos veinteava parte del círculo del Zodíaco. $\cdots \gg$

4. Arquímedes fue contemporáneo y amigo de Aristarco y seguramente tuvo gran aprecio por su obra científica y de su condición de gran astrónomo. En esa época las comunicaciones personales eran limitadas pero aún asi Arquímedes solía enviar a sus amigos mas selectos sus trabajos pero solo enviaba los enunciados de sus teoremas, inclusive enviaba algunos resultados falsos que sus colegas no sabían señalar el error, llegando a decir: "que aquellos que pretenden haber resuelto todos los problemas, pero sin dar la demostración, quedan refutados por el hecho mismo de haber declarado que demostrarón algo imposible".

5. Ya hemos tenido la oportunidad de mencionar algunas contribuciones de Arquímedes en la física y en la astronomía. Por ejemplo, en el Arenario realiza algunas reflexiones astronómicas de gran valor que mereció el reconocimiento de los antiguos astrónomos. Pappus afirma que Arquímedes habría escrito un libro sobre astronomía (que se perdió) y que construyó una esfera estelar y un planetario, los que fueron llevados a Roma por el general Marcelo donde por dos o tres siglos merecieron la curiosidad y la estima. En óptica geométrica hizo también notables contribuciones prácticas de la reflexión de la luz, como sucedió con el incendio de los navíos romanos al hacer concretar sobre ellos el calor solar por medio de espejos cóncavos. Fue un hombre brillantemente ingenioso; poseía el don de la creación de nuevas y profundas ideas en pro de sus conciudadanos.

6. Se afirma que Arquímedes tenía un gusto especial por sus trabajos sobre la esfera y el cilindro. En verdad, como hemos ya mencionado, en relación a estos sólidos obtuvo bellos y profundos resultados. Euclides definió a la esfera en estos términos:

"cuando quedando fijo el diámetro de un semi-círculo gira alrededor del diámetro y alcanza de nuevo la misma posición en la que empezó a desplazarse, la figura asi obtenida es una esfera".

Esta definición permitió a Arquímedes determinar la superficie de la esfera. El camino seguido fué: $\ll$ determinar el área de la superficie del cilindro; calcular el área de la superficie del cono; calcular el área de la superficie del tronco de cono y luego se obtiene el área de la superficie de la esfera $\gg$. Este proceso fue descrito en 2.2.5.

7. La humanidad posee la dicha de conservar muchos de los trabajos de Arquímedes, aún cuando algunos se perdieron y no sabemos que novedades contendrían. Este genial matemático griego dió demostraciones rigurosas para calcular áreas, volúmenes y centros de gravedad; en verdad, Arquímedes inventó (esencialmente) el cálculo integral. También atacó el problema de hallar una tangente a una espiral (lo que forma parte de la actual geometría diferencial). Trabajó asi mismo con algunas fórmulas algebraicas; en sus escritos aparecen algunos resultados sobre trigonometría, un campo que aún no estaba formalizado.

   Por ejemplo, usa la fórmula

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\operatorname{sen}(2n-1)\frac{\pi}{2n}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4n}\ ,$$

   algo sorprendente para aquellos tiempos y que utiliza en su búsqueda del valor de $\pi$.

   Arquímedes acostumbraba utilizar el método experimental ( ¡ gran idea aún en nuestros días! ) para arribar a sus verdades matemáticas, que luego él demostraba rigurosamente. De este modo llegó, por ejemplo, a probar que el área de un sector parabólico es dos tercios del área del paralelogramo circunscrito.

8. **El Problema del Ganado.**

   En la Antiguedad se trataron ecuaciones indeterminadas, que tienen mas incógnitas que ecuaciones, como lo es, por ejemplo, $3x-2y=5$. Se sabía determinar diversos enteros $x$ e $y$ que satisfacían esta ecuación; la interesante cuestión es descubrir los números mas simples que la satisfagan. En esta dirección está relacionado el interesante "problema del ganado", al que Arquímedes le dedicó atención.

El problema trata de "ocho rebaños, cuatro de toros y cuatro de vacas, de acuerdo con sus colores, blanco, negro, amarillo y moteado. Se exige, por ejemplo, que los toros moteados superen a los toros amarillos en una cantidad igual a $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ del número de los toros blancos; el problema exige para su solución el tamaño exacto de cada rebaño".

Existe la conjetura que este problema fue comunicado por Arquímedes a Eratóstenes y posiblemente fue conciente de la dificultad de obtener la solución del problema pues es una complicada cuestión en el análisis indeterminado; la solución consiste de ocho números que para escribirlos se necesitan de ... 700 grandes páginas. Las ocho incógnitas enteras están relacionadas con siete ecuaciones lineales y sujetas todavía a dos condiciones adicionales: la suma de un cierto par de incógnitas es un cuadrado perfecto, y la suma de otro par determinado de incógnitas es un número triangular. Sin estas condiciones ([EVE], pag. 195) adicionales, los menores valores de las incógnitas son números de la orden de millones; con tales condiciones, una de las incógnitas debe ser un número con mas de 265,500 dígitos.

Una ecuación típica de las siete es de la forma siguiente; si $x$ representa el número de toros moteados, y el número de toros blancos y $z$ al de amarillos, entonces se tiene,

$$x = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)y + z \qquad (+)$$

La cuestión es encontrar todas las incógnitas de siete ecuaciones, similares a $(+)$, con ocho incógnitas. Es claro que existen infinitas soluciones para las siete ecuaciones con ocho incógnitas. Se sabe que la solución mas simple para $(+)$ es $x = 14,\ y = 42,\ z = 1$. La cuestión es que esto no se ajusta a las otras ecuaciones, cuyas formas detallamos abajo, lo que hace mucho mas difícil hallar la solución del problema. Asi, el mas pequeño valor para $x$ que satisface a las siete ecuaciones, que detallamos abajo, es un número superior a tres millones y medio, un número que tiene 7 cifras. Arquímedes adaptó el problema estableciendo que,

"cuando los toros blancos junto con los negros estaban de pie con una profundidad y una anchura del mismo tamaño, las llanuras de Trinaquia, en toda su extensión se llenaban completamente con su número".

Esto se interpreta como fue el número total de toros blancos y negros es un cuadrado. Se probó muchos siglos después, que el valor mas pequeño de este rebaño era un número de $200,000$ cifras, y de esta manera las llanuras de Trinaquia deben ser reemplazadas por la Vía Láctea !

Veamos el problema del ganado en el contexto de las siete ecuaciones. Si $y$ e $w_1$ representan los números de toros y vacas blancas respectivamente y $(w, x_1)$, $(z, y_1)$ y $(x, z_1)$ representan los números de los otros tres colores, **entonces** tenemos las siguientes (siete) ecuaciones ([HEA], vol. II. pag. 97):

$$\text{(I)} \qquad y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) w + z \qquad \cdots \qquad (\alpha)$$

$$w = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) x + z \qquad \cdots \qquad (\beta)$$

$$x = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) y + z \qquad \cdots \qquad (\gamma)$$

$$\text{(II)} \qquad w_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (w + x_1) \qquad \cdots \qquad (\delta)$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (x + z_1) \qquad \cdots \qquad (\epsilon)$$

$$z_1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (z + y_1) \qquad \cdots \qquad (\zeta)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (y + w_1) \qquad \cdots \qquad (\eta)\,.$$

También se requiere que:

$$y + w = \text{ un cuadrado} \qquad \cdots \qquad (\theta)$$

$$z + x = \text{ un número triangular} \qquad \cdots \qquad (\iota)$$

La solución general de las primeras siete ecuaciones es:

$y = 2{,}3{,}7{,}53{,}4657\; n = 10366482\; n,$

$w = 2{,}3^2{,}89{,}4657\; n = 7460514\; n,$

$z = 3^4{,}11{,}4657\; n = 4149387\; n,$

$x = 2^2{,}5{,}79{,}4657\; n = 7358060\; n,$

$w_1 = 2^3{,}3{,}5{,}7{,}23{,}373\; n = 7206360\; n,$

$x_1 = 2{,}3^2{,}17{,}15991\; n = 4893246\; n,$

$y_1 = 3^2{,}13{,}46489\; n = 5439213\; n,$

$z_1 = 2^2{,}3{,}5{,}7{,}11{,}761\; n = 3515820\; n.$

Se puede encontrar un valor de $n$ tal que

$$y + w = \text{ un número cuadrado } .$$

Esto se logra si $n = 3{,}11{,}29{,}4657\; \xi^2 = 4456749\; \xi^2$, donde $\xi$ es cualquier número entero. Entonces se tiene que: $z + x$ es de la forma $\frac{1}{2}\, q\,(q+1)$, un número triangular.

Históricamente, cuando Arquímedes escribe a Eratóstenes de Cirene sobre el "problema del ganado" lo hace con una prosa digna de un gran escritor; asi, comienza diciendo:

> $\ll$ Mide la cantidad de reses del Sol, oh extranjero, aplicando tu esfuerzo, si participas de la sabiduria; de las reses que pastaban en las llanuras de la isla de Sicilia Trinaquia divididos en cuatro rebaños de colores distintos: el uno blanco como la leche, otro brillando con un color azul, otro amarillo, y otro variado. En cada rebaño había toros potentes en número componiendo esta simetría. Imagina, ¡ oh extranjero !, a los de pelo blanco iguales a la mitad y un tercio de los toros azules, y a todos los amarillos, pero los azules iguales a la cuarta y quinta parte de los mezclados y, además, a todos los amarillos.
> :::: $\gg$
> (Ver [NEW]. Vol. 1, pag. 125).

9. La inmensa y profunda obra matemática de Arquímedes, incluyendo a la física y a la astronomía, merece un estudio crítico y de divulgación en nuestro medio. El mensaje de sus originales ideas puede seguir motivando a las nuevas generaciones de matemáticos. Esto es una tarea, un reto, que habría que realizarse en alguna oportunidad.

**EJERCICOS 2.1 - 2.2**

1. (a). Explique cuál fue la posición astronómica de Aristarco respecto a nuestro sistema solar.

   (b). En una noche en que vemos a la Luna "partida por la mitad", ¿qué puede afirmar del ángulo $SLT$? ($S =$Sol, $L =$Luna y $T =$Tierra).

   (c). ¿Cuáles fueron algunas de las afirmaciones astronómicas que Aristarco dió en el siglo III A.C.?

2. Redacte un breve informe sobre el estado de la astronomía en la Antiguedad, hasta la época de Aristarco y de Arquímedes.

3. Redacte sobre algunas contribuciones de Arquímedes a situaciones de su medio ambiente (agua para el desierto, mover un barco, ...).

4. Dé una visión sobre las obras escritas por Arquímedes, dando una síntesis del contenido de cada una de ellas.

5. ¿Porqué a Arquímedes se le considera como el descubridor del cálculo integral?

   Si usted fuera un profesor de cálculo, ¿cómo motivaría las ideas de Arquímedes respecto a la noción de integral?

6. ¿Cuál fue la estrategia de Arquímedes para encontrar un valor de $\pi$?

7. ¿Cuál es la idea del método del "agotamiento" de Eudoxo?; ¿Cómo lo utilizó Arquímedes?

8. Explique cómo Arquímedes llega a afirmar que el área de un círculo de radio $r$ es $\pi r^2$.

9. Dé una visión matemática de como Arquímedes ataca el problema de encontrar el área de un sector parabólico.

10. Explique cómo Arquímedes llega a determinar el área de la:

    (i) superficie lateral de un cilindro recto,

    (ii) superficie lateral de un cono recto,

    (iii) superficie lateral de un tronco de cono,

(iv) (opcional) superficie de una esfera.

11. Exprese el resultado de Arquímedes relativo a una esfera inscrita en un cilindro. Dé la demostración de tal resultado. Trate también el caso de los volúmenes.

12. Imagine usted que Arquímedes hubiera tenido una idea formal de la noción de "límite"; conjeture usted, a través del libro "Tratado de las Espirales", a que nuevas ideas hubiera llegado el genial matemático siracusano.

13. Si Ud. fuera profesor de un curso básico de geometría, proponga el teorema de la "cuerda rota" a sus alumnos. Realice un trabajo de investigación motivando al teorema y dando las sugerencias necesarias para que los alumnos obtengan la demostración del teorema.

14. Diversos matemáticos antes de Arquímedes (Euclides, por ejemplo) dependieron en gran medida de los trabajos de sus predecesores. ¿Es esto también cierto en el caso de Arquímedes?, ¿porqué?

15. Según su criterio y por lo estudiado sobre el trabajo de Arquímedes, ¿cuál (o cuáles) podría (n) ser el (los) trabajo (s) que mas han influenciado en el desarrollo de la matemática?

16. Si $a_i$ y $A_i$ son, respectivamente, las áreas de los polígonos regulares de $i$ lados inscrito y circunscrito a una circunferencia, compruebe con algunos casos particulares se tienen las fórmulas (inductivas)

$$a_{2n} = \sqrt{a_n\, A_n} \qquad \text{y} \qquad A_{2n} = \frac{2A_n\, a_{2n}}{A_n + a_{2n}} \ .$$

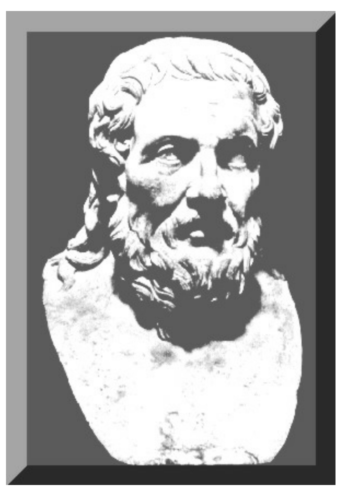
## 2.3. APOLONIO.

### 2.3.1. Algunos Aspectos Biográficos.

Poco se sabe sobre la vida de Apolonio. Heráclides menciona que en Perga, ciudad de Pamfilie, nació el tercer gran matemático de la Antiguedad que se llamó Apolonio, un nombre muy familiar en aquella época. El año que ocurrió su nacimiento no es bien determinado; unos opinan que fue en el año 262 A.C.; otros, entre 246 y 221. Fue aproximadamente 25 años mas joven que Arquímedes. Siendo joven fue a estudiar a Alejandría en donde tuvo la oportunidad de aprender con los sucesores de Euclides; se radicó un buen tiempo en tal importante ciudad cultural, famosa por su Biblioteca y su Museo. Luego pasó a visitar Pérgamo, en el oeste del Asia Menor, en donde había una universidad y una biblioteca a semejanza de la de Alejandría. También estuvo en el Efeso para retornar después a Alejandría en donde falleció alrededor del año 190 A.C.

Se conjetura que la época del mayor explendor de Apolonio fue al comienzo del siglo II A.C. durante el reinado de Tolomeo Filopator (222-205). Apolonio fue un notable astrónomo y se admite que escribió sobre múltiples temas matemáticos, pero su mayor obra y que lo identifica es sus "**Cónicas**", que es el único escrito que poseemos de él, pero incompleto. Este tratado de geometría superior consta de ocho libros, de los que poseemos los cuatro primeros en su versión original; los tres siguientes se conocen a través de traducciones árabes. El libro ocho está totalmente perdido pero lo conocemos indirectamente por algunos comentarios de Pappus.

Cuando Apolonio estuvo en Pérgamo conoció a Eudemo, quien fue uno de los primeros historiadores de la matemática y a quién dedicó los libros I, II y III. Apolonio se deleitaba escribiendo sus obras en donde contribuía admirablemente con nuevas ideas; asi, él proclamaba: "La mayor parte y los mas hermosos de estos teoremas son nuevos".



Si a Euclides se le identifica con "Los Elementos", dedicado a la geometría básica y también en parte, a la teoría de números, a Apolonio se le identifica con las “secciones cónicas”; se conjetura que también escribió sobre aritmética, sobre los “irracionales no ordenados” y que llegó a inventar un método para obtener una rápida aproximación del número $\pi$. Se afirma también que con Apolonio se inicia la teoría de la convergencia uniforme. Y por supuesto, con él se inicia la importante teoría de la geometría analítica de un modo formal; esto en una época en que no existía el álgebra de un modo organizado que le hubiera sugerido, posiblemente, algebrizar a la geometría de las cónicas, como lo hicieron muchos siglos después, Kepler, Cavalieri y sobre todo Descartes.

Euclides, Arquímedes y Apolonio son considerados como los tres mas altos exponentes de la matemática en la Antiguedad; pertenecen a la llamada “**Edad de Oro**” de la matemática griega y vivieron en torno del primer siglo de la Epoca Helenística. Apolonio mejoró algunos resultados conseguidos por Arquímedes; por ejemplo, se afirma que llegó al valor 3.1416 para $\pi$ aún cuando no se conoce como lo obtuvo. En la Antiguedad existió una famosa colección llamada el “Tesoro del Análisis”, la que incluía varias obras de Apolonio, como su geometría analítica. Los méritos de Apolonio como profundo matemático le valió que fuera conocido en la Antiguedad como “**El Gran Geómetra**”.

Euclides, Arquímedes y Apolonio desarrollaron sus privilegiados intelectos dentro del estimulante escenario que ofrecía el Museo y la Biblioteca de Alejandría, alrededor de quienes floreció una pléyade de pensadores de altísimo nivel. La ciudad de Alejandría fue el faro que iluminó por muchos siglos el desarrollo de la matemática y del pensamiento universal.

### 2.3.2. Las Cónicas Antes de Apolonio.

La gran calidad matemática de Apolonio se observa en el alto nivel en que fueron escritos las “Cónicas”; esta perfección hizo que lo que se escribió antes que él sobre las secciones cónicas pasaran al olvido. Sin embargo, desde el punto de vista histórico es conveniente rescatar los trabajos de, entre otros posiblemente, Menecmo, Euclides y del mismo Arquímedes, quienes aportaron ideas en el descubrimiento de las secciones cónicas.

**Menecmo** (aproximadamente 350 A.C.) fue alumno de Eudoxo y fue un notable astrónomo y geómetra. (Ver 1.2.4 (ii)). Su contribución mas importante fue la creación de las secciones cónicas, la que aplica en su estudio del problema clásico de la duplicación del cubo o “Problema de Delos”.

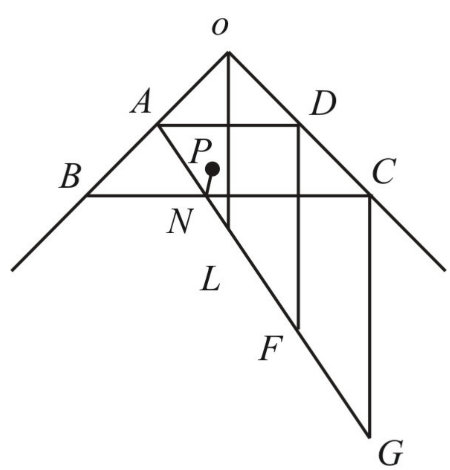
Hipócrates había reducido este problema al de la búsqueda de dos medias proporcionales entre dos rectas $a$ y $b$. De esta manera se tiene $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$. Si $a = 2,\ b = 1$, ello se reduce a $x^2 = 2y,\ y^2 = x$, y de esta manera $x^3 = 2y^3$, es decir, "el cubo de lado $x$ es de volumen doble que el de lado $y$". Observemos que en las ecuaciones $x^2 = ay$ y $xy = ab$ están las ecuaciones de lo que actualmente llamamos parábola e hipérbola equilátera (ambas son secciones cónicas).

¿Cómo procedió Menecmo para obtener tales ecuaciones? Las cónicas eran el lugar geométrico de los puntos de intersección de la superficie de un cono (acutángulo, obtusángulo o rectángulo) con un plano perpendicular a una de las generatrices del cono. Las secciones cónicas tuvieron un equivalente con las ecuaciones algebraicas.

Veamos el **caso de la parábola**. ([HEA]. Vol. II)

Según la figura adjunta, $OBC$ representa una sección a través del eje $OL$ de un cono - ángulo recto, y concibe una sección a través de $AG$, que es perpendicular a $OA$ y en ángulos rectos al plano de este papel. Si $P$ es cualquier punto sobre la curva y $PN$ es perpendicular a $AG$, sea $BC$ trazada a través de $N$ perpendicular al eje del cono. Entonces $P$ está sobre una sección circular del cono alrededor de $BC$ como diámetro.

Tracemos $AD$ paralelo a $BC$, y $DF$, $CG$ paralelos a $OL$, encontrando $AL$, extendido, en $F$ y $G$. Entonces $AD$ y $AF$ son ambos bisectados por $OL$.




Si ponemos, $PN = y,\ AN = x$, entonces $y^2 = PN^2 = BN.NC$. Pero,

$B$, $A$, $C$, $G$ son concíclicos; luego,

$$BN.NC = AN.NG = AN.AF = AN{,}2AL.$$

Luego,

$$y^2 = AN{,}2AL = 2AL.x$$

en donde se observa que $2AL$ es el "parámetro" de la ordenada principal $y$.

**Caso de la hipérbola (equilátera).** Según la figura adjunta ([HEA]. Vol. II), trazamos un cono con su ángulo - vértice $BOC$ siendo obtuso (o obtusángulo). Imaginemos una sección perpendicular al plano de este papel y que pasa a través de $AG$, el cual es perpendicular a $OB$. Extendamos $GA$ hasta encontrar $CD$ extendido en el punto $A'$ y procedamos en forma similar a lo hecho en el caso de la parábola.

Se tiene,

$$PN^2 = BN.NC = AN.NG\ .$$

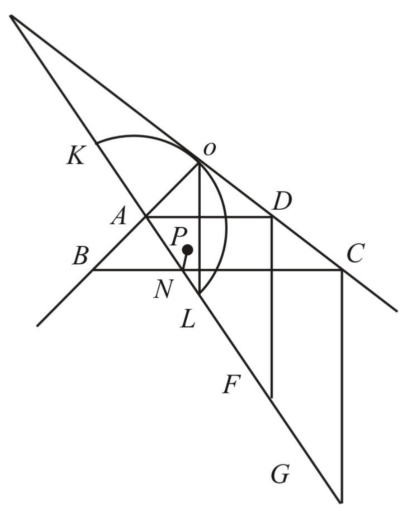
Por triángulos semejantes,

$$NG : AF = NC : AD = A'N : AA'\ .$$

Luego,

$$PN^2 = AN.A'N.\frac{AF}{AA'} = 2\ \frac{AL}{AA'}.AN.A'N\ ,$$

ecuación que caracteriza a la hipérbola, en donde $AA'$ es lo que llamamos el eje trasverso y $2AL$ es el parámetro de la ordenada principal.



Remarcamos que Menecmo introduce esas curvas como secciones de un cono circular recto con un plano perpendicular a una generatriz. La parábola fue llamada la sección de un cono rectángulo; la hipérbola a la sección de un cono obtusángulo, y la elipse a la sección de un cono acutángulo. **Aristeo** (aprox. 320 A.C.) también estudió a las secciones cónicas; escribió una importante obra al respecto, el "Libro de los Lugares Sólidos".

**Euclides** también se ocupó de las cónicas llegando a escribir un libro, el cual se perdió pero tenemos información de la obra a través de Pappus. Las propiedades fundamentales de las cónicas que Euclides considera son:

(i). $PN^2 : AN.A'N = P'N'^2 : AN'.A'N' = BC^2 : AC^2 \cdots$ para la elipse;

(ii). $PN^2 : AN.A'N = P'N'^2 : AN'.A'N' \cdots$ para la hipérbola;

(iii). $PN^2 = p_a.AN \cdots$ para la parábola.

El gran Arquímedes trabajó también con las secciones cónicas. Algunas de las propiedades a las que llegó este notable matemático fueron entre otras las siguientes (para las **cónicas centrales**).

(a). La propiedad de las ordenadas de cualquier diámetro $PP'$,

$$QV^2 : PV.P'V = Q'V'^2 : PV'.P'V'.$$

(b). La línea recta trazada desde el centro de una elipse, o el punto de intersección de las asintotas de una hipérbola, a través del punto de contacto a cualquier tangente, bisecta todas las cuerdas paralelas a la tangente.

(c). En la elipse, las tangentes en las extremidades de uno de los dos diámetros conjugados son ambos paralelos al otro diámetro.

(d). Si en una hipérbola la tangente en $P$ encuentra al eje transverso en $T$, y $PN$ es la ordenada principal, entonces $AN > AT$.

(e). Si un cono, recto o oblicuo, es cortado por un plano encontrando todos los generadores, la sección es o un círculo o una elipse.

**Nota.** Arquímedes proporciona criterios para la semejanza de cónicas y de secciones de cónicas, lo que hizo de un modo similar a como lo dió Apolonio.

Respecto a la **parábola**, Arquímedes proporcionó también algunas propiedades fundamentales, como son las siguientes.

(a). En una parábola, si $p_a$ representa el parámetro de las ordenadas principales y $p$ es el parámetro de las ordenadas del diámetro $PV$, las propiedades fundamentales aparecen en la forma:

$$PN^2 : P'N'^2 = AN : AN' \qquad \text{ó} \qquad PN^2 = p_a.AN \ ,$$

$$QV^2 : Q'V'^2 = PV : PV' \qquad \text{ó} \qquad QV^2 = p.PV.$$

**Nota.** Arquímedes se refiere solamente como "parámetro" al parámetro de las coordenadas principales.

(b). Cuerdas paralelas son bisecadas por una línea recta paralela al eje, el cual pasa a través del punto de contacto de la tangente paralela a las cuerdas.

(c). Todas las parábolas son semejantes.

(d). Si la tangente en $Q$ encuentra el diámetro $PV$ en $T$, y $QV$ es la ordenada al diámetro, entonces $PV = PT$.

### 2.3.3. Descripción de los Libros de las Cónicas.

Apolonio escribió bellos prefacios a sus libros en donde da importantes referencias históricas de la evolución de las ideas sobre las cónicas. Veamos algunos aspectos de tales prefacios.

**Libro I.** En la introducción de este libro, Apolonio dice a Eudemo ([HEA]. Vol. II, pag. 128): $\ll \cdots$ De los ocho libros, en los primeros cuatro se encuentran los elementos de la teoría. El **primero** contiene la generación de las tres secciones cónicas y de las secciones opuestas, así como sus principales propiedades expuestas de una manera más completa y general de lo que lo habían hecho nuestros predecesores. El **segundo libro** se refiere a los diámetros y ejes de las secciones y a las asíntotas, elementos que tienen una importancia aun mayor y esencial en los diorismas; en ese mismo libro se dan las definiciones de diámetros y de ejes. El **tercer libro** encierra muchos teoremas notables, útiles en la síntesis y diorismas de los lugares sólidos; en su mayoría son hermosos y nuevos. Después de haberlos descubierto advertí que Euclides no había obtenido la síntesis de los lugares relativos a las tres rectas y a las cuatro rectas; aún más, que no era posible completar adecuadamente esta síntesis sin los teoremas que yo he descubierto.

El **cuarto libro** enseña de cuántas maneras pueden intersecarse dos cónicas o una cónica y una circunferencia, y muchas otras cosas que mis predecesores no han advertido, como el número de puntos en que dos secciones opuestas cortan a una cónica o a una circunferencia o a otras dos secciones opuestas. Los otros cuatro libros comprenden consideraciones de orden superior. En efecto, el **quinto** trata ampliamente de máximos y mínimos; el **sexto** de cónicas iguales o semejantes; el **séptimo** de teoremas relativos a los diorismas, y el **octavo** contiene problemas sobre las cónicas en los cuales se imponen condiciones mediante diorismas ≫ .

**Libro II.** El prefacio de este libro dice solamente que Apolonio está enviando el segundo libro a Eudemo vía su hijo Apolonio, y suplica a Eudemo que lo comunique a sus jóvenes estudiantes interesados en el tema, y en particular a Filónides, el geómetra a quien Apolonio presentó a Eudemo.

**Libro III.** Este libro no tiene prefacio alguno. Se informa que la obra fue enviada a Eudemo.

**Libro IV.** Apolonio se dirije a Atalo (posiblemente el rey Atalo I de Pérgamo, quién reinó en el período 241 - 197 A.C.):

≪ Hace un tiempo yo expuse y envié a Eudemo de Pérgamo los primeros tres libros de mis cónicas que yo he recopilado en ocho libros, pero como él ha fallecido, he decidido dedicar el resto de mis libros a Usted por su temprano deseo de poseer mis trabajos. Este libro contiene una discusión de la cuestión de saber en cuantos puntos a lo mas es posible para que secciones de conos encuentre a otra y la circunferencia de un círculo, bajo la hipótesis de que ellos no coinciden en todas partes, y además en cuantos puntos a lo más una sección de un cono o la circunferencia de un círculo puede encontrar la hipérbola con dos ramas; y además de esas cuestiones, el libro considera un número de otras (cuestiones) de similar tipo.

$\cdots$

Todas las materias referidas, las cuales yo no las he encontrado en parte alguna, requiere para su solución varios y diversos nuevos teoremas, la mayoría de los cuales yo tengo encontrado y fueron puestos en los tres primeros libros, mientras que el resto de ellos están contenidos en el presente libro. Esos teoremas son de considerable uso ambos para la síntesis de problemas y para los diorismas.

$\cdots \gg$ .

**Libro V.** Apolonio saluda nuevamente a Atalo.

$\ll$ En este quinto libro yo he tratado proposiciones relativas a líneas rectas relacionadas con máximos y mínimos. Usted debe saber que mis predecesores y contemporáneos han tocado solo superficialmente sobre la investigación de las líneas mas cortas, y tienen solamente probado que líneas rectas tocan las secciones y conversamente, que propiedades ellos tienen en virtud de los cuales ellos son tangentes. Por mi parte, yo tengo probado esas propiedades en mi primer libro, ya que como yo deseé colocar ellas en cerrada conexión con aquella parte del tema en el cual yo trato sobre la producción de las tres secciones cónicas, en orden a demostrar al mismo tiempo que en cada de las tres secciones incontables propiedades y resultados necesarios aparecen, como ellos hacen con referencia al diámetro (transverso) original. Las proposiciones en el cual yo discuto las líneas mas cortas yo tengo separado ellas en clases, y yo tengo tratado con cada caso individual vía una cuidadosa demostración; yo tengo también conectado la investigación de ello con la investigación de las mas grandes líneas antes mencionadas, porque yo consideré que aquellos quienes cultivan esta ciencia necesitan de esos resultados para obtener un conocimiento del análisis y determinar los límites de posibilidades, de problemas asi como de sus síntesis; en adición a los cuales, el tema es uno de aquellos los cuales parecen ser dignos de estudio por su propia causa. Adios. $\gg$

**Libro VI.** Apolonio saluda a Atalo.

$\ll$ Le envió a usted el sexto libro de las cónicas, el cual abarca proposiciones acerca de secciones cónicas y segmentos de cónicas iguales y desiguales, semejantes y no semejantes, además otras materias no tratadas por quienes me han precedido. En particular, usted encontrará en este libro como, en un cono recto dado, una sección puede ser cortada la cual es igual a una sección dada, y como un cono recto puede ser descrito semejante a un cono dado pero tal que contenga a una sección cónica dada. Y esas materias en verdad yo tengo tratado algo mas completa y claramente que aquellos quienes escribieron antes de mi época sobre esos temas. Adios. ≫

**Libro VII.** Apolonio saluda a Atalo.

≪ Yo envió a usted con esta carta el séptimo libro sobre secciones cónicas. En el está contenido un gran número de nuevas proposiciones concernientes con diámetros de secciones y las figuras descritas sobre ellas; y todas esas proposiciones tienen su uso en muchas clases de problemas, especialmente en la determinación de los límites de sus posibilidades. Varios ejemplos de ello ocurre en determinados problemas sobre cónicas resueltos y demostrados por mi en el octavo libro, el cual está en forma de un apéndice, y el cual yo enviaré a usted tan pronto como sea posible. Adios. ≫

Luego de la presentación de tales importantes prefacios, a manera de completitud y mejor comprensión de los contenidos, repasemos sucintamente lo tratado en los siete mencionados libros ([REY-BAB]).

**Libro I:** Trata la posición relativa de una recta respecto de un cónica; construye la tangente en un punto y concluye que: "la tangente y una secante que pasan por un punto de una cónica, separan armónicamente los extremos del diámetro conjugado a la dirección de la secante". Concluye diciendo, entre otros aspectos: "dada una cónica cualquiera, siempre existe una superficie cónica de sección circular de la cual esa cónica es una sección".

**Libro II:** En este libro Apolonio estudia en general a la hipérbola y a sus asíntotas; observa que "las secciones opuestas tienen las mismas asíntotas".

**Libro III:** Apolonio estudia las propiedades relativas a los triángulos y cuadriláteros inscritos y circunscritos, las que él usa en los "problemas de las tres rectas y de las cuatro rectas", los que han de influir en el nacimiento de la geometría analítica. Trata también sobre los polos y polares de las cónicas, asi como también de los focos de la elipse y de la hipérbola. Hay que remarcar que Apolonio no trata al foco de la parábola ni a las directrices de las cónicas.

**Libro IV:** En este libro Apolonio estudia las intersecciones y los contactos de las cónicas o de las cónicas con las circunferencias. Por ejemplo, establece que dos cónicas no pueden tener mas de cuatro puntos comunes, lo que prueba con un argumento por el absurdo.

**Libro V:** Es el libro por excelencia por la calidad de sus resultados. Apolonio estudia las distancias máxima y mínima de un punto a los puntos de una cónica en su plano, es decir, investiga a las rectas normales a los puntos de la cónica que pasan por un punto dado. Apolonio resuelve el problema probando que los pies de las normales que pasan por un punto fijo se encuentran sobre una hipérbola, la "hipérbola de Apolonio" como la llamamos actualmente; la solución del problema lo obtiene intersectando esta hipérbola con la cónica dada.

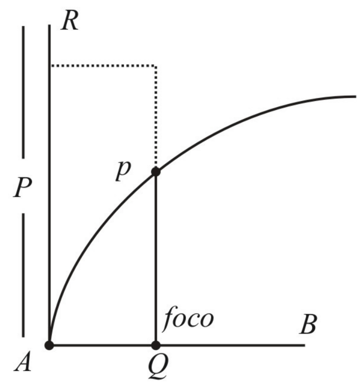
**Libro VI:** Es un libro en que Apolonio no hace grandes contribuciones, como lo hizo en el libro anterior. Trata la congruencia y la semejanza de las cónicas. Su mayor interés radica en completar y clarificar los trabajos hechos por los matemáticos antes de él, como lo hecho por Arquímedes, por ejemplo.

**Libro VII:** Apolonio contribuye nuevamente con temas originales; estudia los máximos y los mínimos de ciertas funciones de los diámetros de las cónicas, probando diversas propiedades importantes. Uno de tales resultados es: "la suma (caso de la elipse) o la diferencia (hipérbola) de los cuadrados construidos sobre un par de diámetros conjugados, es constante". Prueba también que "el rectángulo construido sobre un par de diámetros, es constante"

**Nota.** El Libro VIII se perdió pero contendría algunos problemas planteados en el Libro VII. Muchos años después, el astrónomo Halley lo reconstruyó en base a datos que dió el mismo Apolonio asi como de los comentarios hechos por el historiador Pappus.

Volviendo a los precursores de las cónicas digamos que cuando los pitagóricos aplicaron un rectángulo a un segmento de línea (esto es, colocaron la base del rectángulo a lo largo de un segmento de línea, con un extremo sobre la base coincidiendo con un extremo del segmento), ellos proclamaron que tenían el caso de una "**elipse**", de una "**parábola**" o de una "**hipérbola**" según como la base del rectángulo aplicado cae mas corto que el segmento de línea, exactamente coincide con el, o excede al segmento.

Sea $AB$ el eje principal de la cónica, $P$ un punto cualquiera sobre la cónica, y $Q$ al pie de la perpendicular $PQ$ a $AB$. Por $A$, el cual es el vértice de la cónica, trazamos una perpendicular a $AB$ y delimitamos sobre ella una distancia $AR$ igual a aquello que actualmente llamamos el "lado recto", o parámetro $p$, de la cónica. Aplicamos, al segmento $AR$, un rectángulo teniendo $AQ$ como un lado y área igual a $(PQ)^2$.




Según como la aplicación cae mas corto, coincide con, o excede al segmento $AR$, Apolonio llamó a la cónica una elipse, una parábola o una hipérbola.

Expliquemos esta situación con los recursos de álgebra. Si consideramos la curva referida al sistema de coordenadas cartesianas teniendo sus ejes $x$ e $y$ a lo largo de $AB$ y $AR$ respectivamente, y si $P = (x, y)$, entonces la curva es una elipse, una parábola o una hipérbola según se tenga

$$y^2 < px \quad , \qquad y^2 = px \qquad \text{ó} \qquad y^2 > px \ .$$

En realidad, en los casos de la elipse y la hipérbola, se tiene

$$y^2 = px \mp \frac{px^2}{d} \ ,$$

donde $d$ es la longitud del diámetro a través del vértice $A$.

**Conclusión:** ¡ la geometría analítica fue una invención de los griegos !

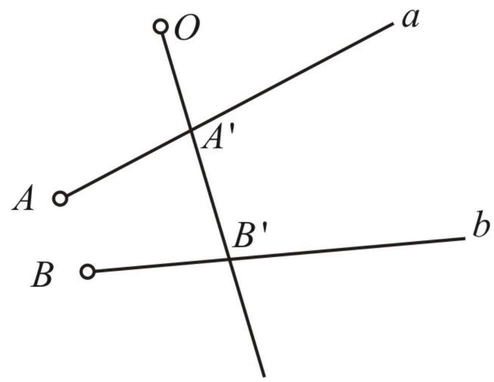
Apolonio en su Libro III considera una gran variedad de teoremas, como son, por ejemplo, los siguientes:

- "Si las tangentes en cualquier dos puntos $A$ y $B$ de una cónica se intersectan en $C$ y también intersectan los diámetros, a través de $B$ y $A$, en $D$ y $E$, entonces los triángulos $CBD$ y $CAE$ tienen la misma área".

- "Si dos cuerdas $PQ$ y $MN$, paralelas a dos direcciones dadas, se intersectan en $O$, entonces $\dfrac{PO.OQ}{MO.ON}$ es constante, independiente de la posición de $O$".

Gran parte del conocimiento del trabajo matemático de Apolonio le debemos a Pappus, quién dió breves indicaciones del contenido de otros seis trabajos del gran geómetra; lamentablemente solo uno de tales trabajos ha sobrevivido al tiempo, "Sobre la Sección Proporcional", en el que considera el problema general:

$\ll$ Dadas dos líneas $a$ y $b$ con puntos fijos $A$ sobre $a$ y $B$ sobre $b$, trazar a través de un punto dado $O$ una línea $OA'B'$ cortando $a$ en $A'$ y a $b$ en $B'$, tal que $\dfrac{AA'}{BB'} = k,\ k$ una constante dada $\gg$ .




Se afirma que Apolonio consideró 77 diferentes casos de este problema. Una segunda cuestión es, bajo las anteriores hipótesis, se considera ahora la condición,

$$(AA')\,(BB') = k.$$

Un tercer problema establece: $\ll$ dado cuatro puntos $A,\ B,\ C$ y $D$ sobre una línea, encontrar un punto $P$ sobre la línea tal que $\dfrac{AP.CP}{BP.DP} = k \gg$ .

Otros dos teoremas son:

- $\ll$ Si $A$ y $B$ son puntos fijos y $k$ es una constante dada, entonces el lugar geométrico de un punto $P$ tal que $\dfrac{AP}{BP} = k$, es un círculo (si $k \neq 1$) o una línea recta (si $k = 1$). El círculo es llamado "**el círculo de Apolonio**"$\gg$ .

- $\ll$ Si $A$, $B$, ... son puntos fijos y $a$, $b$, ..., $k$ son constantes dadas, entonces el lugar geométrico de un punto $P$ tal que

$$a\,(AP)^2 + b\,(BP)^2 = k,$$

es un círculo $\gg$ .

Otro fundamental resultado debido a este notable geómetra es:

- $\ll$ Si una misma esfera pasa a través de los vértices de un icosaedro y por los vértices de un dodecaedro, entonces tenemos

$$\frac{\text{área de la superficie del dodecaedro}}{\text{área de la superficie del icosaedro}} = \frac{\text{volumen del dodecaedro}}{\text{volumen del icosaedro}} \gg .$$

Apolonio descubrió a la **transformación inversa**. Veamos algunos argumentos. Sea $r$ un número positivo. Sea $P$ un punto en el segmento $OP'$. Se dice que $P$ y $P'$ son **inversos entre si** con respecto a la circunferencia de centro $O$ y radio $r$, si

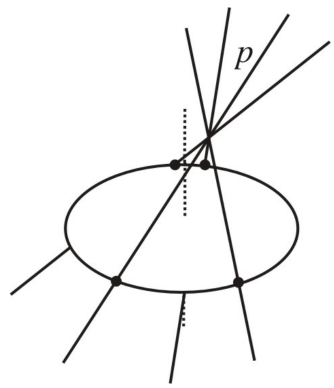
$$OP.OP' = r^2.$$

Obsérvese que un punto sobre la circunferencia es inverso de sí mismo. Apolonio dedujo una serie de interesantes resultados en esta dirección. En su libro perdido, "Tangencias", Apolonio (usando la inversión) vía regla y compás construye una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas.

### 2.3.4. Algunos Resultados Matemáticos.

Apolonio fue un gran geómetra; la calidad matemática de su obra asi lo amerita; las "Cónicas" fueron escritas con un especial lenguaje, a veces difícil de seguir (aún en nuestra época). Sus ideas son de gran originalidad; se puede afirmar que el estuvo mas cerca de los geómetras de los siglos XVII y XVIII que los de su época. Euclides simboliza a la geometría básica, Apolonio a la geometría superior.

Apolonio comienza su gran obra describiendo un cono circular doble oblicuo en el mas amplio contexto. Asi nos dice, dado un círculo y cualquier punto fuera del plano del círculo y que en general no está sobre la línea recta a través del centro y perpendicular a su plano, una línea recta pasando por el punto y prolongada indefinidamente en ambas direcciones es hecha moverse, siempre pasando a través del punto fijo, asi como pasando sucesivamente a través de todos los puntos del círculo. De esta manera, la línea recta describe un cono doble, el cual es en general un cono oblicuo, y que Apolonio llamó un cono "escaleno".




Luego Apolonio dá diversas definiciones. Nos dice:

"En cualquier curva, yo doy el nombre de **diámetro** a cualquier línea recta la cual, trazada desde la curva, bisecta a todas las líneas rectas trazadas (cuerdas) paralelas a cualquier línea recta, y yo llamo la **extremidad** de la línea recta (el diámetro) el cual está sobre la curva un **vértice** de la curva y cada una de las líneas rectas paralelas (cuerdas) una **ordenada** al diámetro".

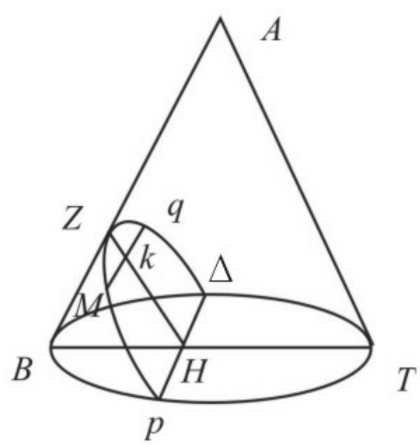
Apolonio da el nombre de **diámetro transverso** "a cualquier línea recta que bisecta a todas las cuerdas en ambas curvas (hipérbola con dos ramas) las cuales son paralelas a una línea recta dada, y el nombre de **diámetro erecto** a cualquier línea recta la cual bisecta a todas las líneas rectas trazadas entre una curva y la otra las cuales son paralelas a cualquier línea recta; las **ordenadas** a cualquier diámetro son aún las líneas rectas paralelas bisectados por ella. Los **diámetros conjugados** en cualquier curva o par de curvas son líneas rectas cada una de las cuales bisectan cuerdas paralelas a las otras. **Ejes** son los diámetros particulares los cuales cortan en ángulos rectos a las cuerdas paralelas las cuales ellas bisectan; y **ejes conjugados** están relacionados en la misma forma como los diámetros conjugados.

Luego de haber descrito a un cono, en general oblicuo, Apolonio define al **eje** como la línea recta trazada desde el vértice al centro de la base circular. Verifica que todas las secciones paralelas a la base son círculos, pero observa de que existe otro conjunto de secciones circulares diferentes de aquellas !

Veamos lo que nos dice Apolonio respecto a la construcción de las cónicas.

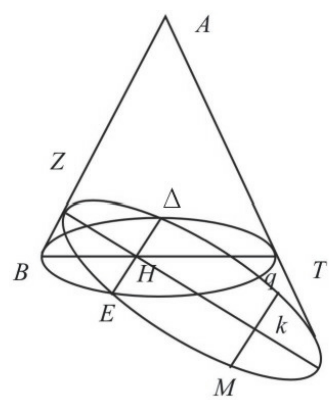
≪ **Proposición 7.** "Si se corta un cono con un plano a través del eje, y si se corta también con otro plano que corte el plano en el cual está la base del cono según una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial ("el triángulo a través del eje") o a la base formada, el plano que corta formará una sección en la superficie del cono, y las líneas rectas trazadas en él paralelas a la línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, encontrarán la sección común del plano que corta y el triángulo axial, y prolongándolas hasta la otra parte de la sección, serán bisectadas por éste; si el cono es recto, la línea recta en la base será perpendicular a la sección común del plano que corta y el triángulo axial; pero si es escaleno no será siempre perpendicular sino sólo cuando el plano a través del eje sea perpendicular a la base del cono".

Consideremos un cono con vértice en el punto $A$ teniendo como base al círculo $BT$; cortémoslo por un plano a través del eje; esta sección forma al triángulo $ABT$. Cortémoslo con otro plano que corte el plano que contiene el círculo $BT$ en una línea recta $\Delta E$, que, o es perpendicular a $BT$ o a la prolongación de $BT$, y forme la sección $\Delta ZE$ en la superficie del cono; la sección común del plano que corta y del triángulo $ABT$ es $ZH$. Tomemos un punto $\theta$ en $\Delta ZE$, y tracemos $\theta K$ por $\theta$, paralela a $\Delta E$.




Digo que $\theta K$ encuentra a $ZH$, y que si se prolonga la otra parte de la sección $\Delta ZE$, será bisectada por la línea $ZH$.

Puesto que el cono cuyo vértice es el punto $A$ y su base el círculo $BT$, está cortado por un plano a través del eje y la sección resultante es el triángulo $ABT$, y se ha tomado un cierto punto $\theta$ en la superficie, que no está en ningún lado del triángulo $ABT$, y $\Delta H$ es perpendicular a $BT$, por lo tanto la línea recta trazada a través de $\theta$ y paralela a $\Delta H$, que es $\theta K$, encontrará al triángulo $ABT$ y, si se prolonga a la otra parte de la superficie, estará bisectada por el triángulo. Asi pues, como la línea recta trazada a través de $\theta$ y paralela a $\Delta E$ encuentra al triángulo $ABT$ y está en el plano que contiene la sección $\Delta ZE$, pertenecerá a la sección común del plano que corta y el triángulo $ABT$.




Pero la sección común de estos planos es $ZH$; por lo tanto, la línea recta trazada a través de $\theta$ y paralela a $\Delta E$, encontrará a $ZH$; y si se prolonga a la otra parte de la sección $\Delta ZE$, será bisectada por la línea recta $ZH$.

Ahora bien, o el cono es recto, o el triángulo axial es perpendicular al círculo $BT$, o no ocurre ni una cosa ni otra.

Supongamos primero que el cono es recto; el triángulo $ABT$ será perpendicular al círculo $BT$ ([Euclides. XI, 18]). Como el plano $ABT$ es perpendicular al plano $BT$, y se traza $\Delta E$ en uno de los planos perpendiculares a su sección común $BT$, $\Delta E$ será perpendicular al triángulo $ABT$ ([Euclides. XI, Def. 4]); por lo tanto, es perpendicular a todas las líneas rectas del triángulo $ABT$ que la encuentran ([Euclides. XI, Def. 3]). Por lo tanto, es perpendicular a $ZH$.

Supongamos ahora que el cono no sea recto. Si el triángulo axial es perpendicular al círculo $BT$, podemos demostrar igualmente que $\Delta E$ es perpendicular a $ZH$. Supongamos que el triángulo axial $ABT$ no es perpendicular al círculo $BT$. Digo que $\Delta E$ tampoco es perpendicular a $ZH$. Porque si así fuese, $\Delta E$ también sería perpendicular a $BT$. Por lo tanto, resulta $\Delta E$ perpendicular al plano que pasa por $BT$, $ZH$ ([Euclides XI, 4]). Pero el plano que pasa por $BT$, $ZH$ es $ABT$; luego $\Delta E$ es perpendicular al triángulo $ABT$. Por consiguiente, todos los planos por $\Delta E$ son perpendiculares al triángulo $ABT$ ([Euclides XI, 18]). Pero el círculo $BT$ es uno de los planos que pasa por $\Delta E$; por lo tanto, el círculo $BT$ es perpendicular al triángulo $ABT$. Por lo tanto, el triángulo $ABT$ es perpendicular al círculo $BT$; lo cual es contrario a la hipótesis. Por consiguiente, $\Delta E$ no es perpendicular a $ZH$. $\blacksquare$ $\gg$

$\ll$ **Corolario.** "Está claro de esto que $ZH$ es un diámetro de la sección $\Delta ZE$, porque bisecta las líneas rectas trazadas paralelamente a la línea recta dada $\Delta E$, y estas paralelas pueden ser bisectadas también por el diámetro $ZH$, sin que sean perpendiculares a él". $\gg$

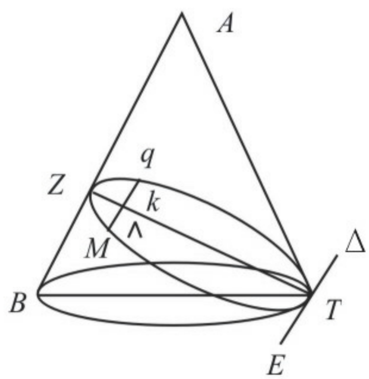
Ahora pasemos a describir lo que Apolonio llama parábola, hipérbola y elipse. ([FAU-GRA]).

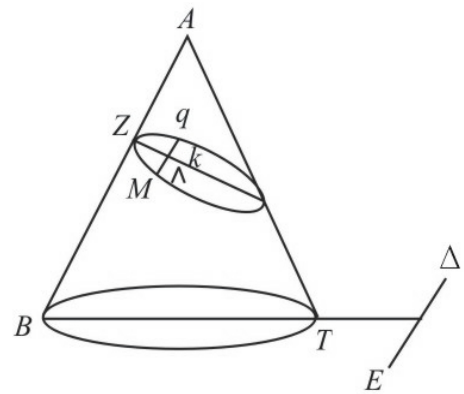
$\ll$ **Proposición 11. Libro I.** "Si se corta un cono con un plano a través del eje, y si se corta también con otro plano que corta la base del cono según una línea perpendicular a la base del triángulo axial, y si además el diámetro de la sección se hace paralelo a un lado del triángulo axial, cualquier línea recta trazada desde la sección del cono paralela a la sección común del plano que corta y la base del cono hasta el diámetro de la sección, tendrá su cuadrado igual al rectángulo limitado por la porción de diámetro que comprende en la dirección del vértice de la sección y otra línea recta cualquiera; esta línea recta tendrá la misma razón a la porción abarcada entre el ángulo del cono y el vértice del segmento como el cuadrado en la base del triángulo axial al rectángulo limitado por los dos lados restantes del triángulo; llamemos a esta sección **parábola**.

**En efecto**, sea un cono, cuyo vértice es el punto $A$ y cuya base es el círculo $BT$; cortémosle con un plano a través del eje; la sección obtenida el triángulo $ABT$. Cortemos el cono con otro plano que corte su base según una línea recta $\Delta E$ perpendicular a $BT$; la sección obtenida en la superficie del cono es $\Delta ZE$. El diámetro de la sección $ZH$ es paralelo a $AT$, uno de los lados del triángulo axial; tracemos $Z\theta$ perpendicular a $ZH$, siendo

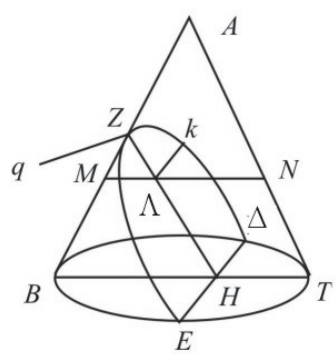
$$BT^2 : BA.AT = Z\theta : ZA.$$

Tomemos al azar un cierto punto de la sección y tracemos a través de $K$, $K\Lambda$ paralela a $\Delta E$. Digo que $K\Lambda^2 = \theta Z.Z\Lambda$.




En efecto, tracemos $MN$ a través de $\Lambda$, paralelo a $BT$. Como $K\Lambda$ es paralela a $\Delta E$, el plano que pasa por $K\Lambda$, $MN$ es paralelo al plano que pasa por $B\Delta$, $\Delta E$ ([Euclides XI, 15]), que es la base del cono. Por consiguiente, el plano que pasa por $K\Lambda$, $MN$ es un círculo, cuyo diámetro es $MN$ [Proposición 4]. Y $K\Lambda$ es perpendicular a $MN$, puesto que $\Delta E$ es perpendicular a $BT$ ([Euclides XI, 10]).




Luego, $M\Lambda.\Lambda N = K\Lambda^2$. Y puesto que $BT^2 : BA.AT = \theta Z : ZA$ y $BT^2 : BA.AT = (BT : TA)\,(BT : BA)$ tendremos,

$$\theta Z : ZA = (BT : TA)\,(TB : BA)\,.$$

Pero, $BT : TA = MN : NA = M\Lambda : \Lambda Z$, ([Euclides VI, 4]), y $BT : TA = MN : MA = TM : MZ = NT : ZA$ ([Euclides VI, 2]).

Luego, $\theta Z : ZA = M\Lambda : \Lambda Z$.

Sin embargo se tiene

$$(M\Lambda : \Lambda Z)\,(\Lambda N : ZA) = M\Lambda.\Lambda N : \Lambda Z.ZA.$$

Por lo que

$$\theta Z : ZA = M\Lambda.\Lambda N : \Lambda Z.ZA.$$

Pero $\theta Z : ZA = \theta Z.Z\Lambda : \Lambda Z.ZA$, tomando una altura común $Z\Lambda$; será

$$M\Lambda.\Lambda N : \Lambda Z.ZA = \theta Z.Z\Lambda : \Lambda Z.ZA.$$

Por lo que $M\Lambda.\Lambda N = \theta Z.Z\Lambda$ ([Euclides V, 9]).

Pero $M\Lambda.\Lambda N = K\Lambda^2$ y también $K\Lambda^2 = \theta Z.Z\Lambda$.

Llamemos a esta sección **parábola** y llamemos **lado recto** a $\theta Z$, **parámetro de las ordenadas** al diámetro $ZH$. $\gg$■

$\ll$ **Proposición 12. (Libro I).** "Si un cono es cortado por un plano por el eje y también por otro plano que corte a la base según una perpendicular a la base del triángulo por el eje ["triángulo axial"]; si el diámetro de la sección encuentra uno de los lados del triángulo por el eje además del vértice; una ordenada de la sección formará un cuadrado igual al rectángulo comprendido bajo la abcisa ("es el segmento del diámetro, que se comprende entre la ordenada y el vértice de la sección") correspondiente y bajo una cuarta proporcional al cuadrado de la paralela al diámetro, conducida por el vértice del cono y terminada en la base, al rectángulo comprendido bajo las partes de la base del triángulo por el eje determinadas por esta paralela, y la parte del diámetro comprendida entre los lados del triángulo por el eje; y mas un espacio semejante y semejantemente colocado, en relación a lo que sería comprendido bajo esta cuarta proporcional y a la parte del diámetro comprendida entre los lados del triángulo por el eje. Y sea tal una sección llamada una **hipérbola**." $\gg$

Observemos que a tal sección Apolonio llama una hipérbola en analogía con los antiguos problemas de aplicación de áreas ya que en esta curva asi determinada, el cuadrado de la ordenada **es mayor** que el rectángulo de la abcisa por la cuarta proporcional o el lado recto. En el caso de la **elipse** se tiene que el cuadrado de la ordenada **es menor** al rectángulo correspondiente de la abcisa por su lado recto; en el caso de la parábola se tiene la **igualdad**.

La **elipse** es definida en la Proposición 13, contenida en el Libro I. En este libro Apolonio considera resultados sobre las tangentes y los diámetros. Asi tenemos los siguientes resultados.

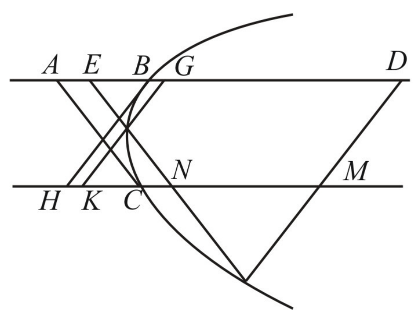
$\ll$ **Proposición 46.** "Si una línea recta tocando a una parábola encuentra el diámetro, la línea recta trazada a través del punto de contacto y paralela al diámetro en la dirección de la sección bisecta a las líneas rectas trazadas en la sección paralelas a la tangente".

La visualización de esta proposición es dada en la figura [d] ([FAU-GRA], pág. 189).

[**Prueba**]. Sea la parábola cuyo diámetro es la línea $ABD$, y sea la línea recta $AC$ la que toca a la sección [Libro I. 24], y a través de $C$ sea la línea recta $HCM$ trazada paralela a la línea recta $AD$ [Libro I. 26], y sea algún punto $L$ tomado al azar sobre la sección, y sea la línea recta $LNFE$ [Libro I. 18, 22] trazada paralela a $AC$.

Yo digo que $LN = NF$.

Sean las líneas rectas $BH$, $KFG$ y $LMD$ trazadas convenientemente. Desde que ellas por




las cosas ya conocidas en el teorema 42, Libro I, triángulo $ELD =$"pllg."$BM$, y triángulo $EFG =$"pllg."$BK$, y por tanto los restos pllg $GM =$ cuadrilátero $LFGD$.

Sea el pentágono común $MDGFN$ a ser substraido; por consiguiente los residuos

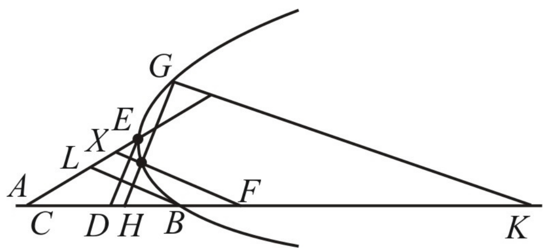
$$\text{triángulo } KFN = \text{triángulo } LMN.$$

Y $KF$ es paralelo a $LM$; por tanto $FN = LN$ [Euclides Elementos, VI. 22, lema]. $\gg$

$\blacksquare$

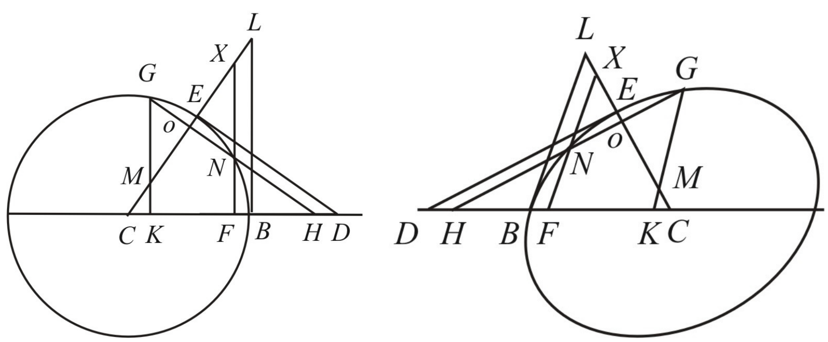
≪ **Proposición 47.** Si una línea recta toca a una hipérbola o a una elipse o a una circunferencia de un círculo, encuentra al diámetro y si a través del punto de contacto y el centro una línea recta es trazada en la dirección de la sección, ella bisecta a las líneas rectas trazadas en la sección paralelas a la tangente.

[**Prueba**]. Sea una hipérbola o elipse o circunferencia de un círculo cuyo diámetro es la línea recta $AB$ y centro $C$, y sea la línea recta $DE$ trazada tangente a la sección, y sea la línea recta $CE$ estirada, y sea $N$ un punto tomado al azar sobre la




sección, y a través de $N$ sea la línea recta $HNOG$ trazada paralela.

Yo digo que $NO = OG$.




([FAU-GRA], pag. 190)

Porque sean las líneas rectas $XNF$, $BL$ y $GMK$. Por cosas que sabemos ya en el teorema 43 (Libro I),

$$\text{triángulo } HNF = \text{cuadrilátero } LBFX$$

y

$$\text{triángulo } GHK = \text{cuadrilátero } LBKM \ .$$

Luego los restos

$$\text{cuadrilátero } NGKF = \text{cuadrilátero } MKFX \ .$$

Sea el pentágono común $ONFKM$ substraido; luego los restos

$$\text{triángulo } OMG = \text{triángulo } NXO \ .$$

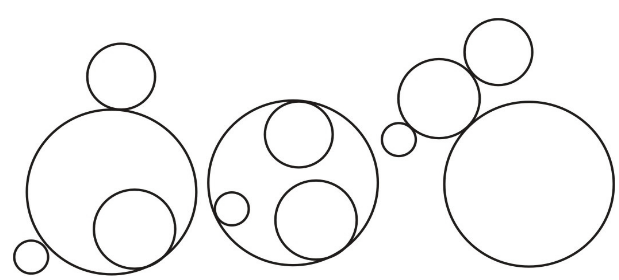
Y la línea recta $MG$ es paralela a la línea recta $NX$; luego $NO = OG$ ([Euclides. Elementos, VI. 22, lema]). ≫

■

• **El Problema de Apolonio.** De un modo general, este problema consiste en "dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia

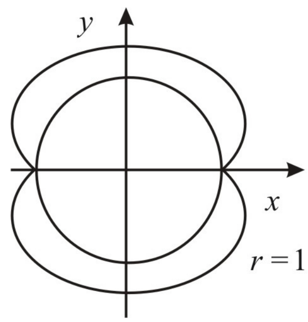
trazar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los elementos dados".

Remarcamos que en caso el elemento dado sea un punto, una circunferencia tangente al punto significa que la circunferencia pasa a través del punto. Ya en los Elementos de Euclides se había resuelto el problema de construir una circunferencia tangente a tres puntos o a tres rectas dadas. El caso complejo es cuando los tres elementos son tres circunferencias. Este caso tiene ocho respuestas. Algunas de ellas pueden ser visualizadas como sigue.



Se conjetura que Apolonio no haya resuelto todos los casos posibles, en particular cuando se dan tres circunferencias. Muchos años después Newton resolvió este caso usando solo regla y compás, como se exigía.

• Apolonio cultivó también la astronomía aportando diversas ideas. Él fue el primero en sugerir que la Luna y los planetas se mueven en órbitas epicicloides. Si bien es cierto esta hipótesis es errada, ella tuvo alguna influencia en el desarrollo de la matemática. La idea es como sigue.



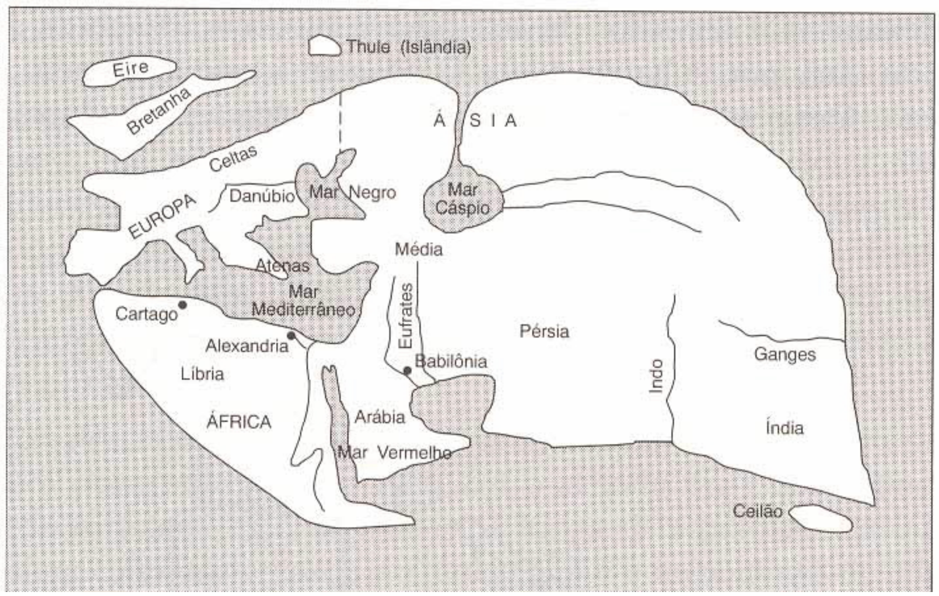

Imaginemos un círculo, $r \leq 1$, rodando alrededor de la parte externa del círculo $x^2 + y^2 = 4$. Sea $P$ un punto sobre el círculo rodante y supongamos que en el tiempo $t = 0$, $P$ toca al círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(2, 0)$. El círculo de radio $r$ rueda en el sentido antihorario, viajando con una razón uniforme y retornando a su posición inicial en $2\pi$ segundos. La trayectoria trazada por $P$ se llama una **epicicloide**. Cuando $r = 2$, ella se llama una **cardioidi** y si $r = 1$, se llama una **neroide**.

## 2.4. ERATÓSTENES (de Cirene).

### 2.4.1. Algunos Aspectos Biográficos.

Eratóstenes vivió en el período 275 - 195 A.C. y nació en Cirene; fue ligeramente mas joven que Arquímedes y vivió muchos años en Atenas, en donde fue considerado un pensador de una vasta cultura pues se destacó en diversas áreas, como son la poesía, la matemática, la astronomía, la historia, la filosofía y llegó a ser un destacado atleta. Cuando tuvo alrededor de 40 años fue invitado por Ptolomeo III Filopator de Egipto para que sea jefe de la Biblioteca de Alejandría y para que sea tutor de su hijo, quien sería mas tarde Ptolomeo Filadelfo. Estando ya Eratóstenes en Alejandría cuando recibió de Arquímedes su obra el Tratado en reconocimiento a la alta estima que le tenía el famoso autor de tal obra. Eratóstenes fue un especial personaje por su condición de sabio enciclopedista en el período greco-alejandrino. Sus amigos lo llamaban "beta" posiblemente porque "alfa" era Arquímedes; los estudiantes de Alejandría lo llamaban "Pentathlos" por ser campeón en las cinco especialidades deportistas. Realizó importantes trabajos sobre cronología que permitieron distinguir entre las leyendas y los hechos reales.

Entre sus diversos aportes, Eratóstenes hizo un mapa del mundo de su época.




([EVE], pag. 198)

Con edad avanzada y debido a una enfermedad, Eratóstenes quedó casi ciego; amargado por esta situación decidió suicidarse dejando voluntariamente de comer.

### 2.4.2. Algunas Contribuciones.

- **La Criba de Eratóstenes.** La criba de Eratóstenes es una regla aritmética para determinar los números primos menores que un número dado $n$ ($n = 100$, por ejemplo). Es un interesante método que aún se le enseña en nuestra época. La idea es escribir los números naturales en forma ordenada; comenzando con 3 se anotan todos los números impares menores que $n$; se eliminan todos los números compuestos de esta sucesión tachándose, a partir de 3 (exclusive) todos los terceros números que se siguen; luego, a partir de 5 (exclusive) todos los quintos números que se siguen, y asi sucesivamente. Según este método algunos números se tachan mas de una vez.

**Conclusión:** todos los números no tachados, mas el número 2, son todos los números primos menores que $n$.

Como una actividad para el lector, según el siguiente cuadro, determine todos los números primos menores que 100.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,

20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,

36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,

52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67,

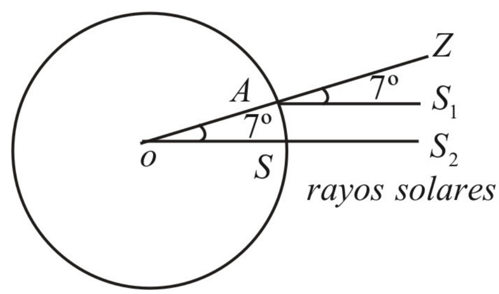
68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83,

84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

**Nota.** Actualmente, con las modernas computadoras se han calculado todos los números primos menores que $n$, siendo $n$ un número muy grande, por ejemplo, $n = 10'000,000$, lo que nos provee de una enorme cantidad de números primos y que permite un estudio objetivo de estos números (su distribución, propiedades, ...). Viggo Brun, en 1919, introdujo una generalización de la criba de Eratóstenes, lo que le permitió probar que “todo número entero par, suficientemente grande, es una suma de dos números, cada uno de los cuales es un producto de a lo mas nueve números primos".

Estos resultados estimularon el estudio de esta fascinante área de la matemática, como es la teoría de números, la que está relacionada a la famosa **Hipótesis de Riemann**, una cuestión que permanece aún abierta.

• **Una Aplicación de la Matemática.** A Eratóstenes se le recuerda también por sus mediciones sobre el tamaño de la Tierra; él asumía que está era **redonda** e hizo una simple pero genial observación: vió que en el día del solsticio (21 de junio, verano) el Sol a medio día alumbraba directamente en vertical el fondo de un profundo pozo en la localidad de Siena en tanto que al mismo tiempo en Alejandría, situado a 800 Kms de Siena, el Sol proyectaba una sombra con un ángulo de 7°




y de esta manera el arco (entre ambas localidades) sobre la superficie de la Tierra subtiende un ángulo de 7° en el centro de la Tierra (ver figura adjunta). Ahora Eratóstenes usa el teorema 33. Libro VI de los Elementos que afirma: "la longitud de un arco es proporcional al ángulo que él subtiende en el centro de la circunferencia".

De esta manera él concluye que la circunferencia de la Tierra es

$$\frac{360^\circ}{7^\circ} \times 800 = 41,000 \text{ Kms}$$

y por tanto el radio de la Tierra es igual a 6,500 Kms.

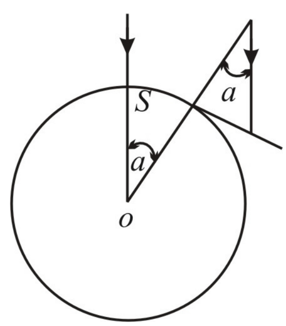
Por otro lado, usando el trabajo de Aristarco, Eratóstenes fue capaz de calcular el tamaño de la Luna y del Sol.

En relación al argumento dado antes, Cleomedes (un matemático de probablemente la primera mitad del siglo I, A.C.) en su obra "El Movimiento Circular de los Cuerpos Celestes" nos dice ([NEW], Vol. 1; pag. 132):

≪ El procedimiento de Posidonio acerca del tamaño de la Tierra es éste. El de Eratóstenes sigue un camino geométrico, y parece algo más oscuro. Sin embargo lo que él dice se hace claro si suponemos lo siguiente. Suponemos, en primer lugar, que Siena y Alejandría están situados bajo el mismo meridiano; en segundo lugar, que la distancia entre las dos ciudades es de 5.000 estadios; y en tercer lugar, que los rayos enviados por distintas partes del Sol a distintas partes de la Tierra son paralelos; es así como suponen los geómetras que van las cosas.

En cuarto lugar, suponemos, como demuestran los geómetras, que las líneas rectas que cortan a rectas paralelas forman ángulos alternos iguales; en quinto lugar, que los arcos comprendidos en ángulos iguales son semejantes, es decir, que tienen la misma proporción y la misma razón a sus propios círculos; esto también está demostrado por los geómetras. En efecto, cuando los arcos están comprendidos en ángulos iguales, si uno cualquiera de ellos es una décima parte de su propio círculo, todos los arcos restantes resultarán décimas partes de sus propios círculos.

Quien domine esto comprenderá sin dificultad el método de Eratóstenes, que es así: Dice que Siena y Alejandría están bajo el mismo meridiano. Puesto que los meridianos son círculos máximos en el Cosmos, es necesario, por fuerza, que los que están debajo de éstos en la Tierra sean también círculos máximos. Por lo tanto, la magnitud que muestre este método para el círculo entre Alejandría y Siena, será también la del círculo máximo de la Tierra. Dice entonces, y así es, que Siena esta situada bajo el círculo del trópico de verano. Así pues, cuando el Sol está en Cáncer y hace el solsticio de verano, está exactamente en medio del cielo, y necesariamente los gnomos de los relojes quedan sin sombra, por estar el Sol exactamente en la vertical; se dice que esto sucede en 300 estadios de diámetro. En Alejandría, sin embargo, a la misma hora los gnomos de los relojes proyectan sombra, porque están situados más al norte que Siena. Puesto que las ciudades están situadas bajo el mismo meridiano y círculo máximo, si trazamos un arco desde el extremo de la sombra del gnomo hacia la base misma del gnomo del reloj de Alejandría, este arco será un segmento del círculo máximo del cuenco, puesto que el cuenco del reloj está situado bajo el círculo máximo. Si pues, a continuación imaginamos dos rectas trazadas a través de la Tierra desde cada uno de los gnomos se encontrarán en el centro de la misma. Como el reloj está situado bajo el Sol, si imaginamos una recta que vaya desde el Sol al extremo del gnomo del reloj, será una línea recta que va desde el Sol hasta el centro de la Tierra. Si imaginamos otra recta desde el extremo de la sombra del gnomo, a través del extremo del gnomo, hacia el Sol, a partir del cuenco de Alejandría, ésta y la recta anterior serán paralelas, al conducir desde distintas partes del Sol a distintas partes de la Tierra. A estas paralelas las corta la recta que va desde el centro de la Tierra al gnomo de Alejandría, de modo que los ángulos alternos son iguales. De éstos, uno está en el centro de la Tierra, formado por el encuentro de las rectas que van desde los relojes al centro de la Tierra. El otro está en la intersección del extremo del gnomo de Alejandría y la recta trazada desde la punta de la sombra al Sol, por el punto en que roza el gnomo.




Medición de la Tierra

Este ángulo comprende el arco que va desde el extremo mismo de la sombra del gnomo hasta su base, y el del centro de la Tierra el arco que va desde Siena a Alejandría. Ahora bien, los arcos son semejantes entre sí, porque están comprendidos por ángulos iguales. La razón, pues, que tiene el del cuenco a su propio círculo, es la razón que tiene también el que va de Siena a Alejandría. El del cuenco se encuentra que mide una cincuentava parte del propio círculo. Necesariamente, pues, la distancia entre Siena y Alejandría ha de ser una cincuentava parte del círculo máximo de la Tierra. Y esta distancia es de 5.000 estadios. Por lo tanto, todo el círculo tiene 250.000 estadios. Y éste es el procedimiento de Eratóstenes. ≫

**Nota.**

La figura nos ayudará a comprender bien a Cleomedes. $S$ es Siena y $A$ Alejandría; el centro de la Tierra es $O$. Los rayos del Sol en los dos lugares están representados por líneas rectas. Si $\alpha$ es el ángulo formado por los rayos del Sol con el gnomo del reloj de Alejandría ($OA$ prolongado), el ángulo $SOA$ es también igual a $\alpha$, o un cincuentavo de cuatro ángulos rectos. El arco $SA$ se sabe que mide 5.000 estadios, y se deduce que toda la circunferencia de la Tierra ha de ser de 250.000 estadios.

• **La Duplicación del Cubo.** Eratóstenes en una carta dirigida a Ptolomeo III le expresa que se había ocupado del problema de la duplicación del cubo pues le indica como construir dos medias proporcionales entre dos rectas dadas y describe al mesalabio, un instrumento para la construcción práctica del cubo doble. Veamos

$\ll$ Eratóstenes a Ptolomeo, saludos !

Se cuenta que uno de los antiguos poetas trágicos hizo aparecer a Mino en escena, en el acto de mandar construir un túmulo para Glauco; y que Mino, verificando que éste tenía de cada lado cien piés de longitud, dice: "pequeño espacio en verdad concediste al sepulcro de un rey; duplícalo, conservándole siempre la forma cúbica, quedarán inmediatamente duplicados todos los lados del sepulcro". Ahora, es claro que él se engañaba. De hecho, duplicando los lados de una figura plana, esta queda cuadriplicada, y una figura sólida quedará octuplicada.

Entonces fue agitado entre los geómetras la cuestión de saber como se podía duplicar una dada figura sólida cualquiera, conservándole la forma. Y este problema fue llamado **duplicación del cubo**. Todos quedaron dudosos, durante mucho tiempo, hasta que Hipócrates de Quios encontró que "si entre dos líneas rectas, de las cuales la mayor sea el doble de la menor, se inscribieran dos medias en proporción continua, el cubo quedará duplicado"; transladándose, asi, una dificultad en otra no menor.

Se narra también que, mas tarde, los Délios, llevados por el oráculo a duplicar un cierto altar, cayeron también en la misma dificultad. Y algunos embajadores vinieron a procurar a los geómetras que convivían con Platón en la Academia para los interesar a descubrir lo que les era exigido. Estos ocupáronse del asunto con diligencia, y se dice que, teniendo procurado inscribir dos medias entre dos rectas, Arquitas lo resolvió con el semi-cilindro, y Eudoxo mediante líneas curvas.

> A esos geómetras le siguieron otros, que consiguieron tornar mas perfectas las demostraciones, pero no la construcción exceptuando tal vez a Menecmo, y con gran trabajo. ≫

Pappus habla aún de otros escritos de Eratóstenes, titulado "sobre las Proporciones", pero no se indica su contenido. Escribió diversos trabajos, algunos con muchos datos históricos. Todo ello le valió el reconocimiento de sus contemporáneos y de la posteridad.

Eratóstenes fué un erudito que consagró su vida al saber.

## 2.5. LA TRIGONOMETRÍA EN LA ANTIGUEDAD.

### 2.5.1. Consideraciones Generales.

La trigonometría evolucionó desde las antiguas culturas, como fueron la egipta y la babilónica y en donde existen ciertos indicios de algunas ideas primarias de lo que mas tarde sería la trigonometría pero no se llegó aun a ideas trigonométricas precisas. La trigonometría primitiva fue el resultado de un proceso de evolución de ideas, como asi fue toda la matemática, que surgieron en épocas remotas cuando el hombre, navegante por naturaleza, observaba lo único que tenía en los mares infinitos: el cielo y las estrellas. En el firmamento se observaban distintas figuras geométricas, en particular, triángulos. El estudio natural de la razón entre los lados y los ángulos de un triángulo fue alcanzando mayores niveles llegándose a formularse tablas entre dichas relaciones, en particular cuando estos triángulos están relacionados con el círculo.

Los antiguos egipcios en la construcción de las pirámides cuidaron de que casi todas las caras formen un ángulo de $52°$ con la horizontal y asi, de algún modo, utilizaban a la función cotangente. Por otro lado, en la tablilla Plimpton 322, de los babilonios, aparece una tabla de cosecantes. (Ver 1.1.3. (iii)). Los babilonios fueron astrónomos por excelencia y llegaron a acumular una considerable cantidad de datos astronómicos, los que servirían para construir, poco a poco, a la trigonometría como una rama de la matemática.

Con los griegos, la trigonometría alcanza un significativo progreso. Las primeras ideas se remontan al matemático Tales (de Mileto), quién observó que un triángulo queda determinado si conocemos su base y sus ángulos en ella. Como buen astrónomo, dedujo que saber medir ángulos es algo esencial en muchas investigaciones del mundo físico, como lo es por ejemplo la astronomía. Los griegos sabían que si se conocen los ángulos de un triángulo, se conoce entonces la proporcionalidad de sus lados. Aún cuando los Elementos de Euclides está dedicado a la geometría y a la aritmética, en ciertas proposiciones aparecen el seno y el coseno de algunos ángulos. Mas anteriormente, como hemos mencionado, en el papiro de Rhind existen problemas que consideran a la cotangente de un ángulo diedro de la base de una pirámide. La astronomía motivó el surgimiento de la trigonometría esférica. Recordemos que en el teorema de la "cuerda rota" (2.2.6), Arquímedes llega a establecer, en forma equivalente, a la fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x.$$

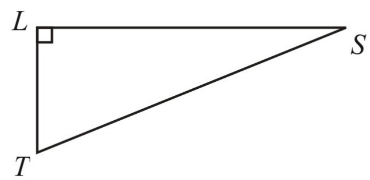
La trigonometría adquiere con Hiparco de Nicea, Menelao de Alejandría y Claudio Ptolomeo una gran madurez en relación a sus predecesores. El trabajo de estos matemáticos fue motivado por el deseo de construir una astronomía cuantitativa que pueda predecir las posiciones y trayectorias de las estrellas. En realidad se trataba mas de una trigonometría esférica hecha en base a una geometría esférica. Sobre este tipo de geometría algo escribió Euclides. A Hiparco se le considera como el fundador de la trigonometría.

## 2.5.2. La Trigonometría en la Antigua Grecia.

Veamos ahora algunos matemáticos a quienes les debemos el impulso de la trigonometría en aquella época. A través de sus obras veremos algunos aspectos alcanzados sobre trigonometría en su relación con la geometría y con la astronomía.

**• Aristarco de Samos.**

Este ilustre astrónomo fue ya presentado en 2.1; en esta oportunidad vamos a complementar lo expuesto en esa oportunidad. Según Arquímedes y Plutarco, Aristarco propuso un sistema heliocéntrico e hizo notables estudios sobre la Tierra (T), el Sol (S) y la Luna (L); lamentablemente sus obras se perdieron. Ya hemos mencionado que cuando la Luna está "medio llena", el ángulo




$SLT$ es prácticamente un ángulo recto; es decir, en el lenguaje trigonométrico se tiene $\operatorname{sen} S = \dfrac{LT}{TS}$ . Vía argumentos experimentales se calcula que el ángulo $LST$ mide $3^\circ$ y de esta manera el ángulo $LTS$ mide $87^\circ$. En esa época no se conocían las tablas trigonométricas y era complejo determinar el valor de $\operatorname{sen} 3^\circ$, cuyo conocimiento hubiera sido útil para establecer una relación entre la distancia de la Tierra a la Luna con la distancia de la Tierra al Sol; afortunadamente se conocía un teorema geométrico que traducido a la trigonometría dice:

$$\ll \text{ si } 0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ, \text{ entonces } \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \gg, \qquad (+)$$

resultado que fue usado por Aristarco para concluir que $\dfrac{1}{20} < \operatorname{sen} 3^\circ < \dfrac{1}{18}$ y asi proclamar que “el Sol está mas de 18 veces, pero menos que 20 veces, mas alejado de la Tierra que la Luna”. (Ver 2.1).

**Nota.** En su obra “Sobre los Tamaños y Distancias del Sol y la Luna”, Aristarco usa las desigualdades (+).

Vía la observación de eclipses de Luna, los astrónomos de aquellos tiempos dedujeron diversas conjeturas matemáticas, con muy buenas aproximaciones. Aristarco fue un agudo pensador y meticuloso en sus observaciones. Asi, si $R_s$, $R_T$ y $R_L$ son los radios del Sol, de la Tierra y de la Luna respectivamente, él llega a la interesante conclusión,

$$\ll \frac{108}{3} < \frac{R_T}{R_L} < \frac{60}{19} \qquad \text{y} \qquad \frac{19}{3} < \frac{R_S}{R_T} < \frac{43}{6} \gg .$$

La trigonometría debe a **Eratóstenes** sus notables mediciones astronómicas, las que motivaron nuevas ideas rumbo a una nueva área de la matemática. Ver 2.4.2.

• **Hiparco de Nicea [180 - 125 A.C.].**

Por un período de al menos dos siglos y medio, los geómetras griegos se dedicaron a estudiar las relaciones entre rectas y circunferencias, obteniendo resultados que fueron aplicados a diversos problemas astronómicos. A **Hiparco** de Nicea, quien fue un notable astrónomo, se le atribuye la construcción de la primera tabla trigonométrica y por ello, él es conocido como "el padre de la trigonometría". En la construcción de su tabla, Hiparco usó fórmulas que podrían corresponder a

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y \qquad \text{y} \qquad 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x.$$

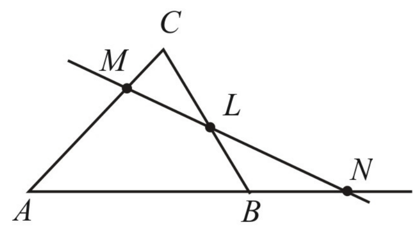
Hiparco vivió en Rodas y estuvo relacionado con la Universidad de Alejandría (161 - 126). Según Teón, Hiparco escribió una obra de 12 libros sobre el cálculo de las cuerdas en un círculo, obra que lamentablemente se perdió. Como astrónomo se le atribuye, entre otras contribuciones, la determinación de la inclinación de la eclíptica y también el estudio de las irregularidades del movimiento de la Luna. Como matemático, su trabajo sobre las cuerdas influyó en el uso del círculo de 360° y sus divisiones; se conjetura que fue Hipsicles (±180 A.C.) quien introdujo la división del círculo en 360°. Por otro lado, se sabe que Hiparco propuso localizar los puntos sobre la superficie de la Tierra vía latitudes y longitudes. Él fue un precursor de lo que ahora llamamos "proyección estereográfica".

Hiparco organizó un catálogo de 1022 estrellas fijas, el que sirvió de base para que Ptolomeo organizara el suyo; también hizo una importante rectificación al valor de la duración del año. A Hiparco se le atribuye la primera de las **tablas de cuerda de arco**, las que han de permitir el desarrollo de la trigonometría en la Antiguedad pues con ellas y la geometría plana (en especial el teorema de Pitágoras) fue posible resolver problemas relativos a la nueva área matemática.

• **Menelao de Alejandría** [±100 **D.C.**].

A este geómetra griego se le considera como el fundador de la trigonometría esférica por sus importantes trabajos sobre el triángulo esférico. Como sucedió con muchos de sus contemporáneos, varias de sus obras se perdieron. Menelao escribió unos "Elementos de Geometría"; de su obra "Esférica" se preservan tres libros (en versión árabe). En el Libro I se define por primera vez al triángulo esférico; la idea de Menelao es establecer para el triángulo esférico muchas proposiciones que Euclides dió para el triángulo plano. En el caso esférico sucede que se tiene: "dos triángulos esféricos son congruentes si tienen sus ángulos correspondientes iguales", (lo que no sucede en el caso plano). Además, se establece que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos ángulos rectos. En el Libro II se encuentran teoremas de interés para la astronomía. El Libro III contiene el conocido "teorema de Menelao":

$\ll$ si una transversal intersecta los lados $BC$, $CA$ y $AB$ de un triángulo $ABC$ en los puntos $L$, $M$ y $N$ respectivamente, entonces $\dfrac{AN}{NB}.\dfrac{BL}{LC}.\dfrac{CM}{MA} = -1 \gg$.




Menelao establece un análogo resultado para los triángulos esféricos.

Menelao fue un notable astrónomo y se sabe que escribió varias obras sobre astronomía; escribió su obra: "Sobre el cálculo de las rectas inscritas en un círculo". Escribió también sobre hidrostática y diversos escritos sobre geometría.

Veamos algunas ideas sobre la trigonometría esférica de Menelao. Sea el triángulo esférico $ABC$ (figura (*)) y cualquier gran círculo que corta los lados del triángulo (alargado donde sea necesario). Menelao entendía el seno de un arco, por ejemplo, (o el seno del correspondiente ángulo central en el centro de la esfera) como la cuerda del doble del arco $AB$. Con la actual noción de seno, el "Teorema de Menelao" se traduce por

$$\operatorname{sen} P_1A. \operatorname{sen} P_2B. \operatorname{sen} P_3C = \operatorname{sen} P_1C. \operatorname{sen} P_2A. \operatorname{sen} P_3B,$$

resultado que fue probado por Menelao.

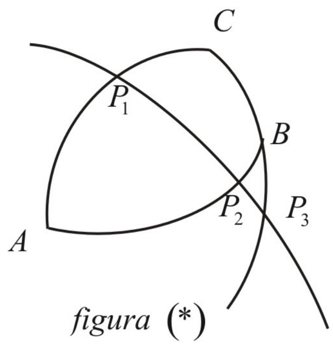



*figura* (*)

En el Libro III también aparece el siguiente teorema. Remarcamos previamente que el arco $a$ es el arco opuesto al ángulo $A$ en el triángulo $ABC$. Se tiene:

≪ Si $ABC$ y $A'B'C'$ son dos triángulos esféricos y si $A = A'$ y $C = C'$ ó $C$ es suplementario a $C'$, entonces $\dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} = \dfrac{\operatorname{sen} c'}{\operatorname{sen} a'}$ ≫ .

También en el Libro III se prueba el siguiente resultado:

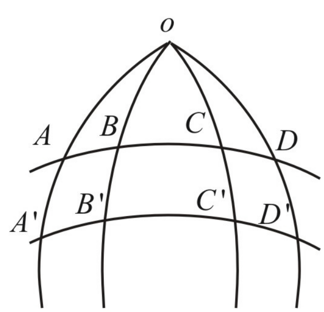



*figura* (**)

≪ Si cuatro grandes arcos circulares parten de un punto $O$ y $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son grandes círculos cortando a aquellos cuatro, entonces (figura (**))

$$\frac{\operatorname{sen} AD}{\operatorname{sen} DC} \cdot \frac{\operatorname{sen} BC}{\operatorname{sen} AB} = \frac{\operatorname{sen} A'D'}{\operatorname{sen} D'C'} \cdot \frac{\operatorname{sen} B'C'}{\operatorname{sen} A'B'} \gg .$$

Veamos aún los siguientes argumentos geométricos considerados por Menelao y sus contemporáneos. Observando la figura (+), actualmente diríamos que "la cuerda $AB$ es el

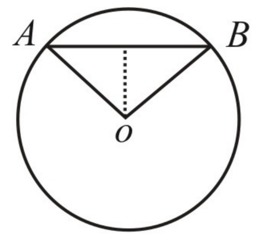



*figura* (+)

doble del seno de la mitad del ángulo $AOB$, multiplicado por el radio del círculo". Sin embargo, para Menelao, y su entorno, $AB$ es simplemente la cuerda correspondiente al arco $AB$.

Sea $BOB'$ un diámetro de un círculo (figura (++)). Entonces "la cuerda $AB'$ es el doble del coseno de la mitad del ángulo $AOB$, multiplicado por el radio del círculo".

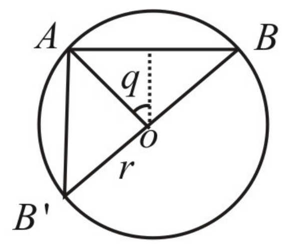



*figura* (++)

Figura (++)

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras, $AB^2 + AB'^2 = 4r^2$, lo que es equivalente a

$$(2r\operatorname{sen}\theta)^2 + (2r\cos\theta)^2 = 4r^2$$

ó

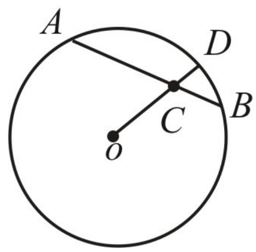
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

una identidad que posiblemente obtuvo Menelao y capaz fue conocida por Hiparco; aún mas, se conjetura que también conocían otras identidades trigonométricas, como ya hemos insinuado anteriormente.

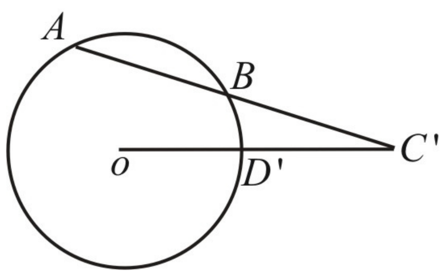
En la obra de Menelao se encuentran los dos siguientes resultados.

≪ En un círculo de centro $O$, si una cuerda $AB$ se corta por un radio $OD$ en un punto $C$, entonces se tiene

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\operatorname{sen} \overset{\frown}{AD}}{\operatorname{sen} \overset{\frown}{DB}} \gg .$$




≪ Si la prolongación de la cuerda $AB$ corta a la prolongación del




radio $OD'$ en $C'$, entonces se tiene

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{\operatorname{sen} \overset{\frown}{AD'}}{\operatorname{sen} \overset{\frown}{BD'}} \gg .$$

**Nota.** Menelao no prueba estos dos resultados porque, capaz, ya eran conocidos y estén en la obra de Hiparco.

La gran obra matemática y astronómica de Menelao sirvió de base para el trabajo de Claudio Ptolomeo, quien ha de impulsar significativamente al progreso de la trigonometría y de la matemática en general.

• **Claudio Ptolomeo ([**$\pm 85$ **A.C. - 165 D.C.]).**

Fue un astrónomo que perteneció a la Universidad de Alejandría en el período 125 - 160 de nuestra era. Se conjetura que fue natural de Ptolemaida, en Egipto; sus contemporáneos lo llamaron "el sublime y divino". Fue un gran observador y calculador como lo testimonia su famosa obra, la "Composición" o "Sintaxis Matemática", que con el tiempo los árabes lo conocieron con el nombre de "**Almagesto**", que significa $\ll$ el mayor$\gg$. Este trabajo es una obra por excelencia y consta de 13 libros; fue traducida al latin en 1175. El Almagesto es para la astronomía lo que es "Los Elementos" de Euclides para la matemática. Esta obra sirvió de base para el estudio de la astronomía por un buen tiempo, hasta finales de la Edad Media.


Para su obra astronómica, Ptolomeo utilizó los dados numéricos y los cálculos de Hiparco y de sus sucesores inmediatos, a lo que unió sus observaciones hechas en Alejandría entre 123 y 151. Según Laplace, la Sintaxis es "uno de los mas preciosos monumentos de la Antiguedad". Solo los trabajos de Copérnico y de Kepler, hechos muchos siglos después, puso fin a la influencia de tan apreciada obra, surgiendo asi la astronomía moderna. En el Almagesto se encuentran unas interesantes y útiles tablas trigonométricas, asi como también una explicación de los métodos usados en su construcción. ¿Hasta que punto estas tablas fueron extraidas de las tablas de Hiparco? En todo caso, Ptolomeo hizo un aporte fundamental al progreso de la astronomía. Dividió a la circunferencia en 360° y al diámetro en 120 partes; cada parte en minutos, cada minuto en segundos. Ptolomeo admitió la razón:

$$\frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}} = 3^\circ\ 8'\ 30'';$$

asi llega a establecer que $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$ , lo que proporciona: $\pi = 3{,}14166$.

En la elaboración de su tabla de cuerdas de arco, Ptolomeo introduce una "métrica" que le sirve de sustento, la cual es obtenida de la construcción del lado del pentágono y del lado del decágono inscritos en un círculo de radio $r$. Él considera $r = 60$ partes y extrae ciertas raices cuadradas para obtener

$$\text{cuerda } 36^\circ = 37^p{,}4'{,}55'' \qquad \text{y} \qquad \text{cuerda } 72^\circ = 70^p{,}32'{,}3'' \ .$$

Estos valores se obtienen observándose que se tiene, para el primer caso,

$$l_5 = \sqrt{r^2 + l_{10}^2} \qquad \text{y} \qquad l_{10} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2} \ ;$$

luego

$$l_{10} = \sqrt{\frac{5}{4}\,60^2} - \frac{60}{2} = \sqrt{4500} - 30 = 67^p{,}4'{,}55'' - 30^p = 37^p{,}4'{,}55''.$$

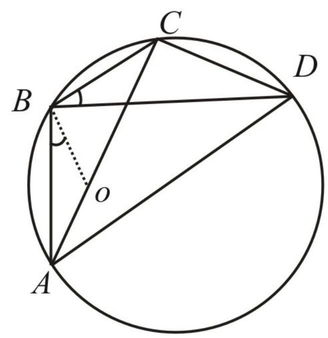
Ptolomeo calcula otras cuerdas. Para ello veamos lo que él nos dice en el Libro I del Almagesto:

≪ Para facilitar la tarea práctica construiremos una tabla de estos segmentos, dividiendo la circunferencia en 360 partes, tomando los arcos de medio grado en medio grado y dando para cada arco el valor de la cuerda respectiva suponiendo dividido el diámetro en 120 partes. El uso demostrará que estos números son los más cómodos. Ante todo, demostraremos que con un cierto número, el menor posible, de teoremas, y siempre los mismos, se podrá componer un método general y rápido para encontrar aquellos valores. No nos limitaremos a presentar tablas con esos valores, sino haremos conocer la teoría para facilitar la manera de encontrarlos y verificarlos, exponiendo su método de construcción. Para evitar las fracciones utilizaremos la división sexagesimal, y en las multiplicaciones y divisiones tomaremos siempre los valores más aproximados, de manera que no obstante lo que despreciaremos los resultados serán sensiblemente exactos ≫ .

Es asi como para construir su tabla, Ptolomeo considera los polígonos regulares de $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10$ lados, cuyos lados dan las cuerdas de $36^\circ,\ 60^\circ,\ 72^\circ,\ 90^\circ$ y $120^\circ$. Anteriormente hemos visto las cuerdas de $36^\circ$ y $72^\circ$. El siguiente resultado, conocido como el "Teorema de Ptolomeo", es útil para el cálculo de cuerdas.

**Teorema de Ptolomeo.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo y sean las diagonales $AC$ y $BD$. Entonces se tiene:

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$




**Prueba.**

Constrúyese el ángulo $ABE$ igual al ángulo $DBC$. Luego, el ángulo $ABD$ es igual al ángulo $CBE$; también son iguales los ángulos $BDA$ y $BCE$ (ambos tienen por medida la mitad del arco $\overset{\frown}{AB}$). Entonces los triángulos $ABD$ y $EBC$ son semejantes y se tiene: $BC \times AD = CE \times BD$.

También el ángulo $BAC$ es igual al ángulo $BDC$ y entonces son semejantes los triángulos $ABC$ y $DBC$. Luego, $AB \times CD = AE \times BD$. Finalmente, sumando miembro a miembro,

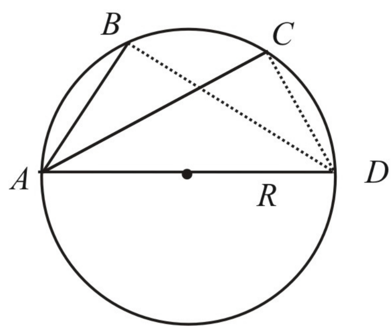
$$\begin{aligned} AB \times CD + BC \times AD &= AE \times BD + CE \times BD \\ &= (AE + CE) \times BD \\ &= AC \times BD. \end{aligned}$$

■

**Cálculo del Valor de $\pi$ vía el Teorema de Ptolomeo.**

Sea el semi-círculo de diámetro $AD$ y sean conocidas las cuerdas $AB$ y $AC$; y por tanto (por Pitágoras) son conocidas también las cuerdas $BD$ y $CD$. Utilizando el teorema de Ptolomeo se obtiene la longitud de arco diferencia $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}$. **En efecto**, (despejando)

$$\begin{aligned} \text{cuerda } BC \times 2R = {} & \text{cuerda } AC \times \text{ cuerda } (180^\circ - AB) \\ & - \text{cuerda } AB \times \text{ cuerda } (180^\circ - AC)\,. \end{aligned} \qquad [*]$$




**Nota.** Si $AC = 2a,\ AB = 2b$ y $R = 1$, [*] nos dice

$$\begin{aligned}(2a-2b)\,,2 &= 2a\,(\pi-2b)-2b\,(\pi-2a)\\ &= 2a\left(2\,\frac{\pi}{2}-2b\right)-2b\left(2\,\frac{\pi}{2}-2a\right),\end{aligned}$$

de donde se obtiene la conocida fórmula trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a.\cos b-\operatorname{sen}b.\cos a\ .$$

Ptolomeo llegó también a la siguiente relación:

$$\text{cuerda } x^{\circ 2} = 2R\ .\ \frac{1}{2}\,[2R - \text{ cuerda}\,(180^\circ - 2x)] \qquad [**]$$

la que es equivalente a la conocida identidad: $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

De la relación [*], Ptolomeo, conociendo las cuerdas de $72^\circ$ y $60^\circ$, calcula la cuerda (diferencia) de $12^\circ$, asi como también de otras cuerdas diferencias. La fórmula [**] le permite calcular las cuerdas de $6^\circ,\ 3^\circ,\ 1^\circ{,}30'$ y $0^\circ{,}45'$. Asi también, en base a argumentos geométricos, Ptolomeo formula las desigualdades

$$\frac{\text{cuerda } 1^\circ{,}30'}{1^\circ{,}30} < \frac{\text{cuerda } 1^\circ}{1^\circ} < \frac{\text{cuerda } 0^\circ{,}45'}{0^\circ{,}45}\ ,$$

de donde

$$\frac{2}{3}\text{ cuerda } 1^\circ{,}30' < \text{cuerda } 1^\circ < \frac{4}{3}\text{ cuerda } 0^\circ{,}45'\ ,$$

y como se conocen

$$\begin{aligned}\text{cuerda } 1^\circ{,}30' &= 1^p{,}34'{,}15''\\ \text{cuerda } 0^\circ{,}45' &= 0^p{,}47'{,}8''\ ,\end{aligned}$$

llega a establecer el valor de la cuerda de 1°, con una aproximación superior a $\frac{1}{60^2}$ del radio, cuerda $1° = 1^p{,}2'{,}50''$.

Con este valor de la cuerda 1°, Ptolomeo (usando su teorema) puede calcular el valor de todas las otras cuerdas; asi, partiendo del valor de la cuerda de medio grado, va creciendo sucesivamente de medio grado en medio grado. Además, si se toma

$$\text{arc } 1° = \text{cuerda } 1° = 1^p{,}2'{,}50''$$

se obtendrá (el objetivo deseado: el valor de $\pi$)

$$\pi = \frac{360\,(1^p{,}2'{,}50'')}{120^p} = 3{,}14166...$$

Este valor de $\pi$ es adoptado por Ptolomeo, diciendo que $\pi$ es igual a $3^p{,}8'{,}30''$, esto es, $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$, lo que expresa la relación entre la circunferencia y el diámetro. Débese remarcar que Ptolomeo no explica como llega a este valor; solo menciona que el valor de $\pi$ está comprendido entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{71}$, estimativa que ya había sido encontrada por Arquímedes.

Debemos remarcar que vía los argumentos hechos por Ptolomeo, también se puede llegar a las actuales identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

y

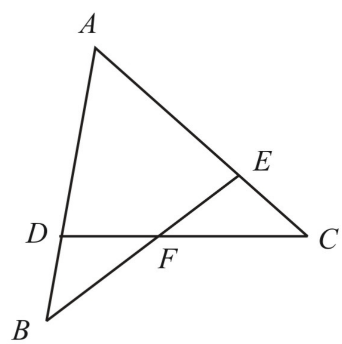
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

fórmulas que, a veces, se les conocen como las "fórmulas de Ptolomeo". Aún mas, Ptolomeo formula el siguiente resultado,

**Teorema.** "Dados dos arcos desiguales, ambos menores que un recto, la razón entre el arco mayor y el menor, es mayor que la razón entre las cuerdas respectivas".

En el contexto actual, este resultado nos dice que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una función decreciente en el primer cuadrante; débese remarcar que este teorema ya era conocido por Arquímedes y por Aristarco. Este teorema fue probado por Ptolomeo. De algún modo este resultado está en la línea de lo presentado anteriormente. Lo importante es que los teoremas usados por Ptolomeo en la construcción de las "tablas de cuerdas" encierran las principales relaciones de las funciones circulares que se usan en la trigonometría.

En orientación similar está el llamado "Teorema de Menelao" pues mientras el teorema de Ptolomeo permite hallar relaciones trigonométricas planas, el de Menelao satisface el mismo papel en la esfera. Es natural que Ptolomeo trabaje con triángulos esféricos en sus investigaciones astronómicos y sea la trigonometría esférica una necesidad para él. Ptolomeo prueba el llamado: **Teorema de Menelao:** $\ll$ Si se cortan dos rectas $AB$ y $AC$ con otras dos rectas $CD$ y $BE$, que se interceptan en $F$, entonces se tiene $\dfrac{CA}{AE} = \dfrac{CD}{DF} \cdot \dfrac{FB}{BE}$ $\gg$.




Ptolomeo aún, usando (*), obtiene otras relaciones respecto al triángulo $ACD$, que es cortado por la transversal $BFE$, que en el lenguaje del triángulo esférico $ACD$, cortado por un arco de círculo máximo $BFE$, obtiene el teorema de Menelao para la esfera:

$$\frac{\operatorname{sen} CE}{\operatorname{sen} EA} = \frac{\operatorname{sen} CF}{\operatorname{sen} DF} \cdot \frac{\operatorname{sen} DB}{\operatorname{sen} BA} \, .$$

Con esta relación, Ptolomeo resuelve diferentes problemas en relación con los triángulos esféricos.

En el Libro II del Almagesto, Ptolomeo indica las zonas en que el cielo es dividido y estudia el movimiento de los astros durante el día. En el Libro III estudia la teoría del Sol siguiendo las ideas de Hiparco. En el IV trata la teoría de la Luna en donde realiza interesantes contribuciones; postula que la Luna se mueve según una trayectoria que corresponde a un epiciclo. En el Libro V, este notable astrónomo - matemático describe a los instrumentos necesarios para las observaciones astronómicas. En los Libros VI a VIII construye un catálogo de las estrellas y una teoría de los planetas (Mercurio, Venus, Marte, Jupiter y Saturno).

Con el devenir de los siglos, el sistema "Cosmogónico" de Ptolomeo fue sometido a rigurosas críticas, como el realizado por Copérnico (1473 - 1543), quien preparó el camino para los célebres trabajos de Kepler y de Newton. Sin embargo, los trabajos realizados por los sabios de la Antiguedad, Apolonio, Hiparco y Ptolomeo, fueron de un valor extraordinario considerando las condiciones en que trabajaron en aquellos lejanos tiempos. Al respecto se llegó a decir:

> ≪ La Tierra, inmovil en el centro del Mundo, en nada interviene en la dirección del movimiento general, al paso que el Sol, con cuyos movimientos todo se relacionaba, conducía en torno de él al cortejo de los planetas, empujando gallardamente las redes, que, después de pasar sobre los centros de los epiciclos como sobre roldanas, se tornaban en seguidas paralelas entre si ≫ .

**En conclusión:** Le debemos a Ptolomeo, por su obra matemática y astronómica, los progresos necesarios para que la ciencia del cosmos tuviera las motivaciones de lograr nuevas conquistas. Él, junto con Hiparco, ocupan un sitial de honor en la astronomía de la Antiguedad; ellos son los representantes de alto nivel a que llegó la gloriosa Escuela de Alejandría, un faro que iluminaría aún por muchos siglos más !

## 2.6. ÚLTIMOS APORTES. EL FINAL DE UNA GRAN CULTURA.

### 2.6.1. Generalidades.

De un modo global, el período histórico de la matemática griega va desde los años 600′s A.C. (época de Tales de Mileto) hasta los años 600′s D.C. en que se produjo el incendio de la última biblioteca de Alejandría. Es un período promedio de **mil años** de producción matemática, con etapas de altísimo nivel científico, y otros de declive con algunos resurgimientos aislados. Si bien en los últimos cuatro siglos no hubieron matemáticos de la categoría de los maestros Euclides, Arquímedes y Apolonio entre otros, si existieron pensadores que aportaron resultados importantes para el desarrollo de la matemática. Quizás, el mayor aporte de los últimos matemáticos de la Epopeya Griega sea el que algunos de ellos escribieran sobre los trabajos de sus predecesores (lamentablemente algunos de tales trabajos se perdieron) y gracias a estos esfuerzos es que ahora conozcamos gran parte de lo que ocurrió en la Antiguedad respecto a la matemática y a la astronomía.

Al iniciarse nuestra Era Cristiana, la matemática griega va perdiendo su explendor y entra en una etapa de decadencia pero aún han de surgir algunos matemáticos que aportaron algo a lo hecho por sus ilustres antecesores; ya no han de aparecer figuras creadoras del nivel de Arquímedes o de Apolonio, por ejemplo. La mayoría de los nuevos personajes fueron comentadores, glosadores y epígonos, es decir, siguieron las huellas de lo hecho por sus antecesores. Sin embargo, es justo reconocer que algunos resultados producidos en este período fueron importantes en la evolución de la matemática, como fue el aporte de Diofanto de Alejandría en el álgebra.

### 2.6.2. Nicómaco de Gerosa (Aproximadamente 50 - 110 D.C.)

Nicómaco fue un judío y un filósofo neo - pitagórico que vivió cerca de Jerusalén; se dedicó también a la música. Se conoce muy poco de su vida. Pappus lo llamaba "el pitagórico". Su mas conocida obra es la "Introducción Aritmética", en donde nos hace conocer lo que los griegos conocían de aritmética. Su libro sirvió, durante toda la Edad Media, como texto para la enseñanza de la aritmética.

La "Introducción Aritmética" consta de dos libros. En el Libro I, Nicómaco considera algunos aspectos filosóficos relacionados con la matemática; luego pasa a definir al número y sigue una clasificación de los números en pares e impares (lo usual en aquella época), así como en primos y compuestos; cuenta los primeros números primos usando la criba de Eratóstenes. Fundamentalmente, él recoge lo ya hecho por sus predecesores pero hizo algunas contribuciones propias. En el Libro II, de inicio trata con sucesiones de números; considera una progresión geométrica cuyo término general es de la forma $u_n = r^n,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ , luego pasa a la progresión geométrica cuyo término general es $v_n = r^{n-1} + r^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ . Luego pasa a la progresión geométrica con término general $w_n = \left(r^{n-2} + r^{n-1}\right) + \left(r^{n-1} + r^n\right),\ n =$

$2, 3, 4, \ldots$ , y asi continúa sucesivamente. Observemos que siempre se tiene

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{u_n} &= \frac{r^n + r^{n-1}}{r^n} = 1 + \frac{1}{r} = \frac{r+1}{r} \ , \\ \frac{w_n}{v_n} &= \frac{r^n + r^{n-1} + r^{n-1} + r^{n-2}}{r^{n-1} + r^n} = \frac{r+1}{r} \ , \\ & \ldots \end{aligned}$$

Nicómaco considera también a los números poligonales, repitiendo diversas aseveraciones de los Pitagóricos (estos números ya habían sido conocidos por Hipsicles ($\pm 180$ A.C.), según Diofanto). Nicómaco observa que la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado, y recíprocamente (ver 1.2.2 (ii)). Asi,

$$\frac{(n-1)\, n}{2} + \frac{n\, (n+1)}{2} = n^2 \ .$$

Observa que el número poligonal de orden $n$ y $(d+2)$ lados es igual al número poligonal de orden $n$ y $(d+1)$ lados mas el número triangular de orden $n-1$; esto es,

$$\frac{2 + (n-1)\,(d-1)}{2}\, n + \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{2 + (n-1)\, d}{2}\, n \ .$$

Nicómaco descubre la interesante propiedad: si escribimos la sucesión de números impares $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \cdots$ entonces el primero es el cubo de 1, la suma de los dos siguientes es el cubo de 2; la suma de los siguientes tres números es el cubo de 3 y asi sucesivamente. En forma mas sugestiva pongamos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \\ . & & . & & . & & . \end{array}$$

Entonces se tiene $1 = 1^3,\ 3 + 5 = 8 = 2^3,\ 7 + 9 + 11 = 27 = 3^3,\ \cdots$ (suma de los elementos de la fila $n$) $= n^3,\ \cdots$

Él también nos proporciona cuatro números perfectos: $6, 28, 496$ y $2128$; reitera la fórmula de Euclides para números perfectos. Luego pasa a considerar los números sólidos, en particular a los números piramidales de cualquier base.

Posiblemente la "Introducción Aritmética" (ver [BOY], pag. 238) fue concebida como un manual que deba contener a los elementos esenciales de la matemática para entender a la filosofía pitagórica y a la platónica. En este sentido, Nicómaco fue imitado por muchos escritores en la posteridad.

### 2.6.3. Diofanto de Alejandría. (Aproximadamente fines del Siglo III, D.C.)

Poco se sabe sobre la vida de Diofanto asi como de su nacionalidad; se le ubica de que vivió a fines del siglo III de nuestra Era. Según un problema algebraico vivió hasta los 84 años. Estudió en Alejandría donde fue un reconocido maestro de la matemática, mas exactamente del naciente álgebra. Por el año 250 D.C., los cristianos eran ejecutados por negarse a creer en dioses paganos; en Roma se predicaba el Platonismo y por esta época Diofanto trabajaba en su famosa obra "Aritmética". Se conjetura la posibilidad de que Diofanto haya sido cristiano. Diofanto escribió tres trabajos: (i) la "Aritmética", en trece libros, de los cuales heredamos seis; (ii) "Sobre los Números Poligonales", del que se tiene solo algunos fragmentos, y (iii) "Porismas", obra que se perdió.

La "Aritmética" está divorciada de los métodos geométricos de sus antecesores; ella representa una nueva tendencia con planteamientos diferentes. Él tuvo una gran importancia en el desarrollo del álgebra e influyó en el trabajo de los futuros algebristas europeos; por esta asociación, a Diofanto se le conoce como el "Padre del Álgebra", pero a decir de algunos historiadores del álgebra esto no es muy exacto ya que sus obras no son un estricto desarrollo del álgebra. En sus trabajos, él emplea algunas abreviaturas pero ello no es una simbolización completa, como se usa en el álgebra actual, pero si hay algún avance con respecto a la etapa retórica en que los problemas se escribían con palabras usuales.

Mencionemos algunos problemas que aparecen en la Aritmética. (Ver [COL], vol. I).

**Problema 1.** Dividir un número dado en dos partes, cuya diferencia sea dada. Sean 100 el número y 40 la diferencia.
**Solución.** Sea $x$ el menor de los números. Se tiene $2x + 40 = 100$, de donde $x = 30$.

Luego, los números buscados son 70 y 30. En realidad Diofanto dice:

“ si $x$ es el menor número y $D$ es la diferencia, el mayor será $x+D$; luego, $x+x+D=S$, esto es, $2x+D=S$. Luego, el menor número es $\dfrac{S-D}{2}$ y el mayor es $D+\dfrac{S-D}{2}$ ”.

■

Este problema se encuentra en el Libro I; también se encuentran en este libro las siguientes cuestiones.

**Problema 7.** De algún número requerido substraer dos números dados tal que los restos tengan el uno al otro una razón dada.
**Solución.**

Sean los números 100, 20 y la razón 3 : 1. Número requerido $x$.

Luego $x-20=3\,(x-100)$, de donde $x=140$.

■

**Problema 19.** Encontrar cuatro números de modo que la suma de tres de ellos exceda al cuarto en un número dado.

Condición Necesaria: la mitad de la suma de las cuatro diferencias dadas debe ser mayor que cada una de ellas. Sean las diferencias 20, 30, 40 y 50.
**Solución.**

$2x$ es la suma de los números buscados. Luego los números son

$$x-15 \quad , \qquad x-20 \quad , \qquad x-25 \qquad \text{y} \qquad x-10.$$

Además, $4x-70=2x$, de donde $x=35$. Por tanto, los números son: 20, 15, 10 y 25.

■

**Problema 27.** Encontrar dos números tal que su suma y su producto sean números dados.
**Solución.**

Condición Necesaria: el cuadrado de la mitad de la suma debe exceder el producto por un número cuadrado. Demos la suma 20, demos el producto 96.

$2x$ la diferencia de los números requeridos.

Luego los números son $10+x,\ 10-x$.

Entonces, $100-x^2=96$. Luego, $x=2$. Y los números requeridos son 12, 8.

■

**Problema 39.** Dados dos números, encontrar otro tal que las sumas de los distintos pares, multiplicadas por el tercer número, proporcionen tres números en progresión aritmética. Números dados: 3 y 5; número buscado: $x$.
**Solución.**

Los tres productos son $3x + 15,\ 5x + 15$ y $8x$.

$3x + 15$ es el término medio o el menor de los tres, y $5x + 15$ es el mayor o el término medio. Se tienen los casos:

- $5x+15$ es el mayor, $3x+15$ el menor. Luego, $5x+15+3x+15 = 2\,(8x)$, de donde, $x = \dfrac{15}{4}$ .
- $5x+15$ es el mayor, $3x+15$ el término medio. Asi, $(5x + 15)-(3x + 15) = (3x + 15) - 8x$; de donde, $x = \dfrac{15}{7}$ .
- $8x$ es el mayor, $3x + 15$ el menor; entonces, $8x + 3x + 15 = 2\,(5x + 15)$; de donde, $x = 15$.

■

Diofanto considera también, en los otros libros (II-VI) ecuaciones indeterminadas de segundo grado (o grado superior) con dos o mas incógnitas. Veamos algunos problemas.

**Problema 8.** (Libro II). Dividir un número cuadrado dado en dos cuadrados.
**Solución.**

Diofanto toma 16 como el número cuadrado dado; se requiere dividir 16 en dos cuadrados. Sea $x^2$ el primer cuadrado, el otro será $16-x^2$. Se desea que $16-x^2$ sea un número cuadrado. Diofanto hace el siguiente argumento. Toma un cuadrado de la forma $(mx - 4)^2$, donde $m$ es cualquier número entero y 4 es la raíz cuadrada de 16. Por ejemplo, sea el lado (del cuadrado) igual a $2x - 4$; el cuadrado será $4x^2 - 16x + 16$. Luego, $4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$, de donde $5x^2 - 16x = 0$ y de esta manera $x = \dfrac{16}{5}$ .

De esta manera, un número será $\dfrac{256}{25}$ y el otro $\dfrac{144}{25}$, y su suma es $\dfrac{400}{25}$ ó 16, y cada uno es un cuadrado.

■

**Nota.** Según el argumento de Diofanto, se tiene $(4)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$. Asi, en general, surge la cuestión de separar un cuadrado dado en dos cuadrados ($z^2 = x^2 + y^2$), que es precisamente el problema 8. Pierre de Fermat (1601-1665), respecto de este problema considera la generalización siguiente: $z^m = x^m + y^m$, $m$ entero positivo ($m > 2$). Al respecto escribió en un trabajo sobre Diofanto:

> ≪ Por otro lado es imposible separar un cubo en dos cubos, o un bicuadrado en dos bicuadrados, o en general, cualquier potencia excepto un cuadrado, en dos potencias con el mismo exponente. Yo he descubierto una maravillosa demostración de esto, sin embargo al margen de este papel no es suficientemente grande para contenerlo ≫ .

Esto constituye el famoso "**último teorema de Fermat**", el que recién pudo ser demostrado en la década de los $1990'$s. Sobre este problema trataremos oportunamente en el futuro.

**Problema 9.** (Libro II). Dividir un número dado, el cual es la suma de dos cuadrados, en otros dos cuadrados.
**Solución.**
Dados $a$ y $b$ racionales, se trata de encontrar una solución racional no-trivial de $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Diofanto toma el caso especial: $a = 2$ y $b = 3$, y hace el siguiente argumento: toma $(x + 2)^2$ como el primer cuadrado y $(mx - 3)^2$ como el segundo cuadrado, digamos $(2x - 3)^2$. Luego,

$$\left(x^2 + 4x + 4\right) + \left(4x^2 + 9 - 12x\right) = 13 \,,$$

esto es, $5x^2 - 8x + 13 = 13$, de donde $x = \frac{8}{5}$. Luego los cuadrados requeridos son $\frac{324}{25}$ y $\frac{1}{25}$ .

■

**Problema 20.** (Libro II). Encontrar dos números de manera que el cuadrado de uno sumado al otro dé un cuadrado.
**Solución.** Sean $x$ y $2x + 1$ que, por su forma, satisfacen una condición.
La otra condición es: $4x^2 + 5x + 1 = \text{cuadrado} = (2x - 2)^2$ .

Luego $x = \dfrac{3}{13}$ , y los números son $\dfrac{3}{13}$ y $\dfrac{19}{13}$ .

■

**Problema 28.** (Libro II). Encontrar dos números cuadrados tales que su producto mas uno de ellos, es un número cuadrado.
**Solución.** Diofanto obtiene $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ y $\left(\dfrac{7}{24}\right)^2$. [Asi se tiene, $\dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{49}{576} + \dfrac{9}{16} = \left(\dfrac{25}{32}\right)^2$].

■

**Problema 6.** (Libro III). Encontrar tres números tales que la suma de todos es un cuadrado y la suma de dos cualquiera de ellos también es un cuadrado.
**Solución.** Diofanto encuentra que los tres números son 80, 320 y 41.

**Problema 7.** (Libro III). Encuentre tres números en progresión aritmética sabiendo que la suma de dos cualquiera de ellos es un cuadrado.
**Solución.** Diofanto encuentra que los tres números son

$$120\ \tfrac{1}{2} \quad , \qquad 840\ \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad 1560\ \tfrac{1}{2}\ . \ \bullet$$

**Problema 9.** (Libro III). Dado un número, encontrar otras tres de manera que la suma de dos cualesquiera de ellos menos el número dado sea un cuadrado, y que sea también un cuadrado la suma de los tres menos el número dado. Sea 3 el número dado.
**Solución.**

Supongamos que el primero de los números buscados mas el segundo es igual a $x^2 + 3$, el segundo + el tercero = $x^2 + 2x + 4$, la suma de los tres $= x^2 + 4x + 7$.

Luego, el tercero $= 4x + 4$, el segundo $= x^2 - 2x$, el primero $= 2x + 3$. Finalmente, el primero + el tercero $-3 = 6x + 4 =$ un cuadrado $= 64$.

De esta manera, $x = 10,\ 23,\ 80$ y $44$ es una solución.

■

**Problema 10.** (Libro III). Encontrar tres números tal que el producto de cualquier par de ellos, agregado a un número dado, dá un cuadrado.
**Solución.**

Sea 12 el número dado. Tomemos un cuadrado (digamos 25) y substrayamos 12. Tomemos la diferencia (13) por el producto de los números primero y segundo, y sean esos números $13x$, $\frac{1}{x}$ respectivamente.

Aún substrayamos 12 del otro cuadrado, digamos 16, y sea la diferencia 4 el producto de los números segundo y tercero.

Luego, número tercero $= 4x$.

La tercera condición da: $52x^2 + 12 =$ un cuadrado; ahora; $52 = (4)(13)$ y 13 no es un cuadrado; pero, si fuera un cuadrado, la ecuación sería fácil de resolverse. Asi, debemos encontrar dos números que reemplacen 13 y 4 tal que su producto sea un cuadrado, mientras $+12$ tampoco es un cuadrado.

Ahora, el producto es un cuadrado si ambos son cuadrados; luego, debemos encontrar dos cuadrados tal que tampoco $+12 =$ un cuadrado.

Esto es fácil, y como dijimos (dice Diofanto), ello hace que la ecuación sea fácil de resolverse.

Los cuadrados $4,\ \frac{1}{4}$ satisface la condición.

Retrocediendo, pongamos ahora $4x,\ \frac{1}{x}$ y $\frac{x}{4}$ ser los números; tenemos que resolver la ecuación $x^2 + 12 =$ cuadrado $= (x+3)^2$, digamos.

Luego, $x = \frac{1}{2}$ y $2,\ 2,\ \frac{1}{8}$ es una solución.

■

**Problema 13.** (Libro III). Encontrar tres números tales que el producto de dos cualquier de ellos, sumado el tercero, es un cuadrado.

**Solución.**

Si $m$ es un número (racional positivo) y si:

$$x = m^2 \quad , \qquad y = (m+1)^2 \quad , \qquad z = 2\,(x + y + 1)$$

se tiene que

$$xy + z = [m\,(m+1) + 2]^2 \,.$$

De igual manera se verifica que $xz + y$, $yz + x$ son números cuadrados.

■

**Problema 15.** (Libro III). Encuentre tres números tales que el producto de dos cualquier de ellos sumado con la suma de los mismos números, es un cuadrado.

**Solución.**

Tomemos $m,\ x,\ y,\ z$ como en el problema 13. Entonces se tiene que

$$xy + x + y \quad , \qquad yz + y + z \quad , \qquad zx + z + x$$

son números cuadrados.

■

**Problema 1.** (Libro IV). Dividir un número dado en dos cubos tal que la suma de sus lados es un número dado.
**Solución.** Diofanto da 370 y 10 como la suma de sus lados. Encuentra que los números son 343 y 27. En efecto, se tiene: $370 = 7^3 + 3^3$ y $7 + 3 = 10$.

■

**Problema 3.** (Libro IV). Encontrar dos números cuadrados, la suma de los cuales es un número cúbico.
**Solución.**

Diofanto pone $x^2$ como el mas pequeño cuadrado y $4x^2$ como el mas grande cuadrado. La suma de los dos cuadrados es $5x^2$, y él debe ser igual a un número cúbico. Pongamos su lado digamos $x$, así que el cubo es $x^3$. Luego, $5x^2$ es igual a $x^3$. Como el lado, el cual contiene los $x^2$ 's es menor en grado, nosotros dividimos el todo por $x^2$; de acá, $x$ es igual a 5. Entonces, desde que nosotros asumimos el mas pequeño cuadrado ser $x^2$, y desde que $x^2$ surge de la multiplicación de $x$, el cual es igual a 5, por si mismo, $x^2$ es 25. Y desde que nosotros (dice Diofanto) pusimos para el mas grande cuadrado, $4x^2$, este es 100. La suma de los dos cuadrados es 125, el cual es un número cúbico, con 5 como lado. Por tanto, nosotros hemos encontrado dos números cuadrados, la suma de los cuales es un número cúbico, asi 125. Esto es lo que queríamos encontrar.

■

**Problema 9.** (Libro IV). Encontrar dos números cúbicos los cuales incluyen un cuadrado.
**Solución.**

Pongamos $4x$ como el lado del mas grande cubo y $x$ como el lado del mas pequeño cubo, entonces el mas grande cubo es $64x^3$, el mas pequeño $x^3$, y el número que ellos abarcan es $64x^6$; éste debe ser un número cuadrado. Nosotros ponemos como lado de los $x^2$ 's, el coeficiente del cual es igual al lado del cuadrado surgiendo de la multiplicación del 64 por el 4, asi 256, teniendo como lado 16. Luego, nosotros ponemos como el lado del cuadrado

$16x^2$, asi que el cuadrado es $256x^4$. Entonces $64x^6$ es igual a $256x^4$. Asi que nosotros dividimos el todo por $x^4$, desde que los $x^4$ 's son de grado menor que los dos lados; la división de $64x^6$ por $x^4$ da $64x^2$, en tanto nosotros obtenemos 256 de la división de $256x^4$ por $x^4$. Luego, $64x^2$ es igual a 256, de acá $x^2$ igual a 4; $x^2$ siendo un cuadrado, asi como 4, sus lados son asi iguales; el lado de $x^2$ siendo $x$, y aquel de 4 siendo 2, $x$ es 2. Entonces, desde que nosotros pusimos $x$ como el lado del cubo mas pequeño, el mas pequeño cubo es 8, y desde que nosotros pusimos $4x$, esto es 8, como el lado del mas grande cubo, el cubo mayor es 512. Cuando nosotros multiplicamos él por el mas pequeño cubo, el resultado es el número 4096, el cual es un cuadrado teniendo 64 como su lado. Luego, hemos encontrado dos números cúbicos los cuales abarcan un número cuadrado, así 8 y 512, que es lo que deseábamos encontrar.

■

**Problema 10.** (Libro IV). Encuentre dos números tal que su suma es igual a la suma de sus cubos.
**Solución.**

Diofanto encuentra que tales números son $\frac{5}{7}$ y $\frac{8}{7}$.

[En efecto, $\frac{5}{7}+\frac{8}{7}=\frac{13}{7}=\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{8}{7}\right)^3=\frac{637}{343}$ ].

■

**Problema 11.** (Libro IV). Encuentre dos cubos de manera que su diferencia sea igual a la diferencia de sus lados.
**Solución.**

Sean $2x$ y $3x$ los lados, [asi $3x-2x=x$, $(3x)^3-(2x)^3=19x^3$]. Luego, $19x^3=x$ y $x$ es irracional. Tenemos por tanto que buscar dos cubos cuya diferencia al cuadrado sea a la diferencia de sus lados como un cuadrado a un cuadrado. Sean $(z+1)^3$ y $z^3$ estos cubos; la diferencia de sus lados es un cuadrado, 1.

Asi, $3z^2+3z+1=\text{cuadrado}=(1-2z)^2$, y $z=7$.

Empecemos de nuevo, sean los lados $7x$ y $8x$, así $169x^3=x$ y $x=\frac{1}{13}$.
Los lados de los cubos son entonces $\frac{7}{13}$ y $\frac{8}{13}$.

■

**Problema 21.** (Libro IV). Encuentre tres números en progresión geométrica de manera que la diferencia entre dos cualquiera de ellos es un número cuadrado.

**Solución.**

Diofanto encuentra que los números son $\dfrac{81}{7}$ , $\dfrac{144}{7}$ y $\dfrac{256}{7}$ .

**Problema 29.** (Libro IV). Expresar un número dado como la suma de cuatro cuadrados mas la suma de sus lados.

**Solución.**

Diofanto da el número 12 y encuentra que los cuatro números cuadrados son:

$$\frac{121}{100}\ ,\quad \frac{49}{100}\ ,\quad \frac{361}{100}\quad \text{y}\quad \frac{169}{100}\ .$$

Sus lados son las raices cuadradas de estos números.

[Se verifica que $12 = \dfrac{121}{100} + \dfrac{49}{100} + \dfrac{361}{100} + \dfrac{169}{100} + \dfrac{11}{10} + \dfrac{7}{10} + \dfrac{19}{10} + \dfrac{13}{10}$ ]. ■

**Problema 34.** (Libro IV). Hallar dos números en términos generales, tales que su producto más su suma rehaga un número dado.

**Solución.**

Sea 8 el número dado y $x$ uno de los números buscados. Suponiendo que 3 es el otro número, el producto de los dos números mas su suma será igual a $4x + 3$, y este número es igual a 8, lo que dá para $x$ el valor $\dfrac{5}{4}$ , siendo 3 el otro número.

Considero ahora (dice Diofanto) al modo de como se obtiene $x = \dfrac{5}{4}$ . Éste número es el cociente de 5, exceso de 8 sobre 3, por 4, que es 3 aumentado de 1. Por eso, si al segundo de los números dados atribuimos un valor cualquier $x$, para obtener el valor del primero bastará dividir por $x + 1$ el exceso de 8 sobre $x$. Haciendo, por ejemplo, el segundo número igual a $x - 1$, como 8 menos $x - 1$ es igual a $9 - x$, será el primer número igual a $\dfrac{9-x}{x} = \dfrac{9}{x} - 1$.

Tal es, en términos generales, la solución del problema: "producto mas suma igual a 8". La solución es, en términos generales, para cada valor atribuido a $x$, se obtiene una solución distinta.

■

**Nota.** Si $x = 7$, el segundo número es $x - 1 = 6$; el primero es $\dfrac{9-x}{x} = \dfrac{2}{7}$ .

**Verificación:** $6\left(\dfrac{2}{7}\right) + 6 + \dfrac{2}{7} = 8.$

**Problema 36.** (Libro IV). Hallar dos números tales que su producto aumentado de cada uno de los dos números, sea un cubo.
**Solución.**

Por hipótesis, se tiene que resolver el sistema indeterminado

$$\begin{aligned} xy + x &= u^3 \\ xy + y &= v^3 \,. \end{aligned}$$

Diofanto usa la siguiente estrategia: $x = a^3 z$, $y = z^2 - 1$; de esta manera

$$\begin{aligned} u^3 &= a^3 z^3 - a^3 z + a^3 z = a^3 z^3 \\ v^3 &= a^3 z^3 - a^3 z + z^2 - 1 \,, \end{aligned}$$

de donde $u = az$. Poniendo $v = az - 1$ se obtiene

$$a^3 z^3 - 3a^2 z^2 + 3az - 1 = a^3 z^3 - a^3 z + z^2 - 1 \,,$$

de donde

$$z = \frac{3a + a^3}{1 + 3a^2} \quad , \qquad v = a\,\frac{3a + a^3}{1 + 3a^2} - 1 = \frac{a^4 - 1}{3a^2 + 1} \,.$$

Haciendo $a = 2$, se tiene

$$x = \frac{112}{13} \quad , \qquad y = \frac{27}{169} \quad , \qquad u = \frac{28}{13} \quad , \qquad v = \frac{15}{13} \,.$$

■

**Problema 9.** (Libro V). Dividir la unidad en dos partes tal que, si el mismo número es añadido a cada parte, resultará un cuadrado.
**Solución.**

**Condición Necesaria.** El número dado no debe ser impar y el doble de él $+1$ no debe ser divisible por cualquier número primo el cual, cuando incrementando en 1, es divisible por 4 (esto es, cualquier número primo de la forma $4n - 1$).

Demos el número 6. Luego 13 debe ser dividido en dos cuadrados cada uno de los cuales $> 6$. Si entonces nosotros dividimos 13 en dos cuadrados, la diferencia de los cuales $< 1$, nosotros habremos resuelto el problema (dice Diofanto).

Tomemos la mitad de 13, ó $6\,\frac{1}{2}$ y tenemos que agregar a $6\,\frac{1}{2}$ una pequeña fracción la cual haría a él un cuadrado, o multiplicando por 4, nosotros tenemos que hacer a $\frac{1}{x^2}+26$ un cuadrado, esto es, $26x^2+1=$ un cuadrado $=(5x+1)^2$, digamos; de aquí $x=10$.

Esto es, en orden a hacer 26 un cuadrado, nosotros debemos agregar $\frac{1}{100}$, ó, hacer $6\,\frac{1}{2}$ un cuadrado, nosotros debemos agregar $\frac{1}{400}$, y $\frac{1}{400}+6\,\frac{1}{2}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$. Por lo tanto, nosotros debemos dividir 13 en dos cuadrados tales que sus lados deben ser tan cercanos como posible igual a $\frac{51}{20}$.

Ahora $13=2^2+3^2$. Luego nosotros procuramos dos números tal que 3 menos el primero $=\frac{51}{20}$, asi que: el primero $=\frac{9}{20}$, y 2 mas el segundo $=\frac{51}{20}$, asi que: el segundo $=\frac{11}{20}$.

Nosotros escribimos por consiguiente $(11x+2)^2$, $(3-9x)^2$ para los cuadrados requeridos (substituyendo $x$ por $\frac{1}{20}$).

La suma $=202x^2-10x+13=13$. Luego, $x=\frac{5}{101}$, y los lados son $\frac{257}{101}$, $\frac{258}{101}$. Restando 6 de los cuadrados de cada uno de ellos, nosotros tenemos como partes de la unidad, $\frac{4843}{10201}$, $\frac{5358}{10201}$.

■

**Problema 20.** (Libro V). Dividir una fracción dada en tres partes de manera que una cualquiera de ellas menos el cubo de su suma sea un cuadrado.

**Solución.**

Sea $\frac{1}{4}$ la fracción dada. Asi, cada parte $=\frac{1}{64}+$ un cuadrado y la suma de los tres $=\frac{1}{4}=$ la suma de tres cuadrados $+\frac{3}{64}$.

Ahora tenemos que dividir $\frac{13}{64}$ en tres cuadrados, lo que es fácil.

$$\frac{13}{64}=\frac{9}{64}+\frac{1}{25}+\frac{9}{400}$$

y $\dfrac{1}{4}$ queda dividido entonces en $\dfrac{250}{1600}$, $\dfrac{89}{1600}$, $\dfrac{61}{1600}$.

■

En el **Libro VI** Diofanto resuelve problemas considerando los lados (racionales) de un triángulo rectángulo. Asi, él desea números racionales $a$, $b$ y $c$ con la condición $a^2+b^2=c^2$ y sujetos a alguna otra restricción.

**Problema 1.** (Libro VI). Encontrar un (racional) triángulo rectángulo cuya hipotenusa menos cada uno de los lados sea un cubo. Formemos el triángulo con $x$ y 3.

**Solución.**

Así, la hipotenusa $= x^2+9$, el lado perpendicular $= 6x$, la base $= x^2-9$.

Además, $x^2+9-(x^2-9)=18$ debería ser un cubo, pero no lo es.

Ahora, $18 = 2{,}3^2$; asi, debemos sustituir 3 por $m$, donde $2m^2$ es un cubo; y $m=2$.

Formamos asi un triángulo rectángulo, $x$, 2; mas exactamente $x^2+4$, $4x$, $x^2-4$; una condición queda satisfecha.

La otra es $x^2-4x+4 =$ un cubo.

Asi, $(x-2)^2$ es un cubo, donde $x-2$ es un cubo $=8$; además $x=10$, y el triángulo es 40, 96, 104.

■

**Problema 11.** (Libro VI). Encontrar un número cúbico tal que si le añadimos, su cuadrado, el resultado es un número cuadrado.

**Solución.**

Pongamos con $x$ el lado del número cúbico, así que el número cúbico es $x^3$. Añadamos $x^3$ a su cuadrado, esto es, $x^6$, para obtener $x^6+x^3$, el cual debe ser un cuadrado. Vamos a poner para su lado un número de $x^3$ 's tal que cuando nosotros substraemos de sus cuadrados $x^6$, el residuo es un cubo; tal es $3x^3$ : cuando nosotros substraemos $x^6$ del cuadrado de $3x^3$, nosotros obtenemos $8x^6$, el cual es un número cúbico.

De acá, si nosotros igualamos $8x^6$ con un número cúbico, el problema sera soluble y el tratamiento no será imposible. Vamos a multiplicar $3x^3$ por sí mismos, asi nosotros obtenemos $9x^6$, el cual entonces iguala a $x^6+x^3$. Nosotros quitamos de $x^6$ lo que es común, así $8x^6$ es igual a $x^3$. La división de los dos lados por $x^3$ da $8x^3$ igual a 1; de acá $x^3$ es $\dfrac{1}{8}$, ó una parte de 8. Si nosotros aumentamos esto por su cuadrado, esto es, [por] una parte de 64 partes de la unidad, el resultado es 9 partes de 64 partes de la unidad, el cual es un número cuadrado con 3 partes de 8 como su lado.

Por consiguiente, nosotros hemos encontrado un número cumpliendo la condición impuesta a nosotros, y esta es una parte de 8 partes de la unidad. Esto es lo que intentamos encontrar.

■

**Problema 16.** (Libro VI). Hallar un triángulo rectángulo cuyos lados y una bisectriz de un ángulo agudo sean racionales.

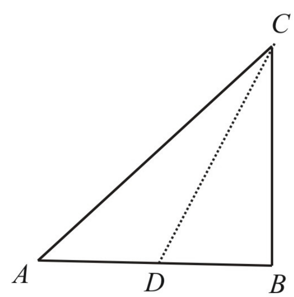
**Solución.**

Sea $ABC$ un triángulo rectángulo en $B$, que satisfaga las condiciones del problema.

(Diofanto dice:) La bisectriz $CD$ es representada por $5x$ y $DB$ por $3x$; entonces

$$\overline{BC}^2 = 25x^2 - 9x^2 = 16x^2 \quad , \qquad \overline{BC} = 4x .$$

Supongamos ahora $AB$ un múltiplo de 3, 3 por ejemplo; queda $AD = 3 - 3x$ y $AC = 4 - 4x$ pues $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{DB}$ .




Entonces

$$(4 - 4x)^2 = 3^2 + (4x)^2 \qquad ,$$

$$16 - 32x + 16x^2 = 9 + 16x^2 \quad , \qquad x = \frac{7}{32} \; ;$$

multiplicando por 32 los lados del triángulo, se obtiene

$$BC = (4)\,(7) = 28 \quad , \qquad AB = (3)\,(32) = 96 \quad , \qquad AC = 100 \; ;$$

y la bisectriz es $CD = (5)\,(7) = 35$.

■

**Problema 19.** (Libro VI). Determinar los lados de un triángulo rectángulo tal que el área mas un cateto sea un cuadrado y el perímetro un cubo.
**Solución.**

Diofanto parte de la solución de la ecuación pitagórica

$$x = \frac{2u+1}{u+1} \quad , \qquad y = 2u \quad , \qquad z = \frac{2u\,(u+1)+1}{u+1}$$

que, por las hipótesis del problema, implica

$$\frac{xy}{2} + x = 2u+1 = a^3 \quad , \qquad x+y+z = 2\,(2u+1) = b^2 \; ,$$

lo que exige que $b^2 = 2a^3$ se satisfacerá para $a = 2v^2$ y $b = 4v^3$. Luego, $2u+1 = 8v^6$.
**Conclusión:** La solución del problema es

$$x = \frac{16v^6}{8v^6+1} \quad , \qquad y = 8v^6 - 1 \quad , \qquad z = \frac{(8v^6-1)\,(8v^6+1)+2}{8v^6+1} \; .$$

Entonces, si $v = 1$, Diofanto obtiene que los lados del triángulo son $\dfrac{16}{9}$ , 7 y $\dfrac{65}{9}$ .

El área del triángulo mas un cateto es $\dfrac{144}{81}$ (un cuadrado) y el perímetro es 8 (un cubo).

■

**Problema 21.** (Libro VI). Encontrar un triángulo rectángulo tal que su perímetro es un cuadrado, mientras que su perímetro agregado de su área da un cubo.
**Solución.**

Formemos un triángulo rectángulo a partir de $x$, 1. Las perpendiculares son entonces $2x$, $x^2-1$ y la hipotenusa $x^2+1$. De acá, $2x^2+2x$ debería ser un cuadrado y $x^3+2x^2+x$ un cubo.

Es fácil (dice Diofanto) hacer $2x^2+2x$ un cuadrado; sea $2x^2+2x = m^2x^2$; luego $x = \dfrac{2}{m^2-2}$ . Por la segunda condición $\dfrac{8}{(m^2-2)^3} + \dfrac{8}{(m^2-2)^3} + \dfrac{2}{m^2-2}$ debe ser un cubo, esto es, $\dfrac{2m^4}{(m^2-2)^3} =$ un cubo.

Luego, $2m^4 =$ un cubo, ó $2m =$ un cubo $= 8$, digamos.

Así, $m = 4$, $x = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$ , $x^2 = \dfrac{1}{49}$ .

Pero una de las perpendiculares del triángulo es $x^2 - 1$, y nosotros no podemos substraer 1 de $\dfrac{1}{49}$ . Luego nosotros debemos encontrar otro valor para $x$ mayor que 1; de acá $2 < m^2 < 4$. Y nosotros tenemos por consiguiente que encontrar un cubo tal que $\dfrac{1}{4}$ del cuadrado de él es mayor que 2, pero menor que 4.

Si $z^3$ es este cubo, $2 < \dfrac{1}{4}\, z^6 < 4$ ó $8 < z^6 < 16$.

Esto es satisfecho por $z^6 = \dfrac{729}{64}$ ó $z^3 = \dfrac{27}{8}$ .

Luego $m = \dfrac{27}{16}$ , $m^2 = \dfrac{729}{256}$ , y $x = \dfrac{512}{217}$ , el cuadrado el cual es $> 1$.

Asi el triángulo es conocido $\left[\dfrac{1024}{217}\,,\ \dfrac{215055}{47089}\,,\ \dfrac{309233}{47089}\right]$.

■

De esta manera hemos tenido la oportunidad de conocer algunos de los problemas presentados en la **Aritmética**, obra que (como sabemos) constaba de trece libros, de los cuales solo hemos heredado seis. Esta obra parcial fue publicada por Guilielmus Xylander en 1575, quién agregó otro manuscrito de Diofanto sobre números poligonales.

En la antología griega se conserva el siguiente epitafio sobre la edad que tuvo Diofanto al morir. Dice:

≪ Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; despues, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad ≫ .

**Solución.** Si $x$ es la edad que vivió Diofanto, se tiene

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \ ,$$

de donde $x = 84$. Por lo tanto, Diofanto falleció a la edad de 84 años.

$\blacksquare$

### 2.6.4. Herón de Alejandría. (Alrededor del 75 D.C.).

La actividad científica de Herón se desenvuelve entre los años 75 y 150 de nuestra Era. Escribió sobre diversos temas; por ejemplo, sobre geometría y sobre mecánica. Su principal obra es "Las Métricas", que es una especie de recetario de reglas para resolver problemas; así, se indica como calcular áreas de figuras geométricas y volúmenes de cuerpos; también se dan reglas para resolver ecuaciones de segundo grado, asi como extraer raices cuadradas y cúbicas. En el Libro I se encuentra su famosa fórmula para calcular el área del triángulo. Asi se tiene el

**Teorema.** *Si $K$ es el área de un triángulo teniendo lados de longitudes $a$, $b$, $c$, entonces*

$$K = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\ ,$$

*donde* $s = \dfrac{1}{2}\,(a+b+c)\,.$

Para probar este teorema, Herón necesitó de los siguientes resultados.

**Proposición 1.** *Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se encuentran en un punto, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.*

[Proposición 4. Libro IV. Elementos de Euclides].

**Proposición 2.** *En un triángulo rectángulo, si una perpendicular es bajada desde el ángulo recto a la base, los triángulos a cada lado de la perpendicular son semejantes entre si, y cada uno es semejante al triángulo dado.*

[Proposición 8. Libro VI. Elementos de Euclides].

**Proposición 3.** *En un triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa es equidistante de los tres vértices.*

**Proposición 4.** *Si $AHBO$ es un cuadrilátero con diagonales $AB$ y $OH$, y si los ángulos $HAB$ y $HOB$ son ángulos rectos, entonces una circunferencia puede ser construida pasando a través de los vértices $A$, $H$, $B$, $O$.*

**Proposición 5.** *Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico (inscrito) suman dos ángulos rectos.*

[Proposición 22. Libro III. Elementos de Euclides].

**Nota.** Una prueba detallada del teorema de Herón puede ser encontrada en [DUN. 1], pag. 118. Una estimulante tarea es hacer una exposición de la prueba del citado teorema, incluyendo las pruebas de las cinco proposiciones mencionadas antes, asi como las proyecciones de ese resultado.

En el Libro II (de "Las Métricas"), Herón se ocupa de los volúmenes de figuras sólidas, como son el cono, la esfera, el toro; estudia también a los cinco solidos regulares; trata con el cilindro, el paralelepípedo, la pirámide; con los tronco de pirámide y de cono. En el Libro III se presenta la división de figuras, de áreas y volúmenes en una razón dada. Herón construyó diferentes aparatos mecánicos; se le atribuye haber escrito sobre los espejos; contribuyó a la tarea de construir arcos.

### 2.6.5. Pappus de Alejandría. (Aproximadamente 300 D.C.)

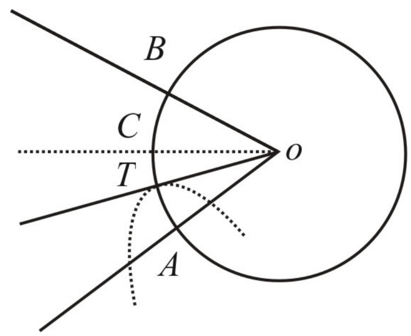
Pappus fue el último genio que floreció al final de la matemática griega. En su época, 320 D.C., el Imperio Romano tuvo su primer emperador cristiano, Constantino, en tanto Pappus escribía su enciclopédica obra, la "Colección Matemática". Eran los años del anochecer del pensamiento griego, de la matemática rigurosa. Pappus fue el último científico que tuvo la inspiración que había movido a Euclides, a Arquímedes y a Apolonio. Además de sus notables contribuciones matemáticas, la Colección tiene también un gran valor histórico pues a través de ella conocemos gran parte de la matemática griega, cuyos originales se perdieron. Así, por ejemplo, por ella sabemos sobre los trabajos de Arquímedes sobre los poliedros semi - regulares.

Pappus fue un matemático original, muy intuitivo; contribuyó con lemas suplementarios a los teoremas demostrados por Euclides, por Arquímedes, Apolonio y por Ptolomeo; dió otras demostraciones a teoremas conocidos. Originalmente, la Colección constaba de ocho libros pero el primero y parte del segundo se perdieron. Hizo una distinción entre los llamados:

- problemas "planos" ■ que son solubles con rectas y circunferencias solamente,
- problemas "sólidos" ■ que son solubles usando secciones cónicas, y

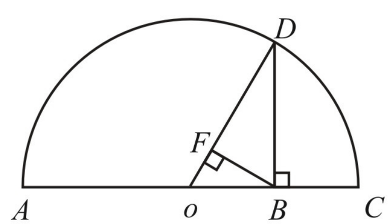
- problemas "lineales" ■ que utilizan curvas diferentes a las rectas, circunferencias y a las secciones cónicas.

Por ejemplo, Pappus establece que el problema de la trisección de un ángulo es un problema sólido. Asi, sea el ángulo dado $AOB$. (Ver [BOY]).




Tracemos la circunferencia con centro $O$ y radio (arbitrario) $OA = OB$; sea $OC$ la bisectriz del ángulo $AOB$. Ahora Pappus construye la hipérbola que tiene a uno de sus focos en $A$, que tiene $OC$ como directriz y con excentricidad 2. Entonces una rama de esta hipérbola corta a la circunferencia en el punto $T$. Pappus afirma que el valor del ángulo $AOT$ es $\dfrac{1}{3}$ del valor del ángulo $AOB$. (Muy buena idea !).

A la intuición de este notable matemático le debemos la construcción de las medias aritmética, geométrica y armónica. Veamos el siguiente argumento. Sea la semi - circunferencia mostrada en la figura (Ver [EVE]).




Sobre $AC$ tomemos $B$, diferente del centro $O$; sea $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BF} \perp \overline{OD}$. Entonces, con respecto a los segmentos $AB$ y $BC$ se tiene que: $\overline{OD}$ es la media aritmética; $\overline{BD}$ es la media geométrica y $\overline{FD}$ es la media armónica. Además, en este caso $(AB \neq BC)$ se tiene:

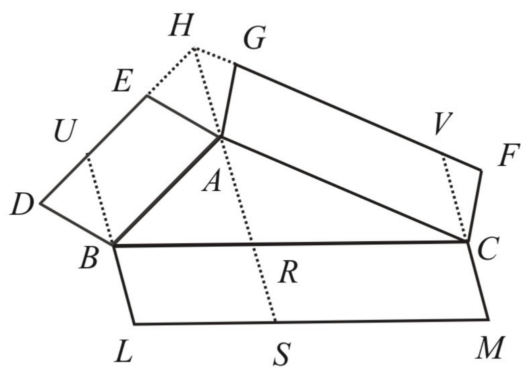
$$\text{media armónica} < \text{media geométrica} < \text{media aritmética} \ .$$

Este resultado aparece en el Libro III de la "Colección Matemática".

**Una Generalización del Teorema de Pitágoras.** [Pappus, Libro IV de la Colección Matemática]

Sea $ABC$ un triángulo arbitrario y sean $ABDE$ y $ACFG$ dos paralelogramos cualquieras, descritos externamente sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Sea $H$ la intersección de $\overline{DE}$ y $\overline{FG}$. Tracemos $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ iguales y paralelos a $\overline{HA}$. Entonces (considerando áreas):

$$\text{paralelogramo } BCML = \text{paralelogramo } ABDE + \text{ paralelogramo } ACFG \ .$$




(Ver [EVE], pag. 176; versión en inglés. Versión en portugués, pag. 227).

**Idea de la Demostración.** Según la figura adjunta, $HA$ corta a $BC$ en $R$ y a $LM$ en $S$; $LB$ corta $DH$ en $U$, y $MC$ corta a $FH$ en $V$. Entonces se observa que (áreas):

$$\text{paralelogramo } ABDE = \text{paralelogramo } ABUH = \text{paralelogramo } BRSL \ ;$$
$$\text{paralelogramo } ACFG = \text{paralelogramo } ACVH = \text{paralelogramo } RCMS \ .$$

Sumando ambas igualdades se obtiene la tesis.

■

**Nota.** Para una motivación del argumento dado en la idea de la demostración, ver la Proposición 47 del Libro I de los Elementos de Euclides; ver también el Libro VI, Proposición 31.

**El Teorema de Pappus.** *Dados los puntos $A$, $B$, $C$ sobre una línea, y $A'$, $B'$, $C'$ sobre otra línea, entonces los tres puntos de intersección*

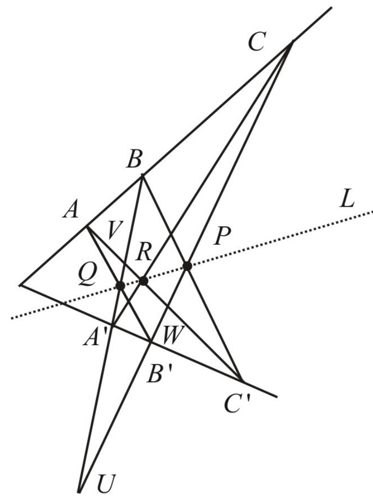
$$P = \overline{BC'} \cap \overline{CB'} \quad , \qquad Q = \overline{AB'} \cap \overline{BA'} \qquad \text{y} \qquad R = \overline{CA'} \cap \overline{AC'}$$

*son colineales.*

(Ver [ANG - LAM], pag. 107).

**Prueba.**

Llamemos $U = A'B \cap B'C$, $V = AC' \cap A'B$ y $W = B'C \cap AC'$.




Miremos al triángulo $UVW$; a él le aplicaremos el teorema de Menelao (2.5.2) cinco veces. Veamos, desde que $A'CR$, $BC'P$, $AB'Q$, $A'B'C'$ y $ABC$ son colineales, se tiene

$$\begin{aligned} VR.WC.UA' &= RW.CU.A'V \ , \\ VC'.WP.UB &= C'W.PU.BV \ , \\ VA.WB'.UQ &= AW.B'U.QV \ , \\ VC'.WB'.UA' &= C'W.B'U.A'V \ , \\ VA.WC.UB &= AW.CU.BV \ . \end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\frac{VR.WC.UA'.VC'.WP.UB.VA.WB'.UQ}{VC'.WB'.UA'.VA.WC.UB} = \frac{RW.CU.A'V.C'W.PU.BV.AW.B'U.QV}{C'W.B'U.A'V.AW.CU.BV} \ ,$$

de donde, $VR.WP.UQ = RW.PU.QV$. Aplicando nuevamente el teorema de Menelao, concluimos que los puntos $P$, $Q$ y $R$ son colineales.

■

## 2.6.6. Llega la Noche.

Luego de Pappus, la matemática griega entra en estancamiento; no surgen figuras que se aproximen a los grandes maestros; ya no hay originalidad ni gran calidad en los trabajos que se produjeron. En verdad, la Colección de Pappus es la última obra matemática de nivel y de importancia; por algo se le llamó el "Tesoro del Análisis". En esta etapa, años $300'$s de nuestra Era, surgen matemáticos menores asi como los llamados "comentaristas". Citemos a algunos de ellos.

**(i). Teón de Alejandría.** Teón vivió por el año 365 y escribió unos comentarios sobre el Almagesto de Ptolomeo; le debemos también una edición de los Elementos de Euclides, contribuyendo asi a la difusión de tan gran obra matemática.

**(ii). Hypatía.** Ella fue la primera mujer matemática que se tenga referencia; fue hija de Teón. Escribió unos comentarios sobre las Cónicas de Apolonio, asi como sobre unas obras de Diofanto y de Ptolomeo. Fue una mujer erudita, de gran sensibilidad científica y probablemente fue la última persona que sabía de la grandeza de Alejandría. Hypatía fue fiel a sus convicciones religiosas manteniéndose leal a sus dioses griegos, lo que le costó una muerte atroz por parte de unos fanáticos religiosos; fue decapitada y sus restos fueron arrojados por las calles de Alejandría. Era el año 415.

**(iii). Proclo** $(410-485)$. Proclo recibió su educación inicial en Alejandría; luego viajó a Atenas en donde aprendió la filosofía Neo - Platónica. Escribió una variedad de libros; se interesó sobre los diálogos de Platón sobre lo cual escribió algunos ensayos. Fue un reconocido filósofo en su época. Posiblemente el mas importante trabajo de Proclo fue su Comentario sobre el Libro I de los Elementos de Euclides ya que este trabajo es una de las mas importantes fuentes sobre la historia de la geometría elemental que hemos heredado. Proclo tuvo acceso a un gran número de trabajos históricos y críticos, algunos de los cuales se perdieron. El Comentario fue llamado también el Sumario de Eudemo; por este trabajo conocemos, por ejemplo, los trabajos matemáticos de Tales, asi como de los pitagóricos. Proclo también escribió sobre astronomía asi como unos comentarios sobre la República de Platón. Murió en el año 485 teniendo 75 años.

**(iv). Simplicio** (520?). Este comentador escribió un trabajo sobre Aristóteles, así como también sobre el Libro I de los Elementos de Euclides;

contribuyó también con algunos aportes sobre la cuadratura de las lúnulas. Simplicio estuvo interesado en la geometría griega y le debemos el conocer parte de la obra de los antiguos maestros griegos.

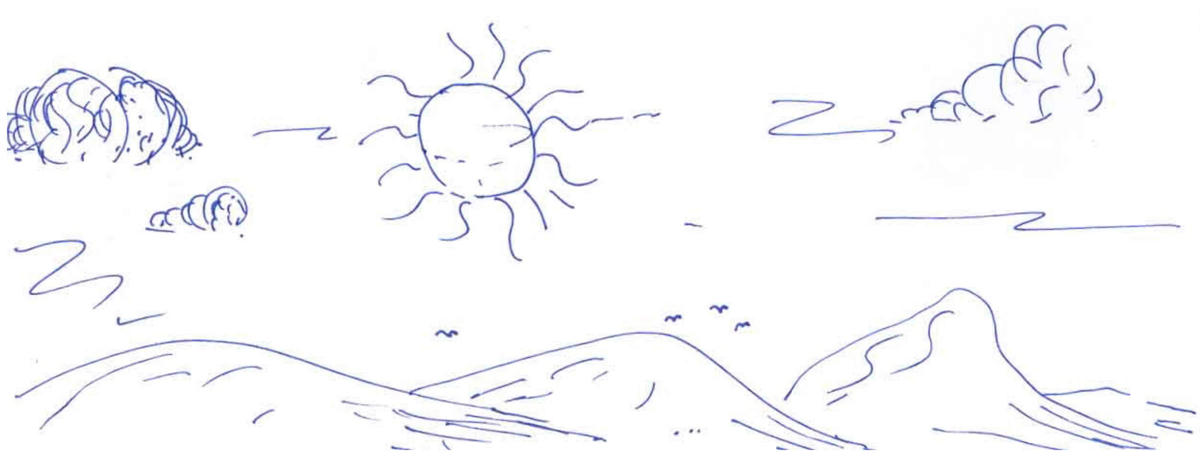
**(v).** **Eutoquio** ($\pm 560$). Fue un matemático bizantino que escribió varias obras sobre el trabajo de Arquímedes ("Sobre la Esfera y el Cilindro", el "Libro de los Equilibrios", "Medida del Círculo"); escribió una interesante obra sobre las Cónicas de Apolonio.

Con el transcurso del tiempo, Alejandría fue conquistada por los romanos; en aquellos tiempos gobernaba Constantino. En el Museo de Alejandría, los sabios debían elegir entre el cristianismo o seguir fieles a sus dioses; la segunda elección costó a la humanidad la destrucción de $300,000$ manuscritos, los que contenían un tesoro científico de un valor incomparable.

En el año **640**, los mahometanos tomaron Alejandría. La biblioteca estaba cerrada por muchos años. Ante numerosísimos documentos llenos de polvo, el gobernador árabe recibió la "célebre orden":

$\ll$ o bien los manuscritos contenían textos contrarios al Corán, y debían ser destruidos, o bien no hablaban de él, y debían ser igualmente destruidos $\gg$ .

Y destruyeron la biblioteca ! Asi termina una etapa gloriosa en la historia de la matemática. Una época brillante, con aportes de primerísimo nivel en el campo matemático y del pensamiento en general. Todo ello fue destruido por unos bárbaros.



**COMENTARIOS 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6.**

1. Retomemos el Problema de Apolonio (2.3.4). Como sabemos, el problema consiste en: "dados tres objetos que pueden ser, cada uno de ellos, puntos, rectas o circunferencias, dibujar una circunferencia tangente a las tres".

   Esta cuestión tiene diez casos posibles que son:

   **(1).** Tres puntos; **(2).** Tres rectas;
   **(3).** Dos puntos y una recta; **(4).** Dos rectas y un punto;
   **(5).** Dos puntos y una circunferencia;
   **(6).** Dos circunferencias y un punto;
   **(7).** Dos rectas y una circunferencia;
   **(8).** Dos circunferencias y una recta;
   **(9).** Un punto, una recta y una circunferencia;
   **(10).** Tres circunferencias.

   Los casos (1) y (2) aparecen en el Libro IV de los Elementos de Euclides y constituyen los casos mas sencillos. (3), (4), (5), (6), (8) y (9) aparecen en la obra "Tangencias" o "Contactos" de Apolonio, en tanto que (7) y (10) se encuentran en el Libro II de esta obra.

2. La obra geométrica de Apolonio fue altamente especializada; su técnica para desarrollar sus ideas fue algo completamente nuevo en aquellos tiempos; rompió con el modelo tradicional de Euclides y de su Escuela. Todo ello determinó que la lectura de la obra de este notable genio fuera algo difícil de estudiar, en especial las "Cónicas", y por tanto se le olvidara por mucho tiempo y no se le conociera al contrario de lo sucedido con la obra de Euclides, en particular con "Los Elementos". Inclusive, conjeturamos que actualmente las Cónicas no son suficientemente conocidas, al menos con un interés histórico. El mundo occidental solo conoció a esta obra (en forma incompleta) en 1710 cuando fue publicada por Edmundo Halley.

3. **Euclides, Arquímedes y Apolonio**, tres ilustres personajes que glorificaron al pensamiento matemático de todos los tiempos. Ellos representan la culminación de una feliz evolución del pensamiento en la

Antiguedad y sus ideas iluminaron el futuro de la matemática por muchos siglos. Sin embargo, es justo reconocer que alrededor de estos gigantes de la creación hubieron también notables matemáticos que aportaron mucho a nuestra ciencia. Con la contribución de todos ellos, la matemática griega aporta algo esencial en la vida de la matemática: la "**demostración**", según la cual las propiedades matemáticas dejan de ser hechos intuitivos, informales para convertirse en conocimientos. La matemática se hace racional; es la sublimación de la ciencia y se llega a altos niveles estéticos. Otra notable contribución de los griegos fue la introducción de la "**abstracción**" en los argumentos matemáticos, que si bien aún no fue una abstracción como la elaborada siglos después, ya era un rasgo propio de una inteligencia superior. Debemos a los Pitagóricos los primeros esfuerzos hacía una mente reflexiva y abstracta, lo que fue continuado con mucho suceso por los venidores matemáticos de aquellos años gloriosos.

Los matemáticos de la Antiguedad se enfrentaron al problema del infinito; sabían construir $\sqrt{2}$ geométricamente pero tuvieron dificultad en explicarlo aritméticamente. Siempre que podían ocultaban al infinito; hemos visto que Arquímedes llegó a sumar infinitos términos y que Eudoxo se las ingenió para interpretar infinitas etapas. Por otro lado, la matemática de aquellos tiempos fue mas estática que dinámica, característica que posiblemente se deba a la influencia de la filosofía de Platón, quien ubicaba a la matemática lejos de los fenómenos físicos, del mundo en movimiento, de ese mundo que consideraba indigno de las mentes superiores. Asi la matemática griega era una matemática de lo finito y de las ideas abstractas. El gran Arquímedes tuvo la osadía de "poner los pies sobre la tierra".

**4.** Alrededor del año 255 A.C., Eratóstenes fue designado el tercer director de la Biblioteca de Alejandría; fue un pensador universal, ya trabajaba en aplicaciones de la matemática en la astronomía ya componía hermosos versos o escribía sus reflexiones filosóficas. Fue un agudo investigador; estudiando unos papiros en la biblioteca de Alejandría encontró un documento sobre las observaciones en Siena, que estaba a 800 Kms al sureste de Alejandría, en que leyó que los rayos solares al caer sobre una vara el medio día del solsticio de verano (21 junio) no producía sombra. Curioso como era, realizó las mismas observaciones en Alejandría el mismo día y a la misma hora, observando que la luz del Sol incidía verticalmente en un pozo de agua el mismo día a la misma hora. Meditó que si el Sol estaba muy lejos de la Tierra, entonces sus rayos nos deberían llegar en forma paralela si la Tierra fuera plana, como se asumía en aquellos tiempos, y por tanto no se debería encontrar diferencia alguna entre las sombras proyectadas por los objetos a la misma hora del mismo día. Pero, ocurrió que si se producía diferencia; la sombra dejada por la torre de Siena formaba 7 grados con la vertical; de esta manera Eratóstenes dedujo que la Tierra no era plana y por los argumentos dados en 2.4.2 dedujo que la circunferencia de la Tierra tenía un promedio de $41,000$ Kms.

Vía ingeniosos argumentos, Eratóstenes calculó la distancia de la Tierra al Sol y también la distancia a la Luna. Como geógrafo creó un avanzado calendario y como historiador nos legó un escrito cronológico del mundo desde la guerra de Troya. Trazó diversos mapas del mundo conocido. Sus últimos años los pasó ciego y determinó morir de hambre.

**5.** En 2.5.1 hemos presentado algunas consideraciones generales sobre los comienzos de la trigonometría; es casi difícil determinar los origenes de esta rama de la matemática. Se puede decir que ella estuvo en sus comienzos muy relacionada con la astronomía, en donde se obtuvieron bellas aplicaciones; luego se estableció la trigonometría esférica para finalmente elaborarse la trigonometría plana. Posiblemente en la tablilla Plimpton 322 se pueda encontrar la primera tabla trigonométrica. En la Antiguedad esta área tuvo un gran impulso con los trabajos de Aristarco de Samos, de Hiparco de Nicea, de Menelao de Alejandría y sobre todo de C. Ptolomeo. La trigonometría ha de ser de gran valor en la evolución de nuestra ciencia; muchas valiosas contribuciones se produjeron en los siglos venideros.

**6.** La historia prueba que las civilizaciones tienen su origen, su esplendor y su decadencia. La civilización griega, junto con su alta matemática, no podía escapar a esta regla y tuvo también su período de decadencia, el que abarca, mas o menos, desde el año 200 A.C. hasta el 415 D.C. En este período se produjeron bruscos cambios económicos, sociales y culturales, en parte debido al gran predominio del Imperio Romano, en donde no se cultivó el estudio de la matemática. Las guerras que se produjeron destruyeron diversos centros científicos; de esta manera, por estos tiempos no se estimuló el trabajo creador. Sin embargo, en estas condiciones el Museo y la Escuela de Alejandría logró sobrevivir y haciendo grandes esfuerzos se logró estimular la investigación matemática y surgieron algunos talentosos personajes, como los citados en 2.6. A esta etapa se le conoce como la **Segunda Etapa Alejandrina**. Es cierto que en este período no surgieron matemáticos del nivel de los habidos en la primera etapa, pero es cierto también que ellos hicieron grandes esfuerzos por conservar el legado de los grandes maestros y hacer también importantes contribuciones. Por ejemplo, dentro de tales personajes citemos a Ptolomeo quien trabajó con un espíritu euclideano, con el rigor que le caracterizó al viejo geómetra. En el "Almagesto", él considera unas tablas de cuerdas, que nos recuerda a la tabla de senos.

Los comentaristas fueron los últimos personajes en contribuir con la preservación de la matemática griega; entre fines del siglo IV D.C. e inicios del V se produce un nuevo ambiente con la caida del imperio romano. Surge el feudalismo que no necesitó de una actividad científica para sobrevivir según un modelo simplista y de una vida vacía de valores. Con el cristianismo los templos paganos y la cultura helenística no fueron apreciados ni bien vistos. Entre los últimos comentaristas tenemos a Teón ($335 - 395$ D.C.), a su hija Hypatía ($370 - 415$ D.C.) y a Proclo ($410 - 485$ D.C.).

Así, la matemática griega va llegando a su final pero ella va avanzando a través de otras culturas orientales. El largo camino de la noche ha de terminar luego de muchos siglos y nuevas luces aparecen en el horizonte.

## EJERCICIOS 2.3 - 2.4 - 2.5 - 2.6

**1.** **(a).** Describa el entorno en que vivió Apolonio.

**(b).** Antes de Apolonio, ¿qué se conocía de las secciones cónicas?

**(c).** Mencione algunas ideas de Arquímedes en relación con las secciones cónicas.

**2.** Redacte un breve informe sobre el Libro de las Cónicas de Apolonio.

**3.** **(a).** Dé algunas ideas sobre el problema de Apolonio.

**(b).** ¿Cómo procedió Eratóstenes para calcular la circunferencia de la Tierra?

**(c).** Explique en que consiste la criba de Eratóstenes.

**4.** **(a).** ¿Cómo surgió la trigonometría en la Antiguedad?

**(b).** Describa brevemente las contribuciones de Aristarco, de Hiparco de Nicea, de Menelao y de C. Ptolomeo en relación con la evolución de la trigonometría.

**(c).** ¿Cómo se calcula $\pi$ usando el teorema de Ptolomeo?

**5.** **(a).** ¿Podría haber alguna explicación de porqué la trigonometría surge en el período de la decadencia de la geometría griega? Justifique.

**(b).** ¿Podría haber una explicación de porqué en la Antiguedad se prefirió a un sistema astronómico geocéntrico a un sistema heliocéntrico? Justifique.

**6.** **(a).** ¿Existen algunos aspectos comparables entre las Cónicas de Apolonio con los Elementos de Euclides?

**(b).** Describa el ambiente y las condiciones habidas en los últimos siglos de la decadencia griega.

**7.** Redacte un breve informe sobre Diofanto de Alejandría, enfatizando su obra matemática.

**8.** **(a).** ¿Tuvo Platón alguna influencia en la característica de la matemática en la Antiguedad? Justifique.

**(b).** El Cristianismo, ¿tuvo alguna influencia en la matemática de los últimos años de la decadencia griega?, ¿porqué?

**9.** Describa el papel jugado por Teón, Hypatía y Proclo en el ocaso de la matemática griega.

**10.** ¿Podría conjeturar, porqué en el Imperio Romano no se cultivó la matemática?

**11.** Investigue sobre el papel desempeñado en la historia de la matemática por la Biblioteca y el Museo de Alejandría. Redacte su estudio en un breve informe.

**12.** **(a).** Explique como Menecmo obtiene las ecuaciones de la parábola y de la hipérbola equilátera.

**(b).** Mencione algunas propiedades de las cónicas obtenidas por Euclides y Arquímedes.

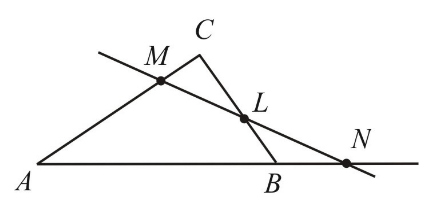
**(c).** ¿Porqué se puede afirmar que "la geometría analítica fue una invención de los griegos"?

**13.** Si $0° < \beta < \alpha < 90°$, pruebe que: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} < \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ .

Este resultado fue usado por Aristarco de Samos en sus estudios de astronomía.

**14.** Pruebe el teorema de Menelao: si una transversal intersecta los lados $BC$, $CA$ y $AB$ de un triángulo $ABC$ en los puntos $L$, $M$ y $N$ respectivamente, entonces

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1 \ .$$




**15.** Pruebe el teorema de Herón (2.6.4). Previamente pruebe las proposiciones 1, 2, 3, 4 y 5.

**16.** Dé los detalles de la prueba de la generalización del teorema de Pitágoras según Pappus (2.6.5).

**17.** Redacte un estudio crítico sobre el contenido de este libro; exprese sus propios sentimientos sobre lo logrado por los babilonios, los egipcios y los griegos.

# BREVE RESUMEN DE LOS CAPÍTULOS 1 Y 2.

**Capítulo 1.** Posiblemente en algún momento de su evolución, el hombre tuvo alguna sensación de la idea de cantidad. Con el transcurrir de los siglos diversas comunidades y culturas surgieron en diversas regiones, entre ellas hemos tratado a la babilónica y a la egipcia. En la matemática babilónica podemos apreciar que dispusieron de un sistema de numeración; llegaron a conocer al número $\sqrt{2}$ y a otros números "irracionales", llegando a establecer técnicas para obtener buenas aproximaciones. Asi mismo resolvieron ciertos problemas que llevaron a ciertas ecuaciones algebraicas que llegaron a resolver de alguna manera. A través de la tablilla Plimpton 322 hemos aprendido diversos resultados, como son los triples pitagóricos. La geometría babilónica era un conjunto de reglas para realizar medidas prácticas. Dividieron a la circunferencia en 360 partes iguales.

Para los egipcios, la matemática provenía de una fuente divina; desarrollaron un sistema de numeración y supieron realizar diversas operaciones aritméticas; supieron descomponer ciertos números racionales. Llegaron a establecer ciertas fórmulas geométricas y sobre todo nos dejaron el testimonio eterno: las Pirámides, en donde aplicaron conocimientos geométricos.

La matemática griega se inicia (propiamente) con Tales de Mileto ($\pm 640$ A.C.); se le atribuye diversos resultados geométricos que fueron la base para posteriores desarrollos. Pitágoras y su Escuela jugó un papel importante en el desarrollo de la matemática pura: teoría de números, magnitudes inconmensurables, algebra geométrica, .... Hipócrates de Quíos y Arquitas de Tarento contribuyeron al desarrollo de la matemática griega. Euclides y su entorno constituye el inicio de una etapa gloriosa en la historia del pensamiento. La matemática va llegando a niveles avanzados; se realizan diversas construcciones geométricas. Los tres clásicos problemas planteados en la Antiguedad: duplicación del cubo, trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo, realizados solo con regla y compás, jugaron un papel importante en el desarrollo de la matemática. Platón y la Academia impulsó el desarrollo del pensamiento en aquellos tiempos con aún proyecciones en la época moderna. Alrededor de Platón surgieron excelentes matemáticos; su discípulo predilecto fue Aristóteles. Por esta época el método exhaustivo fue un arma de razonamiento matemático.

Alejandría, con su Biblioteca y Museo, fue el centro del conocimiento de aquellos lejanos tiempos, en donde se cultivaban las diferentes ramas del saber. En tal ambiente surgió una de las obras mas bellas y completas que se hayan escrito en la matemática: "Los Elementos" de Euclides, obra que consta de trece libros, los que fueron presentados con cierto detalle.

**Capítulo 2.** En este capítulo estudiamos a Aristarco, Arquímedes, Apolonio y a Eratóstenes; asi mismo presentamos algunos aspectos sobre el surgimiento de la trigonometría en la Antiguedad, en donde resaltamos el trabajo de C. Ptolomeo. El capítulo, y este volumen, culmina con la declinación de la matemática griega.

El trabajo matemático de Aristarco es orientado a las aplicaciones de la matemática a la astronomía, y en este campo contribuyó al nacimiento de la trigonometría. Son notables sus ideas en el estudio del Sol, de la Tierra y de la Luna. Arquímedes, el mas grande matemático de la Antiguedad y uno de los mas notables científicos de todos los tiempos, es estudiado con cierto detenimiento; presentamos algunos aspectos de su obra matemática. Apolonio, el mas grande geómetra de la Antiguedad y fundador (esencialmente) de la geometría analítica, también es presentado con algunos detalles que exige su tan importante obra matemática. Eratóstenes, capaz poco conocido en nuestro ambiente, forma parte de este cuarteto de notables pensadores. Un estudio mas detallado, crítico y analítico, sobre la obra de estos cuatro hombres de ciencia, sería un interesante proyecto que se puede formular.

Finalmente, se presentan los aportes de un conjunto de matemáticos, que sin tener el nivel y la profundidad de sus antecesores, lucharon por al menos mantener la llama viva de aquella gloriosa matemática; ellos dieron algunos aportes en el campo de la investigación pero lo mas importante es que escribieron sobre la obra matemática de los Maestros, a fin de perpetuar sus obras en la posteridad.

# Bibliografía

[ALE-otros] Aleksandrov, A.D. - Kolmogorov, A.N. - Laurentiev, M.A. - otros.: "La Matemática: su contenido, métodos y significado". Vols. 1,2,3. Alianza Editorial. 1981.

[ALM] Almeida, Fernando de.: "História das Matemáticas na Antiguidade". Ailland e Bertrand. Paris - Lisboa.

[ANG] Anglin, W. S.: "Mathematics: A Concise History and Philosophy". Springer. 1994.

[ANG-LAM] Anglin, W.S. - Lambek, J.: "The Heritage of Thales". Springer. 1995.

[BEK] Bekken, Otto.: "Una Historia Breve del Algebra". SMP. Lima. 1983.

[BOS] Bos, Henk. J. M.: "Lectures in the History of Mathematics". History of Mathematics. Vol. 7. AMS. 1993.

[BOY] Boyer, Carl B.: "Historia de la Matemática". Alianza Editorial. 1987.

[COL] Collete, Jean - Paul: "Historia de las Matemáticas". Vols. I - II. Siglo XXI. 1986.

[COU-ROB] Courant, R. - Robbins, H.: "What is Mathematics" Oxford University Press. Segunda Edición. 1996.

[DUN.1] Dunham, William: "Journey Through Genius". Wiley. 1990.

[DUN.2] Dunham, William: "El Universo de las Matemáticas". Edic. Pirámide. 1995.

[EVE] Eves, Howard.: "Introdução à História da Matemática". UNICAMP. 1997.

[FAU-GRA] Fauvel, J. - Gray, J. [Editores]: "The History of Mathematics. A Reader". The Open University. 1987.

[GUZ.1] de Guzmán, Miguel.: "Lecciones pitagóricas para el siglo 21". Internet.

[GUZ.2] de Guzmán, Miguel.: "Matemáticas y Estructura de la Naturaleza". Internet.

[GUZ.3] de Guzmán, Miguel.: "Apolonio". Internet.

[HEA] Heath, Thomas.: "A History of Greek Mathematics". Vols. I-II. Oxford at the Clarendon Press. 1921.

[JAH] Jahnke, Hans N. Editor.: "A History of Analysis". AMS. History of Mathematical. Vol. 24. 2003.

[JOY] Joyce, D. E.: "Los Elementos de Euclides". Internet. Clart University. 1997. www.xtec.es/∼jdomen28/introducción.htm.

[KLI] Kline, Morris.: "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times". Vols. 1,2,3. Oxford University Press. 1990.

[LAU-PEN] Laubenbacher, R. - Pengelley, D.: "Mathematical Expeditions". Springer. 1999.

[MAN] Mankiewiez, Richard.: "Historia de las Matemáticas". Paidos. 2000.

[MLO] Mlodinow, L.: "Euclid′s Window". The Free Press. 2001.

[MOI] Moise, Edwin E.: "Elementary Geometry from an Advanced Stand point". Addison - Wesley. Pub. 1964.

[NAV] Navarro L., Juan.: "Los Elementos de Euclides". Internet. España.

[NEW] Newman, James R.: "El Mundo de las Matemáticas". Sigma. Vols. 1,2,3,4,5,6. Ediciones Grijalbo. S.A. 1969.

[PEL] Pelletier, Jean - Louis.: "Etapas de la Matemática". Edit. Losada. Bs. As. 1958.

[PER] Perero, Mariano.: "Historia e Historias de Matemáticas". Grupo Editorial Iberoamericana. 1994.

[REY-BAB] Rey Pastor, J. - Babin, J.: "Historia de la Matemática". Espasa. 1951.

[RIB] Ríbnikov, K.: "Historia de las Matemáticas". Mir. 1987.

[SER] Serres, Michel. Editor.: "Historia de las Ciencias". Cátedra. 1991.

[STI] Stillwell, John.: "Mathematics and its History". Segunda Edición. Springer. 2002.

**Nota.** La mayoría de los libros citados se encuentran en la biblioteca de Ciencias de la PUCP.

# INDICE ALFABÉTICO